

Г. Ван Трис

Теория обнаружения, оценок и модуляции

**Том 1. Теория обнаружения, оценок и линейной
модуляции**

**Москва
«Книга по Требованию»**

Г11 **Г. Ван Трис**
Теория обнаружения, оценок и модуляции: Том 1. Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции / Г. Ван Трис – М.: Книга по Требованию, 2024. – 742 с.

ISBN 978-5-458-35510-0

Первый том четырехтомной монографии Ван Триса представляет собой серьезное учебное пособие по синтезу систем, предназначенных для оптимального радиоприема случайных сигналов при наличии помех. Книга содержит обстоятельное, методически хорошо отработанное изложение теории обнаружения и различения сигналов и оптимальной фильтрации сообщений. Применение теоретических положений проиллюстрировано на разнообразных практически важных примерах из области связи, радио- и гидролокации, а также других систем передачи информации. Указан ряд нерешенных перспективных проблем и сформулировано много новых интересных задач, часть из которых снабжена решениями. Многие примеры доведены до количественных результатов, представленных в виде многочисленных графиков.

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

| | |
|---|------------|
| 5.4.5. Оценивание при наличии коррелированного (небелого) шума | 528 |
| 5.5. Оценивание неслучайных сигналов | 529 |
| 5.6. Краткие итоги | 533 |
| 5.7. Задачи | 534 |
| Л и т е р а т у р а | 541 |
| Глава 6. ЛИНЕЙНЫЕ ОЦЕНКИ | 542 |
| 6.1. Свойства оптимальных устройств обработки | 543 |
| 6.2. Реализуемые линейные фильтры. Стационарные процессы с бесконечным прошлым. Винеровские фильтры | 556 |
| 6.2.1. Решение уравнения Винера — Хопфа | 557 |
| 6.2.2. Ошибки в оптимальных системах | 568 |
| 6.2.3. Нереализуемые фильтры | 571 |
| 6.2.4. Выражения для ошибки в замкнутой форме | 574 |
| 6.2.5. Оптимальные системы с обратной связью | 583 |
| 6.2.6. Примечания | 585 |
| 6.3. Фильтры Кальмана — Бьюси | 589 |
| 6.3.1. Представление линейных систем посредством дифференциальных уравнений и генерация случайных процессов | 591 |
| 6.3.2. Вывод уравнений оценки | 612 |
| 6.3.3. Приложение | 620 |
| 6.3.4. Обобщения | 637 |
| 6.4. Линейная модуляция в системах связи | 647 |
| 6.4.1. ДБП — АМ. Реализуемая демодуляция | 647 |
| 6.4.2. ДБП — АМ. Демодуляция с задержкой | 650 |
| 6.4.3. Амплитудная модуляция. Обобщенное понятие несущей | 651 |
| 6.4.4. Однополосная амплитудная модуляция с подавленной несущей | 652 |
| 6.5. Фундаментальная роль оптимального линейного фильтра | 655 |
| 6.6. Некоторые замечания | 656 |
| 6.7. Задачи | 657 |
| Л и т е р а т у р а | 713 |
| Условные обозначения, сокращения, символы | 716 |
| П р и л о ж е н и е. Некоторые нерассмотренные вопросы | 728 |
| Л и т е р а т у р а | 730 |
| П р е д м е т н ы й у к а з а т е л ь | 734 |
| И м е н н о й у к а з а т е л ь | 741 |

Предисловие к русскому переводу

Одно из основных направлений развития радиотехники в течение последних 25 лет связано с широким применением методов математической статистики. Несмотря на то, что многие из этих методов были хорошо известны, научно-прикладные работы в этом направлении сыграли весьма прогрессивную роль, так как они вооружили конструкторов некоторыми общими руководящими принципами, позволили оценить предельные возможности решения конкретных задач при определенных условиях и существенно расширили радиотехническую проблематику.

На возможности продуктивного использования статистических методов в радиотехнике, по-видимому, впервые непосредственно указали работы А. Н. Колмогорова (1941 г.) и Н. Винера (1942 г.) по синтезу оптимальных линейных фильтров.

Первая фундаментальная работа, посвященная систематическому применению методов математической статистики для решения задач радиосвязи, принадлежит В. А. Котельникову (1946 г.). В ней был получен ряд практически важных результатов принципиального характера.

