

Н.А. Глаголев

Теоретические основы номографии

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н.А. Глаголев**
Теоретические основы номографии / Н.А. Глаголев – М.: Книга по Требованию, 2021. – 258 с.

ISBN 978-5-458-56863-0

ISBN 978-5-458-56863-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

§ 4. Уравнения высших порядков.

1. Уравнения 4-го порядка; канонические формы 107. — 2. Общее уравнение 4-го порядка; приведения к каноническому виду 112. — 3. Прямой метод построения номограмм уравнения 4-го порядка 117. — 4. Уравнения 5-го и 6-го порядка 118.

Глава IV.

БЕЗДЕТЕРМИНАНТНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ НОМОГРАММ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК.

§ 1. Метод параллельных координат Шаля.

1. Постановка задачи 123. — 2. Параллельные координаты и их применение 123. — 3. Функциональные шкалы на параллельных осях; сжатие кривой в точку 130. — 4. Графическое изображение уравнений с тремя переменными; простейшие виды номограмм из выравненных точек 132. — 5. Общая форма номограмм из выравненных точек 136.

§ 2. Метод полярного преобразования абаксов Декарта и Массо.

1. Основы метода 138. — 2. Примеры полярного преобразования абаксов Декарта и Массо 139. — 3. Общая форма применения полярного метода 143.

§ 3. Элементарный метод построения номограмм из выравненных точек.

1. Постановка задачи 145. — 2. Номограммы с параллельными шкалами 145. — 3. Радиантная номограмма из выравненных точек 140. — 4. Z-номограмма 152. — 5. Треугольная номограмма умножения 154. — 6. Номограмма с криволинейной опорой 155.

Глава V.

НОМОГРАММЫ УРАВНЕНИЙ СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ.

§ 1. Сетчатые номограммы уравнений со многими переменными.

1. Составной декартов абакс 160. — 2. Общий метод соединения сетчатых номограмм; линии связи 164. — 3. Аналитическое условие разрешимости составной номограммой уравнения с четырьмя переменными 167.

§ 2. Составные номограммы из выравненных точек для уравнений со многими переменными.

1. Общие принципы построения составных номограмм; метод двойного выравнивания 170. — 2. Уравнение вида $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0$ 175. — 3. Уравнение вида $\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} + \frac{1}{\varphi_3} = \frac{1}{\varphi_4}$ 179. — 4. Уравнение вида $\frac{f_1}{f_2} = \frac{f_3}{f_4}$ 180. — 5. Уравнение вида $f_1 + f_2 = \frac{f_3}{f_4}$ 182. — 6. Уравнение вида $\frac{f_1}{f_2} + \frac{1}{f_3} = \frac{1}{f_4}$ 183. — 7. Уравнение вида $f_1 f_2 + f_3 f_4 = \varphi_1$ 183. — 8. Уравнение вида $f_1 + f_2 \varphi_1 = f_3 + f_4 \varphi_3$ 183. — 9. Уравнение вида $\frac{f_1}{1} = \frac{f_3 + f_4}{1 - f_1 f_4}$ 183. — 10. Общая форма уравнения с четырьмя переменными, разрешимого методом двойного выравнивания с прямолинейной немой шкалой 186.

§ 3. Неразложимые номограммы со многими переменными.

1. Постановка задачи 188. — 2. Бинарные поля и их применение 188. — 3. Бинарные шкалы 196.

Глава VI.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НОМОГРАФИЧЕСКОГО АБАКА.

§ 1. Общая форма преобразований, которые допускает номограмма основные свойства коллинеаций.

1. Характер точечного преобразования, допускаемого номограммой 198. — 2. Коллинеарная зависимость между формулами детерминантного метода, метода параллельных координат и полярного 201. — 3. Общие свойства коллинеарных преобразований 203. — 4. Двойные точки коллинеарного преобразования; главные типы коллинеаций 209.

- § 2. Применение коллинеарного преобразования плоскости к изысканию наилучшей формы номографического абак.
1. Аналитический метод коллинеарного преобразования номограммы 217. — 2. Графический метод выполнения коллинеарного преобразования номограммы 223. — 3. Экспериментальный метод определения коллинеации, улучшающей форму данной номограммы 224.

ГЛАВА VII.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВИДЫ НОМОГРАФИЧЕСКОГО АБАКА.

§ 1. Циркулярные номограммы.

