Н. Я. Виленкин

Комбинаторика

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н. Я. Виленкин

Н11 Комбинаторика / Н. Я. Виленкин – М.: Книга по Требованию, 2013. – 330 с.

ISBN 978-5-458-26106-7

Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчинённых тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется комбинаторикой.Представителям самых различных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр и иных объектов.

ISBN 978-5-458-26106-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

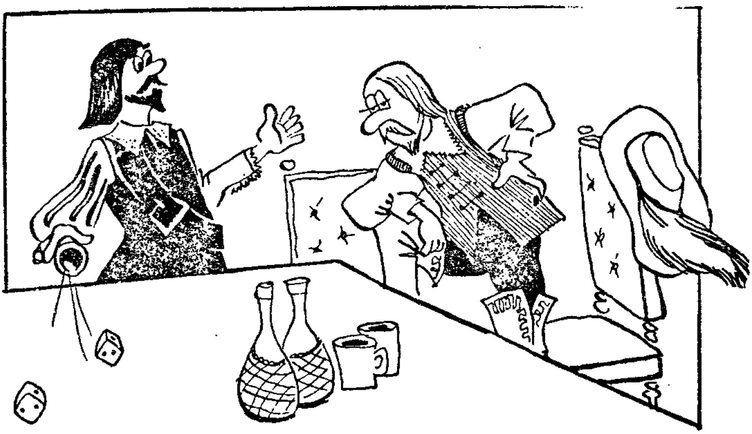
Представителям самых различных специальностей приходится решать задачи, в которых рассматриваются те или иные комбинации, составленные из букв, цифр и иных объектов. Начальнику цеха надо распределить несколько видов работ между имеющимися станками, агроному — разместить посевы сельскохозяйственных культур на нескольких полях, заведующему учебной частью школы — составить расписание уроков, ученому-химику — рассмотреть возможные связи между атомами и молекулами, лингвисту — учесть различные варианты значений букв незнакомого языка и т. д. Область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов, называется *комбинаторикой.*

Комбинаторика возникла в XVI веке. В жизни привилегированных слоев тогдашнего общества большое место занимали азартные игры. В карты и кости[1]) выигрывались и проигрывались золото и бриллианты, дворцы и имения, породистые кони и дорогие украшения. Широко были распространены всевозможные лотереи. Понятно, что первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр — вопросов, сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три кости, или сколькими способами можно получить двух королей в данной карточной игре. Эти и другие проблемы азартных игр явились движущей силой в развитии комбинаторики и развивавшейся одновременно с ней теории вероятностей.

Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик

---

[1]) При игре в кости бросалось несколько кубиков, на гранях которых стояли цифры от 1 до 6. Выигрывал тот, кто выбрасывал больше очков. Были и другие варианты игры.



Тарталья. Он составил таблицу, показывавшую, сколькими способами могут выпасть r костей. Однако при этом не учитывалось, что одна и та же сумма очков может быть получена разными способами (например, $1+3+4=4+2+2$).

Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские ученые Паскаль и Ферма. Исходным пунктом их исследований тоже были проблемы азартных игр. Особенно большую роль сыграла здесь задача о разделе ставки, которую предложил Паскалю его друг шевалье де Мере, страстный игрок. Проблема состояла в следующем: «матч» в орлянку ведется до шести выигранных партий; он был прерван, когда один игрок выиграл 5 партий, а другой — 4; как разделить ставку? Было ясно, что раздел в отношении 5:4 несправедлив. Применив методы комбинаторики, Паскаль решил задачу в общем случае, когда одному игроку остается до выигрыша r партий, а второму s партий. Другое решение задачи дал Ферма.

Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Якова Бернулли, Лейбница и Эйлера. Однако и у них основную роль играли приложения к различным играм (лото, солитер и др.). За последние годы комбинаторика переживает период бурного развития, связанного с общим повышением интереса к проблемам дискретной математики. Комбинаторные методы используются для решения транспортных задач, в частности задач по составлению расписаний; для составления планов производства и реализации продукции. Установлены связи между комбинаторикой и задачами линейного программирования, статистики и т. д. Комбинаторика используется для составления и декодирования шифров и для решения других проблем теории информации.

Значительную роль комбинаторные методы играют и в чисто математических вопросах — теории групп и их представлений, изучении оснований геометрии, неассоциативных алгебр и т. д.

