

Кильман Пауль

Тригонометрия

Том 3

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
П21

П21 **Пауль К.**
Тригонометрия: Том 3 / Кильман Пауль – М.: Книга по Требованию, 2022. – 132 с.

ISBN 978-5-519-89007-6

ISBN 978-5-519-89007-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2022
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2022

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

формуль (1), — тригонометрическими функциями. Отсюда происходит, что для этой вѣтви математики выбрано названіе «тригонометрія», хотя въ дословномъ переводѣ послѣднее означаетъ лишь «измѣреніе треугольниковъ».

Тригонометрическія функціи суть отношенія чиселъ одного наименованія, а именно — протяженій, и, какъ таковыя, являются отвлеченными или абсолютными числами (см. «Арифметика и Алгебра», стр. 8 и 9). Если, напр., на фиг. 1 $AC = 40 \text{ mm}$, а $AB = 50 \text{ mm}$, то $\cos \alpha = \frac{40 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Не слѣдуетъ, какъ это иногда дѣлаютъ начинающіе, подъ $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и т. д. разумѣть произведенія, одинъ изъ множителей которыхъ $\sin$ или $\cos$ и т. д., а другой — α ; и нельзя, поэтому, за обозначеніемъ $\sin$ или $\cos$ и т. д. ставить точку, не слѣдуетъ, такимъ образомъ, писать

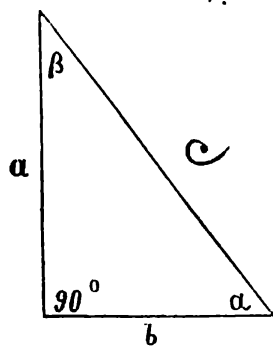
$\sin. \alpha$, $\cos. \alpha$ и т. д.,

а

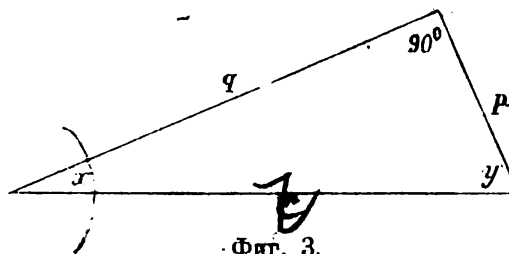
$\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и т. д.

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$ и т. д. надо разсматривать, какъ одну математическую величину. точно такимъ же образомъ, какъ, напр., $\log a$ (см. «Арифметику и Алгебру»).

Для пониманія дальнѣйшаго изложенія въ высшей степени важно, чтобы формулы, приведенныя подъ (1), были точно запечатлѣны въ памяти, и нельзя приступить къ усвоенію новаго, прежде чѣмъ старое не понято совершенно и не заучено наизусть. Чтобы уяснить угадываемую, каковы тѣ формулы, которыя должны разсматриваться такимъ же образомъ, мы ихъ будемъ обозначать обыкновенными цифрами (2), (3), (4) и т. д. При упражненіи съ формулами (1) надо стараться возможно болѣе освободиться отъ рода и способа обозначенія сторонъ и отъ положенія фигуръ. Для этой цѣли надо отвѣтить на слѣдующіе вопросы.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

1. Задача на упражненіе *). Каковы на фиг. 2

$\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$?
 $\operatorname{ctg} \beta$, $\operatorname{tg} \beta$, $\cos \beta$, $\sin \beta$?

2. Задача на упражненіе. Каковы на фиг. 3

$\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\sin x$, $\operatorname{ctg} x$?
 $\operatorname{tg} y$, $\sin y$, $\operatorname{ctg} y$, $\cos y$?

*) Рѣшенія задачъ на упражненія, не стоящія непосредственно за задачами, находятся въ концѣ соответствующаго параграфа.

