

Ж. Адамар

Элементарная геометрия

Часть первая. Планиметрия.

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ж11

Ж11 **Ж. Адамар**
Элементарная геометрия: Часть первая. Планиметрия. / Ж. Адамар – М.: Книга по Требованию, 2012. – 608 с.

ISBN 978-5-458-25326-0

Основой книги служит обыкновенный школьный курс геометрии на плоскости; однако содержание её выходит за рамки существующих программ. Это энциклопедия элементарной геометрии, стоящая на уровне современной науки и написанная выдающимся математиком. Существенным Достоинством книги является наличие большою числа задач, многие из которых могут дать материал для творческой работы. В третьем издании книги помещены полные решения всех этих задач.

ISBN 978-5-458-25326-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

44. Сумма углов треугольника	53
44а. Сумма углов произвольного многоугольника	54
<i>Упражнения 21—25.</i>	54

Глава VI. Параллелограммы. Поступательные перемещения.

45—47. Параллелограммы	55
48. Ромб, прямоугольник	59
49. Квадрат	60
50—51. Поступательные перемещения	60
<i>Упражнения 26—32.</i>	61

Глава VII. Прямые в треугольнике, проходящие через одну точку.

52. Перпендикуляры, восстановленные в серединах сторон	62
53. Высоты	62
54. Биссектрисы	63
55—56. Медианы	63
<i>Упражнения 33—38.</i>	64
Задачи (39—46) к первой книге	65

КНИГА ВТОРАЯ.

ОКРУЖНОСТЬ.

Глава I. Пересечение прямой с окружностью.

57. Окружность определяется тремя точками	67
58. Пересечение прямой с окружностью; касательная к окружности	67
59. Общее определение касательной	68
60. Нормаль	69
60а. Угол между двумя окружностями	69
<i>Упражнения 47—49.</i>	69

Глава II. Диаметры и хорды.

61. Диаметр есть ось симметрии окружности	69
62. Хорда	70
63—64. Расстояние точки от окружности	70
65—66. Равные и неравные дуги и хорды	71
67. Касательная имеет с окружностью две общие точки, слившиеся между собой	72
<i>Упражнения 50—54.</i>	72

Глава III. Пересечение двух окружностей.

68—71. Исследование пересечения двух окружностей	73
72. Две окружности, касающиеся друг друга, имеют две общие точки, слившиеся между собой	75
<i>Упражнения 55—59</i>	76

Глава IV. Свойства вписанного угла.

73. Измерение вписанного угла	76
74. Измерение угла, образованного касательной и хордой, выходящей из точки касания	77
75—76. Угол, образованный двумя секущими	78
77—78. Геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным углом	79
79—82. Угловые свойства четырёхугольника, вписанного в круг . .	79
82а. Геометрическое место вершин равных и одинаково направленных углов, стороны которых проходят через две данные точки, есть окружность	81
Упражнения 60—72.	81

Глава V. Построения.

83—84. Геометрические построения. Геометрические инструменты .	82
85. Построения 1—3. Перпендикуляры к данной прямой. Биссектрисы	83
86—87а. Построения 4—9. Углы и треугольники	84
88. Построение 10. Прямая, проходящая через данную точку и параллельная данной прямой	87
89. Использование угольника	87
90. Построения 11—14. Окружность	88
91—92. Построения 15—17. Касательная к окружности	89
93. Построение 18. Общие касательные к двум окружностям .	91
94. Построение 19. Окружности, касающиеся трёх данных прямых	93
Упражнения 73—91.	94

Глава VI. Перемещение фигур.

95. Равные фигуры, имеющие одинаковое направление вращения.	96
96—98. Поступательное перемещение, вращение	96
99. Симметрия относительно точки	98
100—101. Две равные фигуры, имеющие одинаковое направление вращения, могут быть получены одна из другой с помощью поступательного перемещения, сопровождаемого вращением. Угол между двумя фигурами	98
102. Две равные фигуры, имеющие одинаковое направление вращения, получаются одна из другой с помощью поступательного перемещения или с помощью вращения	99
102а—103. Другое доказательство (разложение перемещения на симметрии).	100
104. Мгновенный центр вращения	102
Упражнения 92—97	103
Задачи (98—123) ко второй книге	104

КНИГА ТРЕТЬЯ.

ПОДОБИЕ.

Глава I. Пропорциональные отрезки.

105—107.	О пропорциях вообще	107
108—110.	Деление отрезка	109
111—112.	Гармоническое деление	110
113.	Основная теорема	111
114.	Прямая, параллельная основанию треугольника	113
115.	Свойства биссектрисы	114
116.	Геометрическое место точек, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно	115
	<i>Упражнения 124—128.</i>	116

Глава II. Подобие треугольников.