1. Номограммы из равноудаленных точек проф. Н. М. Герсеванова 228. — 2. Номограммы из равноудаленных точек для уравнений со многими переменными 230. — 3. Обобщенные циркулярные номограммы Люкей-Маргулиса 231.

§ 2. Гексагональный абак.

1. Первоначальная форма гексагональных номограмм 233. — 2. Элементарный метод построения гексагональных номограмм 234. — 3. Гексагональный абак для уравнений со многими переменными 235.

ПРИЛОЖЕНИЯ.

1. Применение логарифмической сетки к решению алгебраических уравнений 238. — 2. Метод критических точек в применении к уравнениям 3-го порядка 242 — 3. Номограммы Годсела с круговыми индексами 245. — 4. Номограммы Сиглера и их обобщение 247.

ПЕРЕЧЕНЬ НОМОГРАММ 248.

УКАЗАТЕЛЬ 250.

ВВЕДЕНИЕ.

Задачи номографии и исторический очерк ее развития.

Номография представляет собой ту область математики, которая дает теорию построений особого рода чертежей, служащих для разрешения различного рода уравнений.

Слово номография греческое: νόμος — закон, γράφω — пишу. Название это объясняется тем, что каждая техническая формула, для которой строится номограмма, выражает обычно закон течения какого-либо процесса или закон, по которому изменяются различные переменные величины, входящие в данный технический расчет. Номограмма является графическим изображением этого закона. Отсюда и название: номография — изображение закона. Это наименование было установлено в 1890 г. Международным математическим конгрессом в Париже.

Существенное отличие номографии от других графических методов расчета и графической алгебры состоит в следующем.

Графическая алгебра и графическое исчисление вообще имеют задачей создать геометрические построения, эквивалентные различным аналитическим операциям: графическое умножение, графическое возведение в степень, графическое решение уравнений, графическое интегрирование и т. д. представляют собой систему построений, могущих заменить с известным приближением арифметическое умножение и возведение в степень, алгебраическое решение уравнений, аналитическое интегрирование и т. д. Выполнение этих операций требует каждый раз последовательности построений, приводящих в результате к графическому определению искомой величины.

Номография имеет задачей построение чертежей, эквивалентных данным формулам, пользование которыми уже не требует никаких дополнительных построений. Искомая величина отыскивается непосредственно на самой номограмме путем прикладывания линейки к определенным ее точкам или другим столь же простым приемом. Номограмма является, таким образом, готовым инструментом для расчета по данной формуле. Основным типом равенства, для которого строится номограмма является уравнение с тремя переменными $f(x, y, z) = 0$, по отношению к которому и решаются основные задачи номографии. Но особенно ценным свойством номографических методов является возможность распространения их на уравнения с большим числом переменных.

Первые попытки графического решения аналитических задач в форме, близкой к современным номографическим построениям, относятся к самому концу XVIII в.

В 1795 г. была опубликована „Линейная арифметика“ Пушэ (Rouchet), в которой давались графические приемы выполнения арифметических действий. Пушэ дал первую номограмму умножения в форме семейства равносторонних гипербол с общими асимптотами. Эти номограммы открыли собою первый период в развитии номографии. В этот период, продолжавшийся до начала 40-х годов прошлого века, номография не обогащалась новыми идеями и само распространение ее было крайне ограниченным. В 1843 г. появился замечательный мемуар французского инженера Лалана (Lalanne), в котором он дал блестящее применение старой идее Гунтера (Gunter, 1624 г.) изображения логарифмов чисел в виде прямолинейных отрезков, отложенных на одной прямой от одной и той же точки и образующих в своей совокупности логарифмическую шкалу. Вводя логарифмические шкалы на осях декартовой системы координат, Лалан получает первую функциональную сетку — логарифмическую. На этой сетке всякая зависимость между двумя перемен-

ными x и y , которая устанавливает линейное соотношение между их логарифмами, изображается прямой линией. Применяв идею логарифмической сетки к номограмме умножения, данной Пушэ, Лалан получил такое преобразование его номограммы, при котором гиперболы перешли в прямые линии. Этому преобразованию он дал сохранившееся до настоящего времени название „анаморфозы“ (см. гл. II, § 1, п. 3). Он же ввел термин „абак“ для сетчатых номограмм, построенных на декартовой координатной сетке, к числу которых принадлежала и номограмма Пушэ. Анаморфоза Лалана открыла возможность изображать в простой графической форме довольно сложные аналитические зависимости. Мемуар Лалана был представлен Французской академии наук с отзывом Коши (Cauchy), который указал, что анаморфоза Лалана применима к широкому классу уравнений с тремя переменными (x, y, z), имеющих форму: $f_1(z)\varphi(x) + f_2(z)\psi(y) + f_3(z) = 0$. Эти уравнения получили в настоящее время название уравнений типа Коши (см. гл. III, § 4, гл. IV, § 3). С этого времени применение графических методов расчетов стало более распространенным, хотя все еще весьма ограниченным. Типы абак были весьма однообразны и сводились к семейству прямых или кругов, построенных на декартовой сетке, а иногда к семейству более сложных линий, которые не удавалось анаморфозой превратить в прямые линии или круги.