3. Задача на упражненіе. Каковы гониометрическія функціи α на фиг. 2

$$\frac{b}{c}, \frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \frac{a}{b}?$$

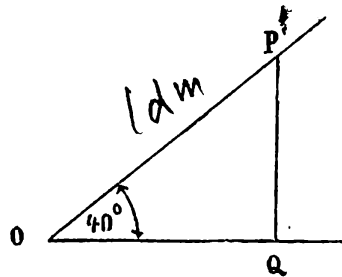
Какія гониометрическія функціи угла β являются тѣми же дробями?

4. Задача на упражненіе. Какія гониометрическія функціи угла x на фиг. 3 равны дробямъ

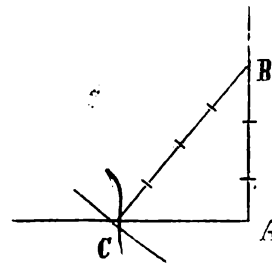
$$\frac{p}{q}, \frac{p}{r}, \frac{q}{r}, \frac{q}{p}?$$

Какія гониометрическія функціи угла y на фиг. 4 равны тѣмъ же дробямъ?

5. Задача на упражненіе. Нанести съ помощью транспорта (см. «Планиметрію», стр. 7) уголъ въ 40° (фиг. 4), отложить на одной изъ его сторонъ отъ вершины O отръзокъ $OP = 1$ dm, опустить изъ P перпендикуляръ PQ на другую сторону и, измѣривъ длины PQ и OQ масштабомъ, указать величины $\sin 40^\circ$, $\cos 40^\circ$, $\operatorname{tg} 40^\circ$, $\operatorname{cotg} 40^\circ$ съ точностью до двухъ десятичныхъ знаковъ.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Рѣшеніе. Найдемъ непосредственнымъ измѣреніемъ масштабомъ $PQ = 64$ mm, $OQ = 77$ mm. Поэтому, по формуламъ (1):

$$\sin 40^\circ = \frac{64 \text{ mm}}{1 \text{ dm}} = \frac{0,64 \text{ dm}}{1 \text{ dm}} = 0,64, \quad \operatorname{tg} 40^\circ = \frac{64 \text{ mm}}{77 \text{ mm}} = 0,84;$$

$$\cos 40^\circ = \frac{77 \text{ mm}}{1 \text{ dm}} = \frac{0,77 \text{ dm}}{1 \text{ dm}} = 0,77; \quad \operatorname{cotg} 40^\circ = \frac{77 \text{ mm}}{64 \text{ mm}} = 1,19.$$

6. Задача на упражненіе. Опредѣлить такимъ же образомъ, путемъ черченія, и измѣренія $\sin 30^\circ$, $\cos 30^\circ$, $\operatorname{tg} 30^\circ$, $\operatorname{cotg} 30^\circ$; затѣмъ $\sin 65^\circ$, $\cos 65^\circ$, $\operatorname{tg} 65^\circ$, $\operatorname{cotg} 65^\circ$.

7. Задача на упражненіе. Начертимъ уголъ, синусъ котораго $\frac{3}{4}$.

Рѣшеніе. Такъ какъ синусъ угла равенъ отношенію противолежащаго катета къ гипотенузѣ, то надо построить прямоугольный треугольникъ, гдѣ одинъ изъ катетовъ относился бы къ гипотенузѣ, какъ 3 : 4. Поэтому, начертимъ прямой уголъ (фиг. 5), отложимъ на одной изъ его сторонъ отъ вершины A отръзокъ AB , равный утроенной произвольно выбранной единицѣ масштаба, напр., равный 3 а, и отъ B

опишемъ радиусомъ 4 а дугу, пересекающую другую сторону въ С. Если провести еще ВС, то $\angle B C A$ есть искомый уголъ, синусъ котораго $= \frac{3}{4}$; ибо

$$\sin \angle B C A = \frac{3 a}{4 a} = \frac{3}{4}.$$

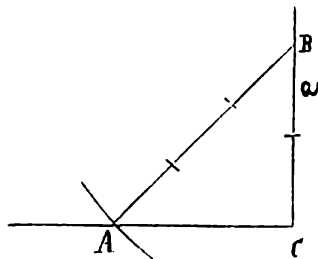
8. Задача на упражненія.. Начертить углы α , β , γ , δ такъ, чтобы а) $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, б) $\cos \beta = \frac{5}{9}$, в) $\operatorname{tg} \gamma = 0,8 (= \frac{8}{10})$. д) $\operatorname{cotg} \delta = 3 (= \frac{3}{1})$.