117.	Лемма	116
118—120.	Признаки подобия	117
121.	Отрезки, отсекаемые на параллельных прямых прямыми пучка	119
	<i>Упражнения 129—134.</i>	120

Глава III. Метрические соотношения в треугольнике.

122.	Проекция	121
123—125.	Прямоугольные треугольники. Теорема Пифагора	121
126—127.	Произвольные треугольники. Теорема Стюарта	122
128—130.	Вычисление длин замечательных линий треугольника	124
130а.	Радиус описанной окружности	126
	<i>Упражнения 135—147.</i>	127

Глава IV. Пропорциональные отрезки в круге.

Радикальная ось.

131—135.	Степень точки относительно окружности	128
136—138.	Радикальная ось	130
139.	Радикальный центр	132
	<i>Упражнения 148—154.</i>	132

Глава V. Гомотетия и подобие.

140.	Определение гомотетии	133
141—142.	Общие свойства	133
143.	Случай двух окружностей	135

144.	Две фигуры, гомотетичные третьей, гомотетичны между собой	136
145.	Оси подобия трёх окружностей	137
146—149.	Подобие многоугольников	137
150.	Точка, сама себе соответствующая	140
150а.	Паптограф	141
	<i>Упражнения 155—162.</i>	142

Глава VI. Построения.

151.	Построения 1—2. Пропорциональные отрезки	143
152.	Построения 3—3а. Подобные многоугольники	144
153—156.	Построения 4—9. Среднее пропорциональное; отрезок $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$; отрезки, определённые их суммой или разностью и их произведением; деление в среднем и крайнем отношении	144
157.	Построение 10. Точки, расстояния которых от данных прямых имеют данные отношения	149
158.	Построения 11—13. Общие касательные; радикальная ось; ортогональные окружности	150
159.	Построения 14—15. Окружности, касающиеся данной прямой или данной окружности и проходящие через две данные точки	151
	<i>Упражнения 163—177.</i>	152

Глава VII. Правильные многоугольники.

160—163.	Определение правильных многоугольников и их существование	153
164.	Звездчатые правильные многоугольники	155
165—170.	Построение правильных многоугольников, вписанных в окружность; квадрат, шестиугольник, треугольник, десятиугольники, пятиугольники	156
171—175.	Пятнадцатигульники	160
176—178.	Длина окружности. Отношение длины окружности к диаметру	164
179—179а.	Длина дуги окружности	167
180—181.	Вычисление π . Метод периметров	169
182—183.	Вычисление π . Метод равных периметров	171
184.	Результат вычислений	174
	<i>Упражнения 178—189.</i>	175
	Задачи (190—216) к третьей книге	176

ДОПОЛНЕНИЯ К ТРЕТЬЕЙ КНИГЕ.

Глава I. Знаки отрезков.

185—187.	Соглашение о знаках; основное тождество	178
188—189.	Свойство гармонических точек	179

190—191. Приложение к гомотетии и к степени точки относительно окружности	181
<i>Упражнения 217—222.</i>	181

Глава II. Трансверсали.

192—193. Теорема о трансверсалиях. Обратная теорема	182
194—196. Приложения: середины диагоналей полного четырёхсторонника; гомологические треугольники; теорема Паскаля	184
197—198. Отрезки, отсекаемые на сторонах треугольника прямыми, выходящими из вершин треугольника и проходящими через одну точку	187
<i>Упражнения 223—231</i>	188

Глава III. Сложное отношение. Гармонические четвёрки прямых.

199. Сложное отношение	189
200. Основная теорема	189
201. Гармонические четвёрки прямых	190
202. Свойство полного четырёхсторонника	191
203. Поляра точки относительно угла	191
<i>Упражнения 232—236.</i>	192

Глава IV. Полюсы и поляры относительно окружности.

204. Определение поляры и её построение	193
205. Теорема о сопряжённых точках	194
206. Взаимно-полярные фигуры	195
207—208. Приложение к гомологическим треугольникам и к теореме Бриансона	195
209—210. Преобразование метрических свойств	196
211. Новое определение поляры и её построение	197
212. Сложное отношение точек, лежащих на окружности	198
213. Приложение к сопряжённым хордам	199
<i>Упражнения 237—241.</i>	199

Глава V. Взаимно обратные фигуры.

214—216. Определения. Окружность инверсии. Симметрия относительно прямой как предельный случай инверсии	200
217—218. Направление и длина отрезка, соединяющего точки, обратные двум данным точкам	201
219. Касательные к взаимно обратным кривым. Угол между кривыми, обратными данным	202
220. Фигура, обратная прямой линии	203
221. Фигура, обратная произвольной окружности	204
222. Взаимно обратные окружности	204

223—226. Антигомологические точки и хорды	205
227—228. Окружности, пересекающие две данные окружности под одним и тем же углом	206
<i>Упражнения 242—257.</i>	208

Глава VI. Задачи о касании окружностей.