Но несмотря на это, анаморфоза Лалана открыла собою новый период в развитии номографии, продолжавшийся до начала 80-х годов. В этот период задачи номографии получили новую постановку и применения ее значительно расширились.

В этот же период были поставлены и первые задачи теоретической номографии; так в виду возможности анаморфозы номограмм уравнений типа Коши возник вопрос о возможности приведения общего уравнения с тремя переменными $F(x, y, z) = 0$ к виду, указанному Коши, и об изыскании общего метода такого приведения. Эта задача для частного вида уравнений Коши была разрешена Сен-Робером (St. Robert) в 1871 г. Общее решение было дано Массо (Massau, 1884 г.).

Весь период с начала 40-х до начала 80-х годов можно характеризовать, как период максимального использования анаморфозы Лалана, и в то же время, как период нащупывания новых методов номографических изображений.

Задачи техники все настойчивее требовали отыскания более простых и удобных методов графических расчетов, и с самого начала 40-х годов стали делаться попытки замены абак шкалами, и для отдельных частных задач строились номограммы того типа, который был впоследствии назван Оканем (D'Ocagne) „номограммами из выравненных точек“. Первым прообразом такой номограммы являлась графическая таблица умножения Мебиуса (Möbius), построенная в 1841 г. ¹⁾. Рассматривая натуральный ряд чисел, Мебиус составляет таблицу чисел на квадратной сетке, помещая каждое число в отдельную клетку: верхний горизонтальный и левый вертикальный ряд составляют числа натурального ряда: вторая строка занята числами 1 без пропусков клеток; в третьей строке стоит число 2 с пропуском одной клетки; в четвертой — число 3 с пропуском двух клеток и т. д., как представлено в прилагаемом чертеже (черт. 1).

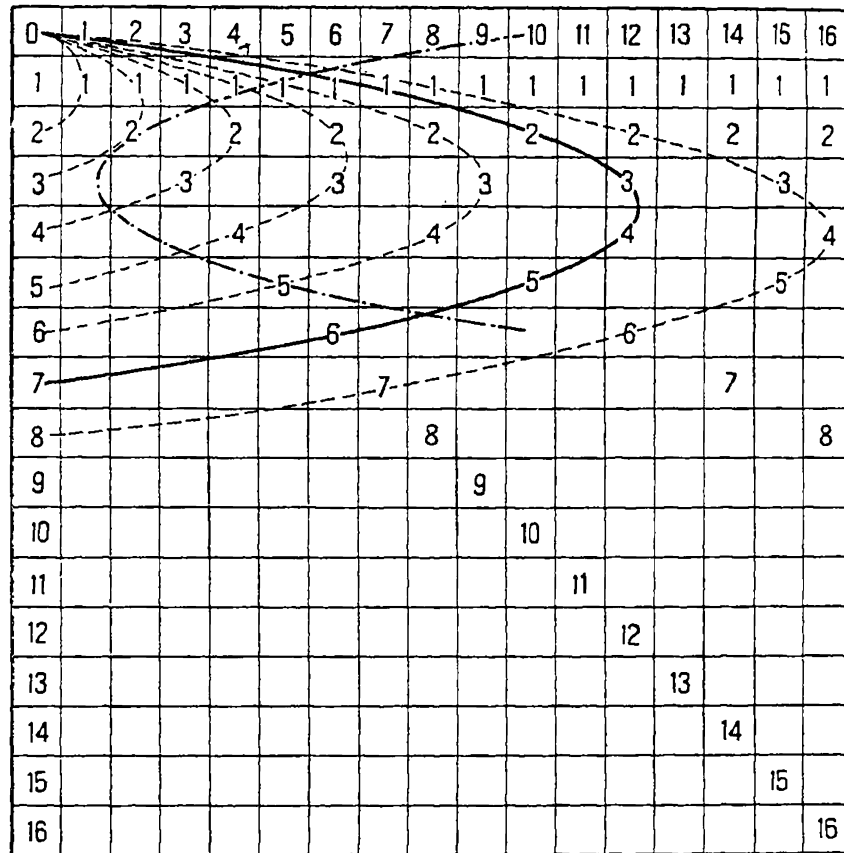
Легко установить следующие свойства этой таблицы: если, понимая под местом каждого числа таблицы центр той клетки, в которой стоит это число, соединить прямой линией любое число a верхнего натурального ряда с любой единицей 2-го горизонтального ряда, то на этой прямой расположатся все множители числа a ; любые два дополнительных множителя α и β числа a ($\alpha\beta = a$) лежат одновременно на прямой, проходящей через a и на параболе параметра 1, с горизонтальной осью, проходящей через начало таблицы, т. е. точку 0; каждая такая парабола проходит последовательно через все числа натурального ряда.