На русском языке очень мало книг по комбинаторике. Помимо совсем элементарных книг типа школьных учебников, можно указать лишь на переводные книги М. Холла «Комбинаторный анализ», ИЛ, 1963; Дж. Риордана «Введение в комбинаторный анализ», ИЛ, 1963, и Г. Дж. Райзера «Комбинаторная математика», «Мир», 1965.

В предлагаемой вниманию читателя книге о комбинаторных проблемах рассказывается в занимательной, популярной форме. Тем не менее в ней разбираются и некоторые довольно сложные комбинаторные задачи, дается понятие о методах рекуррентных соотношений и производящих функций.

Первая глава книги посвящена общим правилам комбинаторики — правилам суммы и произведения. Во второй главе изучаются размещения, перестановки и сочетания. Этот традиционный школьный материал сопровождается разбором некоторых занимательных примеров. В главе III мы изучаем комбинаторные задачи, в которых на рассматриваемые комбинации налагаются те или иные ограничения. В главе IV рассмотрены задачи на разбиения чисел и рассказано о геометрических методах в комбинаторике. Глава V посвящена задачам о случайных блужданиях и различным модификациям арифметического треугольника. В главе VI рассказано о рекуррентных соотношениях, а в главе VII — о производящих функциях, и в частности о биномиальной формуле.

К книге приложено несколько сотен задач по комбинаторике, взятых автором из различных источников. Много задач заимствовано из книги Уитворта «Выбор и случай» (Whitworth W. A., Choice and Chance, London, 1901), упомянутой книги Риордана, книги А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении», Гостехиздат, 1954, различных сборников задач математических олимпиад и т. д.

ГЛАВА I

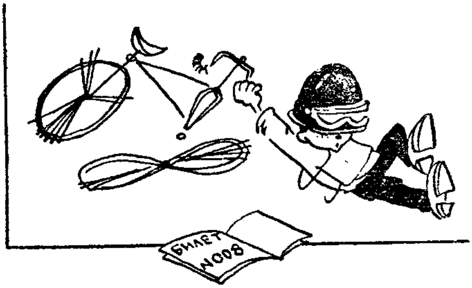
ОБЩИЕ ПРАВИЛА КОМБИНАТОРИКИ

Суеверные велосипедисты

«Опять восьмерка!» — горестно воскликнул председатель клуба велосипедистов, взглянув на погнутое колесо своего велосипеда. «А все почему? Да потому, что при вступлении в клуб мне выдали билет за номером 008. И теперь месяца не проходит, чтобы то на одном, то на другом колесе не появилась восьмерка. Надо менять номер билета. А чтобы меня не обвиняли в суеверии, проведу-ка я перерегистрацию всех членов клуба и буду выдавать только билеты с номерами, в которые ни одна восьмерка не входит».

Сказано — сделано, и на другой день он заменил все билеты. *Сколько членов было в клубе, если известно, что использованы все трехзначные номера, не содержащие ни одной восьмерки?* (Например, 000 использован, а 836 нет.)

Для решения этой задачи определим сначала, сколько однозначных номеров не содержит восьмерку. Ясно, что таких номеров девять 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (номер 8 пропускается). А теперь найдем все двузначные номера, не содержащие восьмерок. Их можно составить так: взять любой из найденных однозначных номеров и написать после него любую из девяти допустимых цифр. В результате из каждого однозначного номера получится девять двузначных. А так как однозначных номеров



тоже 9, то получится $9 \cdot 9 = 81$ двузначный номер без восьмерок. Вот они:

00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 09
10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19
20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29
30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39
40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49
50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 59
60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69
70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 79
90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 99

Итак существует $9^2 = 81$ двузначный номер без цифры 8. Но за каждым из них снова можно поставить любую из девяти допустимых цифр. В результате получим $9^2 \cdot 9 = 9^3 = 729$ трехзначных номеров. Значит, в клубе было 729 велосипедистов. А если взять не трехзначные, а четырехзначные номера, то номеров, не содержащих восьмерок, будет $9^4 = 6561$.

В другом клубе велосипедисты были еще суевернее. Так как число 0 похоже на вытянутое колесо, они отказались и от этой цифры и обходились восемью цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. *Сколько членов состояло в клубе, если номера билетов были трехзначными?*

Эта задача похожа на решенную выше, только вместо 9 цифр у нас всего 8. Поэтому и в ответе надо заменить 9 на 8. Иными словами, в клубе было $8^3 = 512$ членов.