229—231. Первое решение	209
232—236. Решение Жеронна	211
<i>Упражнения 258—268.</i>	214

Глава VII. Свойства вписанного четырёхугольника.

Инверсор Поселье.

237—238. Теорема Птолемея. Случай точек, лежащих на одной прямой	215
239. Вычисление хорды дуги $a \pm b$ по заданным хордам дуг a и b .	217
240—240а. Отношение диагоналей вписанного четырёхугольника; вычисление этих диагоналей и радиуса описанной окружности . .	217
241. Инверсор Поселье	220
241а. Инверсор Гарта	221
<i>Упражнения 269—271а.</i>	222
Задачи (272—286) к дополнениям к третьей книге.	223

КНИГА ЧЕТВЁРТАЯ.

ПЛОЩАДИ.

Глава I. Измерение площадей.

242—246. Определения	225
247. Площадь прямоугольника	226
248. Площадь параллелограмма	228
249—251. Площадь треугольника	229
252—252а. Площадь произвольного многоугольника; площадь трапеции.	230
253—254. Площадь правильного многоугольника; площадь многоуголь- ного сектора; площадь описанного многоугольника	230
255. Площадь вписанного четырёхугольника	231
<i>Упражнения 287—301.</i>	232

I

Глава II. Сравнение площадей.

256. Отношение площадей двух треугольников, имеющих по рав- ному углу	233
257. Отношение площадей двух подобных многоугольников . . .	234
258. Квадрат гипотенузы	234
<i>Упражнения 302—311.</i>	235

Глава III. Площадь круга.

259—260.	Определение площади круга	236
261—262.	Формула для площади круга. Площадь кругового сектора .	238
263.	Площади фигур, ограниченных дугами круга	238
	<i>Упражнения 312—318.</i>	239

Глава IV. Построения.

264—266.	Равновеликие треугольники и многоугольники	239
267.	Задача о квадратуре круга не разрешима с помощью циркуля и линейки	241
	<i>Упражнения 319—323.</i>	241
	Задачи (324—342) к четвёртой книге.	241

ПРИБАВЛЕНИЯ.

Прибавление А.	О методах, применяемых в геометрии	244
а)	Теоремы, предлагаемые для доказательства	244
б)	Геометрические места. Задачи на построение	251
с)	Методы геометрических преобразований	254
Прибавление В.	О постулате Эвклида	262
Прибавление С.	Задача о касании окружностей	272
Прибавление D.	О понятии площади	278
Прибавление E.	Задача Мальфатти	283
	Смешанные задачи и задачи, предлагавшиеся на конкурсных экзаменах (343—422).	292

РЕШЕНИЯ УПРАЖНЕНИЙ И ЗАДАЧ.

Составлены Д. И. Перепёлкиным.

Книга первая. Прямая линия.

Упражнения	307
Задачи	322

Книга вторая. Окружность.

Упражнения	327
Задачи	351

Книга третья. Подобие.

Упражнения	368
Задачи	393

Дополнения к третьей книге.

Упражнения	407
Задачи	448

Книга четвёртая. *Площади.*

Упражнения	458
Задачи	472

Смешанные задачи и задачи, предлагавшиеся на конкурсных экзаменах 488

Указатель содержания задач	608
--------------------------------------	-----

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ РУССКОМУ ИЗДАНИЮ.

Настоящее—третье — издание перевода первой части „Элементарной геометрии“ Адамара существенно отличается от двух предыдущих тем, что в нём помещены решения всех имеющихся в первой части задач.

Несомненно, что самостоятельное решение этих, по большей части трудных, задач потребовало бы от читателя весьма большого количества времени и весьма значительных усилий. В то же время многие из этих задач представляют интерес не только как темы для упражнений, но и независимо от этого по самому их содержанию. Эти соображения и заставили нас приняться за составление решений задач, помещённых в курсе Адамара.

Содержание задач перепечатано здесь в основном без изменений. Исправлено, однако, несколько ошибок, вкравшихся в русский перевод (задачи 13, 49, 378, 406). Далее в процессе решения задач выявилась необходимость исправить отдельные погрешности или уточнить редакцию ряда задач, данную Адамаром (№№ 9, 10, 41, 88, 191, 222, 223, 256, 260, 270, 276, 284, 339, 347, 363, 372, 399, 400); в задачах 220, 253а, 265, 308 и 419а мы позволили себе опустить имевшиеся там указания на путь решения. Само собой разумеется, что автор этих строк принимает на себя ответственность за внесённые изменения.