Это последнее свойство таблицы дает возможность пользоваться параболой для умножения чисел натурального ряда. Взяв на параболе два числа и соединяя их прямой линией, продолжаем эту прямую до пересечения с верхней горизон-

¹⁾ Möbius, Geometrische Eigenschaften einer Factorentafel, „Crelle's Journal für reine und angewandte Math.“, Bd. 28, 1841, стр. 276—284.

тальной строкой таблицы, на которой и читаем ответ (см. на чертеже пример: $5 \cdot 3 = 15$). Эта парабола Мебиуса вместе с верхней горизонтальной строкой таблицы представляет собою не что иное, как номограмму из выравненных точек второго жанра уравнения $xu = z$ (см. гл. III, § 1). Мебиус сам указывает на возможность использования его конфигурации для выполнения умножения чисел¹⁾.

Он указывает также, что для графического выполнения умножения чисел можно взять вместо параболы две прямые линии, и дает полное построение номограммы умножения нулевого жанра в форме, в точности совпадающей с той, которая впоследствии была самостоятельно получена Оканем.



Черт. 1.

При этом Мебиус впервые вводит в обиход построений *проективные шкалы*.

Из рассмотрения той же таблицы Мебиус впервые приходит к номограмме с криволинейным индексом (параболическим). Он показывает, что все числа его таблицы расположены на прямых, выходящих из точки 0. Все числа каждой прямой образуют натуральную последовательность и обладают тем свойством, что если через какие-либо два числа a и b , лежащих на этой прямой, провести параболу параметра 1 с осью, параллельной главному горизонтальному ряду, то эта парабола пересечет верхний горизонтальный ряд в точке, где стоит произведение взятых чисел, т. е. число ab (см. на чертеже пример: $2 \cdot 5 = 10$). Таким образом при помощи поступательного перемещения параболы с параметром 1 и горизонтальной осью можно также получать на таблице Мебиуса произведение любых двух чисел натурального ряда.

¹⁾ „Man könnte hiernach eine Parabel in Verbindung mit einer Geraden, beide auf die oben beschriebene Weise eingetheilt, auch als Multiplicationsmaschine benutzen“. (Möbius, loc. cit).

Если нанести взятую параболу на целлюлоидный прозрачный транспарант и оставить из наклонных натуральных рядов лишь один, то таблица Мебиуса представляет собою номограмму, принадлежащую к одному из новейших современных нам типов номограмм с подвижным транспарантом.

Чтобы сделать таблицу Мебиуса вполне действенным вычислительным инструментом, оставалось лишь нанести промежуточные деления на прямолинейной шкале и на одной из парабол, исходящих из начала. Это сделать было особенно просто в виду равномерности прямолинейной шкалы. Но это никем сделано не было и таблица Мебиуса осталась без дальнейшего развития и без номографических приложений. Инженеры продолжали пользоваться номограммой Лалана и абаком Декарта, не зная, что уже зародился новый тип номограмм, впоследствии вытеснивший старые приемы номографирования и ставший основным в современной номографии.

Судьба таблицы Мебиуса несколько напоминает судьбу таблицы Штифеля, приведшей к созданию логарифмов. Таблица Штифеля, относящаяся к середине XVI в. (1545 г.), состояла из двух прогрессий: арифметической — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, и геометрической $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$, подписанных одна под другой:

$$\begin{array}{l} 1|8, 1|4, 1|2, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \\ -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{array}$$

Нижняя строка дает возможность весьма просто находить произведения чисел верхней строки и частные от деления одного числа на другое: чтобы перемножить два числа верхней строки мы складываем стоящие под ними числа в нижней строке и под их суммой читаем в верхней строке искомое произведение.