К настоящему времени из широкого круга радиотехнических задач, решаемых методами математической статистики, можно выделить несколько направлений. Одно из них среди радиоспециалистов получило название «методы оптимального радиоприема». В этих задачах рассматриваются методы оптимального обнаружения и различения сигналов на фоне помех, методы оценки неизвестных параметров сигнала и разрешения нескольких сигналов, а также оптимальная фильтрация сообщений, содержащихся в принимаемых сигналах.

Обстоятельному и методически хорошо отработанному изложению этого круга задач и посвящена четырехтомная монография известного американского ученого Г. Ван Триса. (К настоящему времени изданы только первые два тома.) По замыслу автора монография написана как серьезное учебное пособие по синтезу различных систем передачи информации, предназначенное для аспирантов и квалифицированных радиоинженеров.

В данном первом томе, содержащем в оригинале 7 глав, подробно рассмотрены задачи обнаружения, различения и оценки параметров сигналов (гл. 2 и 4), а также задачи линейной фильтрации сообщений (гл. 5 и 6). Остальные три главы являются вспомогательными.

Основным содержанием второго тома является обстоятельное рассмотрение теоретических и прикладных вопросов формирования и опти-

мального приема сигналов с нелинейными видами модуляции (частотной и фазовой). Предполагается, что в третьем томе будет изложена теория оптимального приема гауссовых сигналов в гауссовых шумах, а также будут подробно рассмотрены основные проблемы радио- и гидролокации. В четвертом томе планируется рассмотреть вопросы обработки пространственно-временных сигналов при помощи антенных решеток применительно к гидролокационным и сейсмическим системам.

В основных главах первого тома, помимо необходимых теоретических сведений, содержится подробное рассмотрение большого числа разнообразных практически важных примеров возрастающей степени сложности из области радиосвязи, радио- и гидролокации, а также других систем передачи информации. Полученные решения подвергнуты всестороннему физическому обсуждению и во многих случаях доведены до количественных результатов, представленных в виде многочисленных графиков.

В конце каждой главы приведены краткие выводы (в которых часто указываются нерешенные перспективные проблемы) и сформулировано большое число различных по сложности задач, предназначенных для самостоятельного решения.

При переводе первого тома были внесены некоторые изменения. Поскольку предполагается русское издание второго тома, из небольшой по объему гл. 7 были исключены § 7.1, 7.2, где подведены итоги первого тома и дан проспект второго тома; сохранен, но вынесен в приложение § 7.3, содержащий библиографический обзор по важным теоретическим вопросам, которые лишь упомянуты в первом томе и не получают дальнейшего освещения во втором. Исключено также приложение, содержащее принятую автором программу лекционного курса.

Наряду с этими сокращениями, дополнительно включены решения по некоторым наиболее сложным задачам. Эти решения заимствованы из методического пособия Г. Ван Триса и Д. Гольдфрейна, изданного литографским способом в виде отдельной небольшой книги (Solution Manual for Selected Problems, John Wiley, 1968).

Следует отметить, что настоящая книга не претендует на исчерпывающую полноту освещения всех проблем по оптимальным методам радиоприема. В частности, в ней не отражен большой цикл отечественных работ по оптимальной нелинейной фильтрации сообщений.

Однако обстоятельное изложение теоретических сведений и широкое обращение автора к рассмотрению разнообразных конкретных практических задач делают эту книгу весьма ценным дополнением к ряду книг и монографий, изданных в Советском Союзе по оптимальным методам радиоприема.

Можно надеяться, что книга представит большой интерес для широкого круга научных работников, аспирантов и инженеров, прикасающихся в своей деятельности с научно-прикладными статистическими задачами.

Перевод книги выполнен В. В. Липьяйненом.

Предисловие к английскому изданию

Разделы теории обнаружения и оценок, которые мы будем изучать в данной книге, представляют сочетание классического метода статистического анализа и вероятностного подхода к работе систем связи, радиолокации, гидролокации и других современных систем обработки информации, основанного на рассмотрении сигналов как случайных процессов.