Что касается характера и стиля приведённых нами решений, то, предоставляя судить о них читателю, ограничимся несколькими замечаниями. При выборе того или иного пути решения (если в нашем распоряжении имелось их несколько) мы стремились выбрать тот из них, который наиболее подходит к стилю Адамара, руководясь тем местом, где им помещена данная задача в книге, стилем изложения соответствующих вопросов в курсе, прямыми указаниями в тексте задачи на метод её решения, содержанием предшествующих ей и следующих за ней задач, и т. д. Мы помещали в книге два решения одной и той же задачи лишь в тех случаях, когда нам не удавалось сделать такого выбора, а также в тех немногих случаях, когда путь решения, намечаемый автором в самом тексте задачи, не представлялся нам наилучшим.

При изложении решения мы стремились оттенить наиболее ценные с нашей точки зрения логические моменты решения: значение тех или иных предположений, необходимость отдельных условий, доказательство правильности приведённого построения и т. п. Более трудные, но существенные моменты решения выделены нами в отдельные абзацы, набранные мелким шрифтом; они могут быть опущены читателем, не интересующимся этими более тонкими вопросами. Мы опускали или излагали весьма коротко те части решений, которые, по нашему мнению, легко могут быть развиты читателем: так, во многих задачах на построение опущено исследование и указано только (но избежание ошибок у читателя) наибольшее число решений, которое допускает задача; в доказательствах часто опускаются мотивы, по которым те или другие треугольники равны или подобны, прямые параллельны, и т. д. В особенности это относится к решениям более сложных задач.

Необходимо особо остановиться на задачах на отыскание наибольшего или наименьшего значения; таких задач в предлагаемой первой части имеется около 25. Дело в том, что в более трудных задачах такого рода

(№№ 366, 419а, 420) автор прямо рекомендует решать задачу, исходя из предположения, что существует фигура, для которой имеет место экстремум. Такой путь решения, более или менее естественный в ту эпоху, когда составлялась книга Адамара, мы считаем в настоящее время неприемлемым и в области элементарной геометрии. Поэтому во всех задачах на наибольшее и наименьшее значение нами даны такие решения, в которых существование экстремума не предполагается, а доказывается (за исключением задач 419а и 420, где мы ограничились соответствующим примечанием, так как подробный разбор изопериметрических свойств завёл бы нас слишком далеко).

Чтобы облегчить читателю ориентировку в содержании задач и помочь в подборе задач на ту или иную тему, мы поместили в конце книги небольшую «Указатель содержания задач». Заметим по этому поводу, что он далеко не исчерпывает и не может исчерпать всего содержания задач.

Мы отказались совершенно сознательно от помещения в решениях задач тех или иных библиографических данных по нескольким причинам. Прежде всего известно, что именно в области элементарной геометрии одни и те же теоремы и задачи встречаются по нескольку раз у различных авторов в разное время независимо друг от друга, и потому помещение в книге библиографических данных исторического характера представляло бы слишком сложную задачу. Далее составителем, естественно, была просмотрена и использована большая литература. Однако и в тех случаях, когда идея решения была заимствована из литературы, приходилось иногда проделывать большую работу, чтобы придать решению вид, подходящий к стилю настоящей книги в целом. Во многих случаях составитель даже и не мог бы сказать сейчас с полной уверенностью, было ли данное решение найдено им самостоятельно или заимствовано из литературы. Наконец, библиографические указания принесли бы в данном случае небольшую пользу и читателю, желающему расширить свои познания, так как соответствующая литература (за исключением нескольких общеизвестных книг) разбросана и, как правило, мало доступна.

Рукопись настоящей книги была полностью прочитана доцентом Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина М. А. Юкиным: составитель обязан ему рядом ценных замечаний, устраняющих те или иные пробелы в решениях, выделяющих исключительные случаи, и т. д. Доц. Н. Т. Зерчинов и Е. Д. Загоскина, также ознакомившиеся с рукописью, поделились с составителем своими соображениями по поводу методической стороны в редакции решений ряда задач, особенно к первым главам книги. Идея решения задачи 121а была сообщена составителю И. А. Вильнером. Ряд ценных указаний автор получил также от рецензентов [проф. В. Н. Депутатова] и доц. С. И. Зетеля. Редактор издательства канд. наук Т. Л. Козьмина своим внимательным отношением к рукописи способствовала улучшению изложения ряда решений. Всем перечисленным товарищам составитель выражает здесь свою искреннюю признательность.

Принимая во внимание, что именно в решениях задач особенно легко можно осуществить дальнейшее улучшение путём указания более простых или более изящных решений, составитель обращается ко всем читателям с просьбой сообщать ему (по адресу: Москва, Чистые пруды, 6, Учпедгиз, редакция математики) свои замечания и предложения, за которые он будет весьма благодарен.

Москва, февраль, 1947.

Д. Перепёлкин.