Так, чтобы перемножить 4 и 16, складываем стоящие под ними числа 2 и 4, и под числом 6 читаем искомое произведение 64. Таким же путем получим частное от деления двух чисел верхнего ряда при помощи вычитания стоящих под ними чисел нижнего ряда. Таблица Штифеля представляла собою первую таблицу логарифмов: каждое число нижнего ряда является логарифмом стоящего над ним числа верхнего ряда.

Основанием этой системы логарифмов служит число 2. Чтобы сделать таблицу Штифеля пригодной для выполнения умножения любых чисел, необходимо было преобразовать ее так, чтобы числа верхнего ряда образовали достаточно густую последовательность, т. е. чтобы разность между двумя последовательными числами верхнего ряда была достаточно мала. Это не было сделано во времена Штифеля, ибо не было еще достаточно удобного алгоритма, который позволил бы разрешить эту задачу: десятичные дроби еще не были в то время известны. Лишь полвека спустя Бюрги и Непер дали блестящее разрешение этой задачи. Оба они добились уплотнения чисел верхнего ряда тем, что выбирали за знаменатель геометрической прогрессии числа, близкие к единице. Таким путем первоначальная таблица Штифеля развилась в мощное орудие вычислительной техники и впоследствии дала науке богатую теорию логарифмических и показательных функций. Таблица Мебиуса могла бы сыграть аналогичную роль в развитии графических методов расчетов.

Но если непосредственному развитию идеи Штифеля мешало отсутствие десятичных дробей, то распространению номограмм Мебиуса помешали причины иного порядка. Весь математический аппарат, необходимый для превращения таблицы Мебиуса в законченную весьма удобную номограмму, был налицо, и тем не менее номограммы Мебиуса не только не получили применения, но остались неизвестными, хотя они могли оказать инженерам едва ли не большую помощь в расчетах, чем номограммы Лалана.

Объяснение этого явления надо искать в том факте, что геометры, занимавшиеся абстрактной математической теорией, не имели непосредственной связи с работой инженеров-практиков, а эти последние не были достаточно знакомы с далекой для них областью проективной геометрии. Но идеи Мебиуса получили разви-

тие в совершенно ином направлении, именно в направлении формального построения чисто геометрических (проективных) операций, обладающих свойствами арифметических действий над действительными числами. Штаудт (Staudt) в 1847 г. опубликовал свои „Beiträge zur Geometrie der Lage“, где он поставил и разрешил задачу нахождения таких проективно определяемых объектов („вурфы“), над которыми возможно установить проективные операции, эквивалентные арифметическим действиям сложению и умножению. По существу это было создание особой „проективной арифметики“, не опирающейся на понятие числа, как средства измерения, и дающей действия над числами без самих чисел. Идеи Штаудта имели глубочайший принципиальный интерес, представляя во всей своей совокупности первую попытку выделить из общей системы геометрических аксиом аксиоматическую базу проективной геометрии. Штаудт вкладывал, таким образом, в свою теорию глубоко принципиальное содержание, отнюдь не связывая ее с практикой технических расчетов. Между тем построения Штаудта приводили уже к вполне законченным формам номограмм нулевого и второго жанра для канонических уравнений 3-го порядка (см. гл. III, § 2). Шкалы его номограмм имели уже и промежуточные деления и могли непосредственно прилагаться к производству технических расчетов. Но судьба этих номограмм была еще печальнее, чем номограмм Мебиуса. Если номограммы Мебиуса не получили непосредственных приложений, то все же самим Мебиусом была указана возможность их практического применения, и один из основоположников современной номографии, французский номограф Соро (Soreau) прямо называет Мебиуса автором первых номограмм из выравненных точек. Номограммы же Штаудта были вовсе не замечены. Сам Штаудт не интересовался практическими применениями своих построений и нигде в научной литературе мы не находим упоминания о номографическом значении его построений ¹⁾.

Номограммы Штаудта были полвека спустя самостоятельно построены каирским номографом Кларком (Clark) ²⁾.