Двумя основными разделами статистического анализа являются теория решений и теория оценок. В первом случае мы наблюдаем некоторую выходную величину, имеющую случайный характер, и решаем, какая из двух возможных причин ее обусловила. Задачи этого типа изучались в середине XVIII века Томасом Байесом [1]. В теории оценок выходная величина связана со значением некоторого наблюдаемого нами параметра, и мы пытаемся оценить величину этого параметра. Работы в указанной области были опубликованы Лежандром [2] и Гауссом [3] в начале XIX века. Значительный вклад в классическую теорию, которую мы используем в качестве исходной, был внесен Фишером [4], а также Нейманом и Пирсоном [5] более 30 лет назад. В 1941 г. Колмогоров [6] и в 1942 г. Винер [7] применили статистический метод к решению задачи оптимальной линейной фильтрации. С той поры применение статистических методов к решению задач синтеза и анализа систем всех типов развивалось весьма быстро. Применение указанных методов и вытекающие отсюда выводы являются предметом настоящей книги.

Данный и последующий том («Теория обнаружения, оценок и нелинейной модуляции») основаны на заметках и конспектах, подготовленных для одноименного курса, читаемого в Массачусетском технологическом институте (МТИ) аспирантам старшей группы. Первоначальный интерес к данной теме появился у меня в результате моей исследовательской деятельности в области теории аналоговой модуляции. Предварительный вариант материала, посвященного теории модуляции, использовался в качестве учебного пособия для летнего курса, прочитанного в МТИ в 1964 г. Оказалось, что наша точка зрения на теорию модуляции лучше воспринимается аудиторией, имеющей ясное понимание современной теории обнаружения и оценок. В тот период не имелось подходящего учебного пособия, которое охватывало бы весь интересующий материал и выделяло бы те моменты, которые казались мне наиболее существенными. Поэтому я приступил к написанию конспекта. Было совершенно ясно, что для того, чтобы приподнести этот материал аспирантам за ограниченное время, необходимо

выработать единый подход ко всем трем названным разделам — теории обнаружения, теории оценок и теории модуляции — и развить основные связывающие их идеи. По мере работы над книгой ее объем увеличивался, пока материал, который первоначально мыслился в качестве исходного для изложения теории модуляции, не занял все содержание первого тома. К изложению оригинального материала по теории модуляции мы приступаем лишь в начале второго тома. В совокупности оба тома дают единое изложение всех трех разделов и их применение к решению многих важных физических задач.

В течение последних трех лет в своем курсе я последовательно использовал пересмотренные варианты текста. Аудитория обычно состоит из 40—50 аспирантов, закончивших аспирантский курс по теории случайных процессов, охватывающий большую часть книги Давенпорта и Рута [8]. Как правило, они имеют хорошее понимание теории случайных процессов и достаточные навыки, необходимые для самостоятельного решения задач. Кроме того, многие из них сами непосредственно заинтересованы в проведении исследовательской (диссертационной) работы в этой общей или тесно с ней связанных областях. Эта заинтересованность создает сильный стимул, который я и использую, трубя, чтобы аспиранты разрабатывали в порядке решения задач многие важные идеи. Именно для этой аудитории рассчитана в первую очередь данная книга. В приложении дается развернутая программа всего учебного курса.

С другой стороны, многие уже работающие инженеры имеют дело с системами, которые проектировались или должны были проектироваться и анализироваться при помощи методов, развитых в данной книге. Я попытался сделать книгу полезной и для них. Один из первых вариантов книги успешно использовался в качестве учебного пособия в системе теоретической подготовки дипломированных инженеров на предприятиях.

С точки зрения специальной предварительной теоретической подготовки для работы с данной книгой необходим лишь весьма ограниченный материал, выходящий за рамки обычного курса. Предполагается, что слушатели знакомы с элементарной теорией вероятностей и вторыми моментами случайных процессов. Было бы полезным, хотя и совершенно не обязательным, некоторое знакомство с теорией матриц и линейной алгеброй. Уровень математической строгости книги невысок, хотя в большинстве разделов полученные результаты могут быть доказаны и строго, если мы будем просто более скрупулезны в наших выкладках. Мы намеренно приняли такой подход с тем, чтобы обилием деталей не обременять существенные идеи и сделать материал удобочитаемым для той инженерной аудитории, которая найдет его полезным. К счастью, почти во всех случаях мы можем удостовериться, что наши выводы являются интуитивно логичными. Следует заметить, что эта способность проверять выводы интуитивно была бы необходима, даже если бы выкладки были весьма строгими, поскольку наша конечная цель — получить ответ, который соответствует некоторой рассматриваемой физической системе. Не представляет труда найти физические задачи, в которых правдоподобная математическая модель и корректные

математические методы приводят к нереалистичному решению исходной задачи.