Рѣшенія задачъ на упражненія:

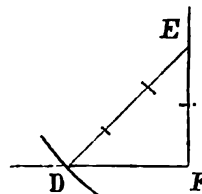
1. $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}; \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{a}{c}, \frac{b}{c}.$
2. $\frac{q}{r}, \frac{p}{q}, \frac{p}{r}, \frac{q}{p}; \frac{q}{p}, \frac{q}{r}, \frac{p}{q}, \frac{p}{r}.$
3. $\cos \alpha, \operatorname{cotg} \alpha, \sin \alpha, \operatorname{tg} \alpha; \sin \beta, \operatorname{tg} \beta, \cos \beta, \operatorname{cotg} \beta.$
4. $\operatorname{tg} x, \sin x, \cos x, \operatorname{cotg} x; \operatorname{cotg} y, \cos y, \sin y, \operatorname{tg} y.$
6. $\sin 30^\circ = 0,5; \cos 30^\circ = 0,87; \operatorname{tg} 30^\circ = 0,58; \operatorname{cotg} 30^\circ = 1,73;$
 $\sin 65^\circ = 0,91; \cos 65^\circ = 0,42; \operatorname{tg} 65^\circ = 2,14; \operatorname{cotg} 65^\circ = 0,47.$
8. Начертимъ прямоугольный треугольникъ, гдѣ
 - а) одинъ изъ катетовъ $= 3$, а гипотенуза $= 7$, такъ что уголъ противолежащій катету 3 $= \alpha$;
 - б) одинъ изъ катетовъ $= 5$, а гипотенуза $= 9$, такъ что уголъ, лежащій катету 5 $= \beta$,
 - в) катеты $= 8$ и $= 10$, такъ что уголъ противолежащій катету 8 $= \gamma$;
 - д) катеты $= 3$ и $= 1$, такъ что уголъ лежащій катету 3 $= \delta$.

§ 2.

Если дается одно изъ отношеній $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$, то этимъ самымъ острый уголъ α опредѣляется однимъ только образомъ, т.-е. существуетъ единственный острый уголъ α , соответствующій этому отношенію.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Ближайшее поясненіе этого предложенія будетъ доставлено нижеслѣдующимъ доказательствомъ. Если, напр., дается $\sin \alpha = \frac{3}{4}$, то начертимъ, согласно рѣшенію къ 7-й задачѣ на упражненіе, прямоугольный треугольникъ А В С (фиг. 6), въ которомъ катетъ В С $= 2 a$, а гипотенуза В А $= 3 a$, причемъ а означаетъ про-

извольно выбранную единицу масштаба, напр., 1 см. Въ такомъ случаѣ $\angle BAC = \alpha$,
 ибо $\sin \angle BAC = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$. Выбравъ другую единицу масштаба b (напр.,
 меньшую) и начертивъ прямоугольный треугольникъ DEF (фиг. 7), въ которомъ
 катетъ $EF = 2b$, а гипотенуза $ED = 3b$, получили бы и

$$\sin \angle EDF = \frac{2b}{3b} = \frac{2}{3}.$$

Спрашивается: $\angle EDF$ равенъ-ли α ? Для отвѣта на этотъ вопросъ надо принять
 во вниманіе, что въ обоихъ треугольникахъ ABC и DEF:

$$BC : AB = 2 : 3 \quad \text{и} \quad EF : DE = 2 : 3,$$

слѣдовательно,

$$BC : AB = EF : DE;$$

даже $\angle ACB = \angle DEF$, какъ прямые. Вместе съ тѣмъ:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