Размещения с повторениями

Задача о велосипедистах относится к следующему типу задач. Даны предметы, относящиеся к n различным видам. Из них составляют всевозможные расстановки по k предметов в каждой, или, как будем в дальнейшем кратко говорить, *k-расстановки*. При этом в расстановки могут входить и предметы одного вида, а две расстановки считаются различными, если они отличаются друг от друга или видом входящих в них предметов, или порядком этих предметов. *Надо найти общее число таких расстановок.*

Расстановки описанного типа называются *k-размещениями с повторениями из элементов n видов*, а число всех таких расстановок обозначают $\overline{A}_n^k$. В первой задаче о велосипедистах число видов элементов равнялось 9 (мы брали все цифры, кроме 8), а в каждое размещение (каждый номер) входило по три элемента. Как было показано, в этом случае число размещений равно $\overline{A}_9^3 = 9^3$. Естественно предположить, что если число видов равно n, а в каждое размещение входит k элементов, то можно составить n^k размещений с повторениями.

Итак, мы хотим доказать, что число k-размещений с повторениями из элементов n видов равно

$$\overline{A}_n^k = n^k. \qquad (1)$$

Доказательство проводится с помощью математической индукции по k — числу элементов в размещении при фиксированном значении n. При $k=1$ ответ ясен — каждое размещение (с повторениями) состоит только из одного элемента, и разные размещения получаются, если брать элементы различных видов. Но так как число видов равно n, то и число размещений равно n. Итак, $\overline{A}_n^1 = n$ в соответствии с формулой (1).

Предположим теперь, что уже доказано равенство $\overline{A}_n^{k-1} = n^{k-1}$, и рассмотрим k-размещения с повторениями. Все такие размещения можно получить следующим образом. Возьмем любое $(k-1)$-размещение (с повторениями) $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ и припишем к нему элемент a_k одного из имеющихся n видов. Мы получим некоторое k-размещение $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$. При этом ясно, что из каждого $(k-1)$-размещения получится столько k-размещений, сколько есть различных видов элементов, то есть n размещений. Очевидно, что, действуя описанным образом, мы не пропустим ни одного k-размещения и ни одного не получим дважды (если $(a_1, \ldots, a_{k-1}) \neq$ $\neq (b_1, \ldots, b_{k-1})$ или если $a_k \neq b_k$, то $(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k) \neq (b_1, \ldots$ $\ldots, b_{k-1}, b_k))$. Поэтому число k-размещений с повторениями из элементов n видов в n раз больше, чем число $(k-1)$-размещений с повторениями из элементов тех же видов. Таким образом, $\overline{A}_n^k = n\overline{A}_n^{k-1}$. Но мы считаем уже доказанным, что $\overline{A}_n^{k-1} = n^{k-1}$. Поэтому

$$\overline{A}_n^k = n \cdot n^{k-1} = n^k.$$

Тем самым равенство (1) доказано для всех значений k.

Формула (1) встречается в целом ряде вопросов. Мы расскажем сейчас о некоторых из них.

Системы счисления

Наряду с десятичной системой счисления применяются и другие — двоичная, троичная, восьмеричная и т. д. (см. книгу С. В. Фомина «Системы счисления», «Наука», 1963). В n-ичной системе счисления используются n цифр. Подсчитаем, сколько в n-ичной системе натуральных чисел, записываемых ровно k знаками[1]). Если допустить записи, начинающиеся с нуля, то каждое k-значное число в n-ичной системе счисления можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из k цифр, причем цифры бывают n видов. По формуле (1) получаем, что количество чисел, имеющих такую запись, равно n^k.

Но для натуральных чисел не применяют записей, начинающихся с нуля. Поэтому из полученного значения n^k надо вычесть количество чисел, n-ичная запись которых начинается с нуля. Если отбросить у этих чисел первую цифру — нуль, то получим $(k-1)$-значное число (быть может, также начинающееся с нуля). Таких чисел по формуле (1) будет n^{k-1}. Значит, общее количество k-значных чисел в n-ичной системе счисления равно

$$n^k - n^{k-1} = n^{k-1}(n-1).$$

Например, в десятичной системе счисления имеем $10^3 \cdot 9 = 9000$ четырехзначных чисел — из 10 000 чисел от 0 до 9999 надо отбросить тысячу чисел, а именно числа от 0 до 999.