Наш курс имеет ряд особенностей, которые, пожалуй, стоит упомянуть. Как правило, мы рассматриваем ту или иную задачу достаточно подробно. Зачастую она рассматривается нами под несколькими различными углами зрения с тем, чтобы достигнуть лучшего понимания смысла полученного результата. Обучение студентов ряду методов и приемов помогает им быть более гибкими в подходе к новым задачам.

Вторая особенность заключается в том, что для полного понимания материала читателю совершенно необходимо самостоятельно решать задачи. При изложении курса и материала книги мы делаем упор на развитие способности ставить и разрешать задачи. В конце каждой главы приводятся задачи, по своей сложности и значимости варьирующиеся от довольно тривиальных до таких, которые существенно развивают материал основного текста. Во многих случаях подобные задачи равноценны издаваемым в наше время журнальным статьям. Только путем отработки достаточного их количества становится возможным оценить значение и общность полученных результатов.

Решения к отдельным задачам представляются по просьбе, а в распоряжении преподавателей, ведущих данный курс, имеется разработка, содержащая решения примерно третьей части приведенных в книге задач. Мы постоянно занимаемся разработкой новых задач по ходу учебного процесса и будем высылать их всем, кто использует нашу книгу в качестве учебного пособия.

Третьей особенностью книги является большое количество блок-схем, графиков и других иллюстраций. Графики включены нами потому, что большинству инженеров (включая и автора) они более привычны, чем соответствующие уравнения.

Одной из всегда встречающихся трудностей является количество символов, необходимых для обозначения широкого класса понятий и величин. Мы стремились выбирать обозначения логически обоснованно и с таким расчетом, чтобы они по возможности были mnemonicскими. Все обозначения сведены в единый список, помещенный в конце книги. Мы стремились также дать возможно более полную библиографию и отдать должное вкладу других исследователей.

В своей работе над книгой я пользовался многосторонней помощью ряда специалистов и считаю своим приятным долгом выразить здесь им свою признательность. Профессора Давенпорт и Зиберт оказывали мне постоянную поддержку и приняли участие в обсуждении различных глав. Профессора Говерстен и Снайдер — преподаватели МТИ, а также Коллинз, Баггерер и Остин — мои докторанты, внимательно прочли и критически обсудили различные главы книги. Их замечания и предложения заметно способствовали улучшению рукописи. Баггереру и Коллинзу, кроме того, принадлежит ряд задач в различных главах, и Баггерер разработал программы вычислений, необходимых для получения большинства графических результатов. Лейтенант Райт прочел и сделал замечания по второй главе. Фраско и Гольдфейн, два моих ассистента по кафедре, проработали все задачи, приведенные

в книге. Д-р Юдкин из Лаборатории Линкольна прочел всю рукопись и внес ряд важных критических замечаний. Помимо этого разные аспиранты, слушавшие данный курс, внесли предложения, учтенные мной в окончательной редакции рукописи, большую часть которой перепечатала г-жа Силз. Ее терпеливому отношению к бесчисленным изменениям и поправкам я искренне признателен. Несколько других секретарей, в том числе г-жи Хрбек, Бауэр и Торторичи, отпечатали разделы различных вариантов рукописи.

Как указывалось выше, предлагаемые вниманию читателей книги явились результатом моих исследовательских интересов. Эти исследования представляют собой непрерывный процесс, и я буду счастлив обмениваться результатами нашей текущей работы со специалистами, работающими в данной области, на регулярной и взаимной основе. Мои ранние работы в области теории модуляции финансировались лабораторией Линкольна, где я сотрудничал в летние периоды и являлся консультантом в группах, руководимых Шерманом и Рейффеном. Мои исследования в МТИ частично финансировались Вооруженными силами и НАСА через Исследовательскую лабораторию электроники. Этой поддержке я весьма признателен.