согласно предложенію IV о подобіи треугольниковъ (см «Планиметрію», § 26, теорему 38),
 слѣдовательно, какъ соответственные углы въ подобныхъ треугольникахъ

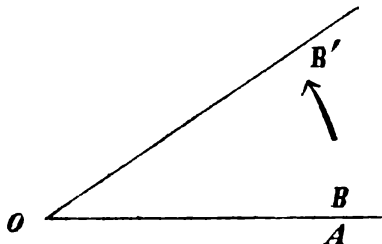
$$\angle BAC = \angle EDF = \alpha.$$

Такимъ образомъ, всѣ острые углы, начерченные совершенно различными масшта-
 бами такъ, чтобы ихъ синусы равнялись $\frac{2}{3}$, равны между собою, т.-е., слѣдовательно,
 данный синусъ опредѣляетъ острый уголъ однимъ только образомъ.

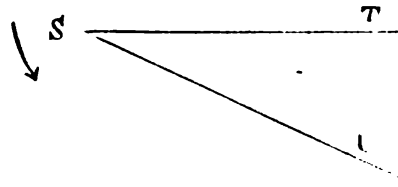
То же, конечно, имѣетъ значеніе и для всякой другой гониометрической функціи.

§ 3.

Въ дальнѣйшемъ будетъ выгодно представлять себѣ происхожденіе угла путемъ
 вращенія одной изъ его сторонъ опредѣленнымъ образомъ. Пусть, именно, изъ двухъ
 совпадающихъ прямыхъ OA и OB (фиг. 8) одна—OA неподвижна, тогда какъ дру-



Фиг. 8.



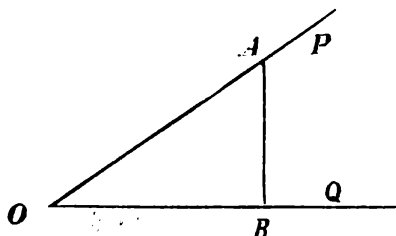
Фиг. 9.

гая—OB можетъ вращаться вокругъ O. Предположимъ, что это вращеніе произошло
 въ направленіи стрѣлки и что такимъ путемъ OB приведено въ положеніе OB',
 такъ что явился острый $\angle B'OA$. Въ моментъ совпаденія обѣхъ прямыхъ OB и OA
 не образовали угла другъ съ другомъ; или, какъ говорятъ обыкновенно, онѣ обра-

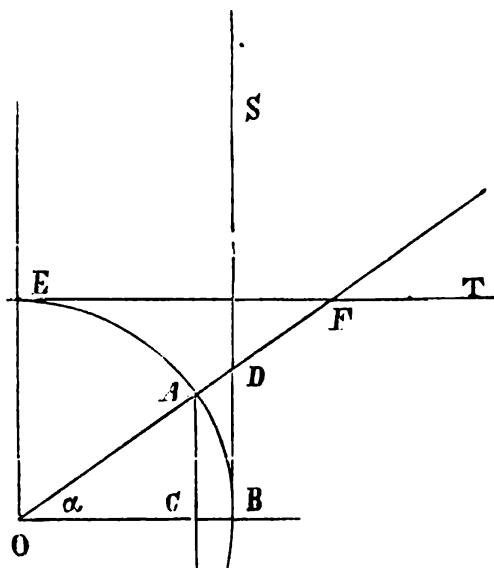
зовали уголъ $= 0^\circ$. При вращеніи OB до ея положенія OB' возникали, поэтому, всѣ острые углы отъ 0° до величины угла $B'OA$.