Полученную нами формулу можно вывести и иным способом. Ведь в k-значном числе, записанном по n-ичной системе счисления, первой цифрой может быть любая из цифр $1, 2, \ldots, n-1$. Второй же и дальнейшими — любые из цифр $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Таким образом, на первое место у нас $n-1$ кандидатов, а на остальные $k-1$ мест — по n кандидатов. Отсюда легко получаем, что искомых чисел может быть $(n-1)n^{k-1}$.

Секретный замок

Для запирания сейфов и автоматических камер хранения применяют секретные замки, которые открываются лишь тогда, когда набрано некоторое «тайное слово». Это слово набирают с помощью одного или нескольких дисков, на которых нанесены буквы (или цифры). *Пусть на диск нанесены 12 букв, а секретное слово*

---

[1]) Ради удобства мы относим здесь 0 к натуральным числам.

состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

По формуле (1) общее число комбинаций равно

$$12^5 = 248\,832.$$

Значит, неудачных попыток может быть 248 831. Впрочем, обычно делают сейфы так, что после первой же неудачной попытки открыть их раздается сигнал тревоги.

Код Морзе

При передаче сообщений по телеграфу используется код Морзе. В этом коде буквы, цифры и знаки препинания обозначаются точками и тире. При этом для одних букв используется один знак, например *Е*·, а для некоторых приходится использовать пять знаков, например *Э*· · — · ·.

Откуда же взялось число 5? Нельзя ли обойтись меньшим числом знаков, скажем, передавать все сообщения с помощью комбинаций, содержащих не более четырех знаков? Оказывается, что нельзя, и ответ этот дает именно формула для числа размещений с повторениями. Из формулы (1) следует, что $\bar{A}_2^1 = 2$. Иными словами, только две буквы можно передать с помощью одного знака (*Е*· и *Т*—). С помощью двух знаков можно передать $2^2=4$ буквы, трех знаков — $2^3=8$ букв и четырех знаков — $2^4=16$. Поэтому общее число букв, которые можно передать четырьмя знаками, равно

$$2+4+8+16=30.$$

А в русском алфавите 32 буквы, да еще надо передавать цифры и знаки препинания. Ясно, что символов из четырех знаков не хватает. А если брать и символы из 5 знаков, то к полученным 30 прибавится еще 32 символа. Полученных 62 символов вполне достаточно для телеграфирования.

Применяют для телеграфирования и пятизначный код, в котором каждая буква изображается в точности пятью символами. Здесь уже вместо точек и тире используют перемены направления тока, или посылку токового и бестокового сигнала. При пользовании этим кодом имеем ровно $2^5=32$ комбинации. Их хватает для передачи букв. А для передачи цифр, знаков препинания и т. д. используют те же комбинации, что и для букв. Поэтому телеграфные аппараты пятизначного кода имеют специальное устройство для перевода аппарата с букв на цифры и обратно.

Морской семафор

На флоте иногда применяют семафор флажками. Каждой букве при этом соответствует определенное положение флажков. Как правило, флажки находятся по разные стороны от тела сигнальщика. Однако при передаче некоторых букв (б, д, к, х, ю, я) оба флажка расположены по одну и ту же сторону. Почему пришлось сделать такое исключение? Ответ на этот вопрос дает та же формула размещений с повторениями. Дело в том, что различных положений каждого флажка пять — вниз отвесно, вниз наклонно, горизонтально, вверх наклонно и вверх отвесно. Так как у нас два флажка, то общее число комбинаций основных положений равно $\bar{A}_5^2 = 5^2 = 25$. При этом еще надо отбросить положение, когда оба флажка направлены вниз — оно служит для разделения слов. Всего получаем 24 комбинации, а этого недостаточно для передачи всех букв русского алфавита. Поэтому для некоторых букв и пришлось направить оба флажка в одну сторону.

Электронная цифровая вычислительная машина

Электронные вычислительные машины могут решать самые различные задачи. На одной и той же машине можно разгадывать надписи на незнакомых языках, делать расчет плотины и обрабатывать данные о движении ракеты. Чем объясняется такая гибкость в использовании машины? Главным образом тем, что все эти задачи сводятся к вычислениям, к действиям над числами. Но почему же машина может решать столько задач, да еще при самых различных числовых данных? Сколько различных комбинаций чисел можно поместить в машину?

Для ответа на этот вопрос возьмем, например, машину «Стрела». Оперативная память этой машины состоит из 2048 ячеек, в каждой из которых 43 двоичных