Работы Мебиуса и Штаудта не оказали, таким образом, никакого влияния на общий ход развития номографии. Но в этот же период от 40-х до 80-х годов прошлого века можно отметить немало попыток среди самих инженеров найти новые методы графических расчетов и заменить абак шкалами. Так в 1869 г. инженеры Гангилье и Куттер построили прекрасную номограмму из выравненных точек для расчета скорости течения воды в реках и каналах. Несколько позднее инженер Сиглер (Siegler) построил для решения уравнения вида $f_1(x) \cdot f_2(y) = f_3^2(z)$ номограмму, основанную на свойствах высоты прямоугольного треугольника и состоящую из трех шкал, из которых две наносятся на одной прямой от одного начала в двух противоположных направлениях, а третья — от того же начала на прямой, перпендикулярной к первой. Ответ на номограмме прочитывался при помощи угольника, вершина которого помещалась в соответствующей точке третьей шкалы.

Номограммы этого нового типа строились большей частью довольно громоздкими, элементарными приемами, часто случайно найденными и не укладывавшимися в какую-либо общую систему. При таком положении дела новые номограммы не имели шансов на распространение. Декартов абак продолжал сохранять свое преимущество законченной системы, применимой к широкому классу аналитических соотношений. Чтобы сделать новые номограммы действительным средством графического расчета, необходимо было разработать систему их построения и установить основные геометрические положения, на которых она базируется, т. е. вскрыть теоретические корни, питающие эту новую форму номографических изображений.

Именно это и было сделано в 1884 г. знаменитым французским номографом Оканем ³⁾, работы которого открыли собою новую эру в развитии номографии. К этому

¹⁾ Впервые обратил внимание на номографическое значение построений Штаудта проф. К. Власов.

²⁾ Clark. Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre, „Revue de Mécanique“, т. 21, 1907.

³⁾ D' Ocagne, Procédé nouveau de calcul graphique. „Annales des Ponts et des Chaussées“, 1884.

времени значительно выросли и развились те отрасли математики, которые служат фундаментом для номографических построений. Широким обобщением подверглось понятие о координатах, достигла блестящего развития проективная геометрия, являющаяся действительной основой большей части номографических построений.

Опираясь на всю совокупность известных к тому времени геометрических фактов, Окань строит номограммы уравнений, истолковывая переменные не как декартовы координаты точки, а как тангенциальные координаты, причем для выполнения построения пользуется особыми „параллельными координатами“ (см. гл. IV, § 1). Эти координаты были первоначально введены Шалем еще в 1829 г.¹⁾, но Окань пришел к ним самостоятельно, отыскивая наилучший метод геометрического изображения тангенциальных координат. Построения Оканя сразу привели к новому типу номограмм, охватывавшему все ранее найденные частные их виды. Новый тип номограмм, полученный Оканем, был назван им „номограммами из выравненных точек“.

Так как найденные ранее номограммы этого типа были мало известны и не могли быть приложены ни к каким другим формулам, кроме тех, для которых они построены, то метод Оканя явился совершенно новым методом номографического изображения аналитических зависимостей. Преимущество нового метода перед прежними было исключительно велико: простота самых номограмм, легкость пользования ими, простота и легкость их построения, возможность их употребления при большом числе переменных — делали их исключительно удобными; кроме того, новый метод сразу же появился в виде развернутой системы геометрических построений, применимой к весьма широкому классу уравнений. Новый метод номографирования стал чрезвычайно быстро распространяться во всех странах, в своем развитии создавая новую область математики, привлекающую к себе большое внимание научных кругов.

Один за другим стали ставиться вопросы как практического, так и теоретического порядка, и начала создаваться общая теория номографических построений. Окань по существу разрешил все основные конструктивные вопросы, связанные с его методом, и дал один из лучших способов построения номограмм.

Но вместе с вопросом о конструкции новых номограмм возникли и новые задачи теоретического порядка: вопрос о пределах применимости нового метода, об аналитических условиях разрешимости уравнения в номограммах нового типа, о связи между видом уравнения и типом разрешающей его номограммы и ее *жанром* (жанр — термин, введенный Оканем; см. гл. III, § 1), о нахождении всех типов номограмм, даваемых новым методом, о дальнейшем расширении найденного метода и т. п. В создании этой теории кроме Оканя принял участие ряд крупных, преимущественно французских номографов. Из них в первую очередь следует назвать Соро, который ввел понятие номографического порядка уравнения (гл. III, § 1) и построил теорию номографирования уравнений различных порядков. Ему принадлежит большая часть важнейших результатов в области теоретической номографии. Далее следует назвать имя каирского номографа Кларка, давшего ряд новых типов номограмм из выравненных точек и установившего метод приведения к каноническому виду уравнений 4-го порядка. Большое число результатов было получено также Буладом (Boulad)²⁾, произведшим особенно ценное исследование критических точек номограмм. В задаче об аналитических условиях разрешимости уравнений в номограммах из выравненных точек следует отметить работы Дюпорка и Гронваля³⁾. Исследование Гронваля было значительно переработано и упрощено Соро, но все же решение этого вопроса и до настоящего времени не доведено до той степени простоты, которая сделала бы условие Гронваля применимым на практике. Далее следует назвать замечательные работы проф. Герсезанова⁴⁾, который