Поворачивая подвижную сторону за положеніе OB' еще дальше въ направленіи стрѣлки до тѣхъ поръ, пока она снова не придетъ въ совпаденіе съ неподвижной стороной OA , говорятъ, что описали уголъ $= 360^\circ$. Такимъ образомъ, путемъ вращенія образовали послѣдовательно всѣ углы между 0° и 360° . Если въ послѣдующемъ будетъ идти рѣчь объ углахъ, образуемомъ двумя взаимно пересѣкающимися линиями ST и SU (фиг. 9), то, если не будетъ заявлено противное, надо разумѣть всякій разъ уголъ, который должна описать прямая SU , предполагаемая въ такомъ случаѣ подвижной, чтобы изъ положенія ST прийти путемъ вращенія по направленію стрѣлки (противоположномъ направленію вращенія часовой стрѣлки) въ положеніе SU ; слѣдовательно, на фиг. 9 выпуклый уголъ TSU .

Если теперь изъ произвольной точки A подвижной стороны OP острого $\angle POQ = \alpha$ на фиг. 10 опустить перпендикуляръ AB на неподвижную сторону OQ , такъ что OB является проекціей OA на OQ , то тогда будемъ ради краткости называть отрезокъ OA подвижной стороной, OB проекціей и AB перпендикуляромъ. вмѣсто опредѣленій величинъ синуса, косинуса, тангенса и котангенса, данныхъ въ § 1, получимъ теперь слѣдующія:



Фиг. 10.



Фиг. 11.

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\text{перпендикуляръ}}{\text{подвижная сторона}} \\ \cos \alpha &= \frac{\text{проекція}}{\text{подвижная сторона}} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\text{перпендикуляръ}}{\text{проекція}} \\ \operatorname{cotg} \alpha &= \frac{\text{проекція}}{\text{перпендикуляръ}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2).$$

Къ этимъ формуламъ относится точно то же, что было сказано по поводу упражненія съ формулами (1) на стр. 3: не слѣдуетъ переходить къ дальнѣйшему, не умѣя произносить легко и свободно значеніе каждой изъ четырехъ формулъ (2) по порядку и въ разбивку.

§ 4.

Всѣ гониометрическія функціи можно представлять геометрически, а именно, какъ извѣстныя линіи въ кругѣ радіуса, принимаемаго равнымъ 1.

1. Отрѣзокъ синуса.

А именно, если описать вокругъ вершины O угла α радіусомъ $OA = 1$ кругъ (фиг. 11) и изъ A опустить перпендикуляръ AC на неподвижную сторону OB , то

$$\sin \alpha = \frac{AC}{OA} = \frac{AC}{1} = AC.$$

Если, напр., радіусъ $OA = 1$ dm, и измѣреніемъ находятъ, что $AC = 43,5$ mm, то

$$\sin \alpha = \frac{43,5 \text{ mm}}{1 \text{ dm}} = \frac{0,435 \text{ dm}}{1 \text{ dm}} = 0,435.$$

Этотъ примѣръ въ то же время разрѣшаетъ кажущееся противорѣчіе, что $\sin \alpha = AC$, т.-е. равенъ некоторой длинѣ, являющейся всегда числомъ именованнымъ, между тѣмъ какъ въ § 1 было указано, что гониометрическія функціи суть отвлеченныя числа. Какъ видно изъ примѣра, уравненіе

$$\sin \alpha = AC$$

означаетъ слѣдующее: измѣрить AC единицей, въ которой выраженъ радіусъ, и опустить ея названіе.

Поэтому, AC называется отрѣзкомъ синуса.

2. Отрѣзокъ косинуса.

Далѣе, на фиг. 11:

$$\cos \alpha = \frac{OC}{OA} = \frac{OC}{1} = OC.$$

Если, напр., радіусъ $OA = 1$ dm, и измѣреніемъ находятъ, что $OC = 9$ cm, то

$$\cos \alpha = \frac{9 \text{ cm}}{1 \text{ dm}} = \frac{0,9 \text{ dm}}{1 \text{ dm}} = 0,9.$$

Слѣдовательно, въ данномъ отдѣльномъ случаѣ $\cos \alpha = 0,9$.

Такимъ образомъ, вообще доказано, что

$$\cos \alpha = OC;$$

это надо понимать въ томъ же смыслѣ, какъ выше $\sin \alpha = AC$.