*Кембридж, шт. Массачусетс,
октябрь 1967 г.*

ГАРРИ Л. ВАН ТРИС

Л и т е р а т у р а

1. B a y e s T h o m a s. An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. Phil. Trans., 1764, v. 53, p. 370—418.
2. L e g e n d r e A. M. Nouvelles Méthodes pour La Détermination ces Orbites des Comètes. Paris, 1806.
3. G a u s s K. F. Theory of Motion of the Heavenly Bodies Moving About the Sun in Conic Sections. Reprinted by Dover, New York, 1963.
4. F i s h e r R. A. Theory of Statistical Estimation. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1925, v. 22, p. 700.
5. N e y m a n J., P e a r s o n E. S. On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1933, v. A231, p. 289.
6. К о л м о г о р о в А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей. «Известия АН СССР», сер. математическая, 1941, т. 5, № 1.
7. W i e n e r N. Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series. Tech. Press of MIT and Wiley, New York, 1949 (первоначально опубликован в виде секретного отчета в 1942).
8. Д а в е н п о р т В. Б., Р у т В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. Пер. с англ., под ред. Р. Л. Добрушина. Изд-во иностранной литературы, 1960.

1. Введение

В предлагаемой двухтомной монографии мы будем изучать три раздела статистической теории, именуемые соответственно теорией обнаружения, теорией оценок и теорией модуляции. Цель данного курса — изложить указанные разделы на общей математической основе и показать, как полученными результатами можно пользоваться при решении широкого круга практических задач.

В этой главе мы дадим краткий обзор содержания курса в тематическом, методологическом и хронологическом аспектах. При изложении тематического плана делается попытка дать качественную характеристику каждого из названных разделов путем рассмотрения некоторых типичных задач. Излагая методологический план курса, мы рассматриваем различные подходы к решению тех или иных задач. И, наконец, характеризуя курс в хронологическом плане, мы объясняем порядок расположения материала обоих томов.

1.1. Тематический план монографии

Наиболее легкий путь для объяснения того, что понимается под теорией обнаружения, — это рассмотреть несколько физических ситуаций, которые приводят к задачам теории обнаружения.

На рис. 1.1 изображена простейшая цифровая (дискретная) система связи. Источник сообщений каждые T секунд выдает двоичную цифру. Наша цель — передать эту последовательность цифр в какой-либо другой пункт. Каким каналом мы будем располагать для передачи этой последовательности, зависит от конкретных условий. Как правило, это может быть проводной, радио- или акустический канал.

В качестве примера рассмотрим радиоканал. Чтобы передать информацию, нужно привести ее к виду, пригодному для распространения по заданному каналу. Наиболее простой и непосредственный метод решения этой задачи — построение устройства, генерирующего в течение T секунд синусоидальное колебание

$$s_1(t) = \sin \omega_1 t, \quad (1)$$

если на предыдущем интервале времени источник выдал «единицу», или синусоидальное колебание другой частоты

$$s_0(t) = \sin \omega_0 t, \quad (2)$$

если на предыдущем интервале времени источник выдал «нуль». Частоты ω_1 и ω_0 выбираются так, чтобы сигналы $s_1(t)$ и $s_0(t)$ хорошо

проходили по данному конкретному радиоканалу. Выходные сигналы устройства поступают в антенну и далее передаются по каналу. Типичные последовательности символов на выходе источника и элементов передаваемого сигнала показаны на рис. 1.2.

В случае канала простейшего типа последовательность сигналов поступает на приемную антенну ослабленной, но по существу неискаженной.



Рис. 1.1. Цифровая система связи.

Для обработки принимаемого сигнала он пропускается через антенну и несколько каскадов усиления на принимаемой частоте, где к последовательности сообщения добавляется тепловой шум $n(t)$.

Таким образом, на любом интервале времени длительностью T секунд имеется колебание

$$r(t) = s_1(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

если был передан сигнал $s_1(t)$, и

$$r(t) = s_0(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

если был передан сигнал $s_0(t)$.