¹⁾ „Correspondance mathématique de Quetelet“, t. IV, стр. 81, 1829.

²⁾ „Bull. de la société math. de France“, 12, 13, 1911.

³⁾ Gronwall, Sur les équations à trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés, „Journ. de Math. pures et appl.“, 6 série, t. 8, 1912.

⁴⁾ Герсезанов, Основания номографии, 1906.

дал совершенно новый вид, так называемых, циркульных номограмм, названных им „номограммами из равноудаленных точек“. Из более поздних работ следует отметить работы немецкого номографа Люкей¹⁾ (Luckey), Швердта²⁾ (Schwerdt) и Лукаша³⁾ (Lucas), а также недавно появившиеся работы австрийского номографа Фишера (Fischer)⁴⁾. Наконец к самому последнему времени относятся чрезвычайно интересные и открывающие новые перспективы работы парижского номографа Маргулиса (Margoulis)⁵⁾. Этот перечень, конечно, еще далеко не полон.

Такова в кратких чертах история развития номографии.

Из этого очерка видно, что главная масса теоретических вопросов номографии возникла в последний период ее развития. За этот период чрезвычайно сильно расширился ее математический фундамент, и установилась связь ее задач с задачами самых разнообразных областей математики.

Из них на первом месте стоит проективная геометрия, дающая основную базу для номографических построений, далее, теория уравнений с частными производными, некоторые вопросы дифференциальной геометрии (работы Фишера), и наконец, в работах „Гамбургского Семинара“ В. Блашке в последние годы установлена связь основных задач номографии с некоторыми вопросами топологии.

Это расширение математического фундамента номографии в свою очередь расширило ее возможности и поставило перед нею ряд новых задач как теоретического, так и практического порядка. Некоторые из них уже разрешены, но многие еще стоят на очереди и ждут своего разрешения.

Список литературы по номографии.

1. *D'Ocagne*, Traité de Nomographie, Paris 1921.
2. „ „ Calcul Graphique et Nomographique, Paris 1914.
3. „ „ Esquisse d'ensemble de la Nomographie, Paris 1925.
4. „ „ Cours de Géométrie pure et appliquée de l'école polytechnique, vol. I et II, 1917 et 1918.
5. *D'Ocagne*, Principes usuels de Nomographie avec application à divers problèmes concernant et l'aviation, et l'artillerie, 1920.
6. *Soreau*, Nomographie ou traité des abaques, Paris 1921.
7. *Clark*, Théorie générale des abaques d'alignement de tout ordre, „Revue de Mécanique“, 1907.
8. *Massau*, Mémoires sur l'intégration graphique. Annales de l'Association des Ingénieurs des Ecoles spéciales de Gand, 1878, 1884, 1886, 1887, 2890 et 1900.
9. *Gronwall*, Sur les équations entre 3 variables représentables par les nomogrammes à points alignés. „Journal des Mathématiques pures et appliquées“, 1912.
10. *W. Margoulis*, Les abaques à transparent orienté ou tournant, Paris 1931.
11. *Gersevanoff*, Applications des méthodes nomographiques à l'intégration graphique, Paris 1921.
12. *Jamin*, Pratique des abaques, Paris 1921.
13. *Seco de la Garza*, Nomografia, Madrid 1912.
14. *Vargha*, Aide calcul graphique pour la mécanique générale, Paris et Liège 1930.
15. *Lipka*, Graphical and mechanical computation, N. Y. 1921.
16. *Peddle*, The construction of graphical carts, N. Y. 1919.
17. *Hewes and Seward*, Design of Diagrams for Engineering Formules, London 1923.
18. *Brodetski*, The first cours of Nomograph, Suds Univers. Chicago 1920.
19. *Schwerdt*, Lehrbuch der Nomographie, Berlin 1924.
20. „ „ Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik, Berlin 1931.
21. *Luckey*, Einführung in die Nomographie, Bd. I und II, Berlin 1918—1920.
22. „ „ Nomographie, Leipzig 1927.
23. *Mehmke*, Leitfaden zum Graphischen Rechnen, Berlin 1924.
24. *Werkmeister*, Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln, Berlin 1923.
25. *Konorsky*, Die Grundlagen der Nomographie, Berlin 1923.
26. *Krauss*, Die Nomographie oder Fluchtlinienkunde, Berlin 1922.
27. *Lachmann*, Die Herstellung gerechneter Rechentafeln, Berlin 1923.