Поэтому, OC называется отрѣзкомъ косинуса.

3. Отрѣзокъ тангенса.

Затѣмъ, если на фиг. 11 BS — касательная къ кругу въ B , слѣдовательно, $BS \perp OB$, изъ прямоугольнаго треугольника $OB D$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{OB} = \frac{BD}{1} = BD,$$

слѣдовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha = BD.$$

Поэтому, BD называется отрѣзкомъ тангенса.

4. Отрѣзокъ котангенса.

Если, наконецъ, провести $OE \perp OB$, а также въ E касательную къ кругу, именно, $ET \perp OE$, такъ что $ET \parallel OB$ (см. «Планиметрію», § 15 и § 5), то, какъ соотвѣтственные углы $\angle EFO = \angle AOB = \alpha$, и изъ прямоугольнаго треугольника OEF получаемъ

$$\cot \alpha = \frac{EF}{OE} = \frac{EF}{1} = EF,$$

слѣдовательно,

$$\cot \alpha = EF.$$

Поэтому, EF называется отрѣзкомъ котангенса.

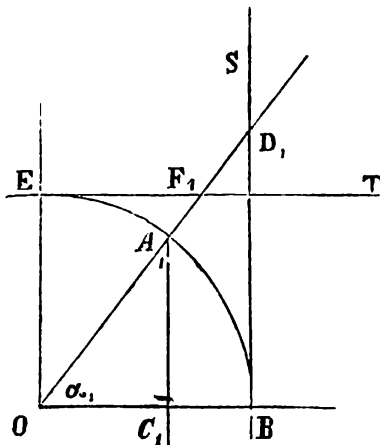
То, что было сейчасъ сказано о $\sin \alpha = AC$, относится и къ $\cos \alpha = OC$, $\tan \alpha = BD$ и $\cot \alpha = EF$, т.-е. для полученія значенія $\cos \alpha$ или $\tan \alpha$, или $\cot \alpha$, надо измѣрить соотвѣтственно или отрѣзокъ OC , или BD , или EF , выразить его въ тѣхъ же единицахъ, что и радиусъ, и опустить названіе послѣднихъ.

§ 5.

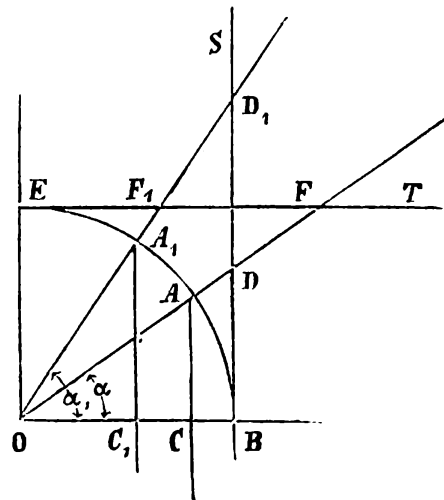
Конечно, острый уголъ α можетъ принимать разныя значенія, слѣдовательно, подвижная сторона OA можетъ принимать различное положеніе относительно линій OB , OE , BS и ET , предполагаемыхъ неподвижными. На фиг. 11 предполагался уголъ меньшій 45° ; если, съ другой стороны, принять $\alpha_1 > 45^\circ$, какъ на фиг. 12, то фигура принимаетъ другой видъ, и, все-таки, въ сущности результаты остаются тѣ же, что и прежде:

$$\sin \alpha_1 = A_1C_1; \quad \cos \alpha_1 = OC_1; \quad \tan \alpha_1 = BD_1; \quad \cot \alpha_1 = EF_1.$$

При этомъ, конечно, предполагается также, что $OA_1 = 1$, а равно и A_1C_1 , OE и $BS \perp OB$, и $ET \perp OE$.



Фиг. 12.



Фиг. 13.