Итак, мы подошли к ситуации, когда нам необходимо решить, какой из двух возможных сигналов был передан. Устройство, которое осуществляет эту процедуру, называется решающим устройством (схе-

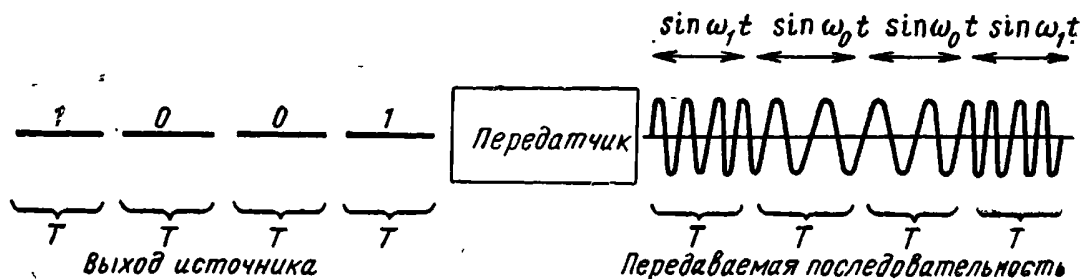


Рис. 1.2. Типичные последовательности элементарных сигналов.

мой). Оно наблюдает колебание $r(t)$ и согласно некоторой системе правил пытается угадать, что было передано: $s_1(t)$ или $s_0(t)$. Это эквивалентно процессу определения того, что было на выходе источника в течение соответствующего интервала времени. Построение и определение характеристик такого устройства мы относим к числу проблем теории обнаружения. В приведенном случае единственным источником ошибок при вынесении решения является аддитивный шум. Если бы он отсутствовал, то входной сигнал был бы полностью известным и мы

могли бы принимать решения безошибочно. Задача такого типа соответствует случаю *известного сигнала на фоне шума* и является простейшей среди интересующих нас проблем теории обнаружения.

Примером более сложной задачи обнаружения может служить случай, изображенный на рис. 1.3. Генераторы, которые в предыдущем примере использовались для создания $s_1(t)$ и $s_0(t)$, имеют дрейф фазы.

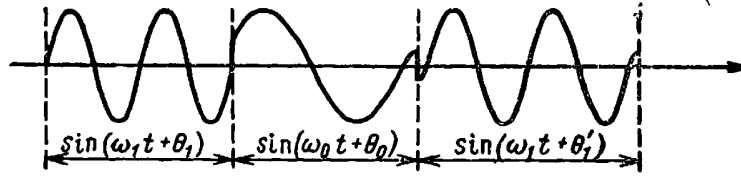


Рис. 1.3. Последовательность с фазовыми сдвигами.

Поэтому на заданном T -секундном интервале времени принимаемый сигнал, соответствующий «единице», можно записать в виде

$$r(t) = \sin(\omega_1 t + \theta_1) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

а соответствующий «нулю» — в виде

$$r(t) = \sin(\omega_0 t + \theta_0) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

где θ_1 и θ_0 — неизвестные постоянные фазовые углы. Здесь даже в отсутствие шума входной сигнал оказывается известным неполностью. В практической системе в состав приемника может входить вспомогательное оборудование для измерения фазы генератора. Если фаза меняется достаточно медленно, то, как мы убедимся позднее, возможно ее практически точное измерение. Если указанное условие выполняется, то данная задача ничем не отличается от предыдущей. Однако, если измерение не вполне точно, то наша модель должна учитывать неопределенность сигнала.

Аналогичная задача возникает в радиолокации и в гидроакустике. Обычная РЛС излучает на некоторой частоте ω_c прямоугольный импульс

$$s_i(t) = \sin \omega_c t, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7)$$

При наличии цели импульс будет отражен. Но даже простейшая цель вызывает ослабление и сдвиг фазы зондирующего сигнала. Поэтому сигнал, поступающий на обработку в рассматриваемый интервал времени, при наличии цели имеет вид

$$r(t) = \begin{cases} V_r \sin[\omega_c(t - \tau) + \theta_r] + n(t), & \tau \leq t \leq \tau + T, \\ n(t), & 0 \leq t < \tau, \quad \tau + T < t < \infty, \end{cases} \quad (8)$$

а в отсутствие цели —

$$r(t) = n(t), \quad 0 \leq t < \infty. \quad (9)$$

Даже в отсутствие шумов сигнал содержит три неизвестных величины: амплитуду V_r , фазу θ_r и время τ распространения сигнала до цели и обратно.