¹⁾ *Luckey*, Nomographische Darstellungsmöglichkeiten, „Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech.“, 1923.

²⁾ „Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech.“, 1924.

³⁾ „Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech.“, 1930.

⁴⁾ „Zeitschr. f. ang. Math.“, 28, 29, 1927.

⁵⁾ *Margoulis*, Les abaques à transparent orienté ou tournant, Paris 1931.

28. *Schilling*, Über die Nomographie von M. D'Ocagne, Berlin 1922.
29. *Pirani*, Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik, Berlin 1914.
30. *Schreiber Paul*, Grundlage einer Flächen Nomographie, Braunschweig 1921.
31. *Wandl*, Graphische Darstellung von mathematischen Formeln, Wien 1902.
32. *Machsmann*, Nomogramme (Graphische Tafeln für Eisenkonstruktionen), Wien 1924.
33. *Mayer*, Nomographie des Bauingenieurs, Berlin 1927. (Sam. Gösch № 959).
34. *Grosse*, Graphische Papiere und ihre vielseitige Anwendung, 1918.
35. *Schwerdt*, Einführung in die praktische Nomographie.
36. *Wenner*, Praktische Rechenbildkunde (Nomographie), Aachen 1929.
37. *Barthelemy*, Les courbes usuelles, 1930.
38. *Frechet et Romann*, Représentation des lois empiriques par les formules approchées, Paris 1930.
39. *Tonville*, Costruction des abaques par les méthodes élémentaires, Paris 1930.
40. *Frechet et Rouillet*, Nomographie, 1928.
41. *Allcock and Reginald*, The Nomogram, London 1932.
42. *Dunlap and Kurtz*, Handbook of statistical nomographic tables, Jonkers Work Book Comp.
43. *Runge*, Graphical Methods, New York 1912.
44. *Hezlet*, Nomography or the graphic representation of formulae, Woolwich 1913.
45. *Pesci*, Cenni di Nomografia, Livorno 1901.
46. *Ricci*, La Nomografia, Roma 1901.
47. *Ramella*, Calcolo grafico, Milano 1931.
48. *Nottrot*, Leerboek der nomografie. De constructie van schaal-nomogrammen voor betrekkingen met drie veranderlijken, 1930.
49. *Arvesen*, Innføring i nomografi, Oslo.
50. *Važs*, Nomographie, Rotterdam 1901—1902.
51. *Laska*, Wyklady nomografii, Lemberg 1904.
52. *Ulkowski*, O nomografii, Lemberg 1905.
53. *Jonesco*, Nomografia, Bucarest.
54. *Boulad*, Al Nomografia, Le Caire 1908.
55. *Ogura*, Nomographie, Tokio 1923.
56. *Н. М. Герсевич*, Основания номографического исчисления, Петербург 1906—1908.
57. *Основы номографии*, Москва 1932.
58. *Б. Г. Побединский*, Основы номографии, Баку 1932.
59. *П. П. Соколов*, Номография.
60. *П. В. Мелентьев*, Построение номограмм, Москва 1930.
61. *Блох*, Номография, Харьков 1930.
62. *Швердт*, Введение в практическую номографию, 1932.
63. *Рунге*, Графические методы математических вычислений, 1932.
64. Рабочая книга по математике под ред. *А. Я. Хинчина*, Концентр I и III.
65. *О. В. Ермолова и Д. И. Перепелкин*, Учебный атлас по номографии под ред. *Н. А. Глаголева*, Москва 1933.
66. *М. Л. Франк*, Номографический справочник, 1933.
67. *Ананьев*, Номография в техническом нормировании, Ленинград — Москва 1933.
68. *Гавра*, Основы номографии, Ленинград 1934.
69. *П. В. Мелентьев*, Номография, 1933.
70. *Фихтенгольц*, Математика для инженеров, ч. II, вып. 2-й, Ленинград — Москва 1934.