Если обѣ фигуры 11 и 12 соединить вѣстѣ (фиг. 13), то ясно видно, какія перемѣны происходятъ послѣ передвиженія подвижной стороны изъ положенія OA въ положеніе OA_1 . Точка A перешла по кругу изъ A въ A_1 , линія AC перемѣ-

стилась параллельно самой себѣ въ положеніе A_1C_1 , слѣдовательно, C перемѣстилась на OB въ C_1 ; точка D перемѣстилась на касательной BS въ D_1 , а точка F на касательной ET въ F_1 .

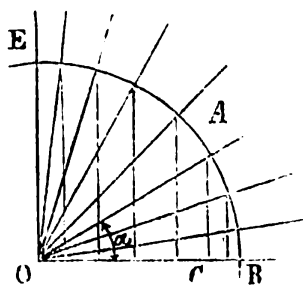
Поэтому, въ то время какъ α перешло въ α_1 , AC перешло въ A_1C_1 , OC въ OC_1 , BD въ BD_1 и EF въ EF_1 ; такимъ образомъ, съ увеличеніемъ угла α , AC увеличилось, OC уменьшилось, BD увеличилось и EF уменьшилось. Само собою разумѣется, послѣднее имѣетъ и обратное значеніе, т.-е. съ уменьшеніемъ α AC и BD уменьшаются, а OC и EF увеличиваются. Соединяя это съ найденными въ предыдущемъ § и напечатанными жирнымъ шрифтомъ результатами, находимъ слѣдующій новый результатъ:

Съ увеличеніемъ угла его синусъ и тангенсъ увеличиваются, а косинусъ и котангенсъ уменьшаются.

§ 6.

Совершенно уяснивъ себѣ содержаніе предыдущихъ двухъ §§ и запечатлѣвъ въ памяти указанные въ нихъ результаты, напечатанные жирнымъ шрифтомъ, можно лишь теперь перейти къ дальнѣйшему. Теперь именно надо изслѣдовать, какія значенія принимаютъ функціи съ возрастаніемъ соотвѣтствующаго угла отъ 0° до 90° , съ поворотомъ, слѣдовательно, подвижной стороны OA (фиг. 11 или фиг. 13) въ положенія OB и OE .

1) Синусъ. Изъ фиг. 14, въ которой OA предполагается снова $= 1$, видно, что, при поворотѣ подвижной стороны OA къ OB , отрѣзокъ AC , равный $\sin \alpha$, становится все меньше и меньше, пока, слѣдовательно, наконецъ, при совпаденіи OA съ OB , т.-е. при $\alpha = 0^\circ$, онъ не превращается въ точку, т.-е. синусъ 0° равенъ нулю, или $\sin 0^\circ = 0$.



Фиг. 14.

Напротивъ, при отклоненіи подвижной стороны OA къ OE , AC непрерывно возрастаетъ, и, при совпаденіи подвижной стороны съ OE , слѣдовательно, при $\alpha = 90^\circ$, отрѣзокъ синуса совпадаетъ по величинѣ и направленію съ радіусомъ EO , равнымъ 1, т.-е. синусъ 90° равенъ 1, или $\sin 90^\circ = 1$.

Отсюда получаемъ слѣдующій результатъ:

Съ возрастаніемъ угла отъ 0° до 90° его синусъ возрастаетъ отъ 0 до 1.

2) Косинусъ. На фиг. 14, гдѣ $OA = 1$, $\cos \alpha = OC$. При отклоненіи OA къ OB , основаніе C перпендикуляра AC движется къ B ; поэтому отрѣзокъ OC становится все больше и больше, пока, наконецъ, при совпаденіи OA съ OB , слѣдовательно, при $\alpha = 0^\circ$, отрѣзокъ косинуса не станетъ равнымъ OB , т. е. равнымъ 1, т.-е. косинусъ 0° равенъ 1, или $\cos 0^\circ = 1$.

При отклоненіи подвижной стороны изъ положенія OA къ OE , основаніе C перпендикуляра AC подвинется къ O ; поэтому, OC будетъ становиться постоянно

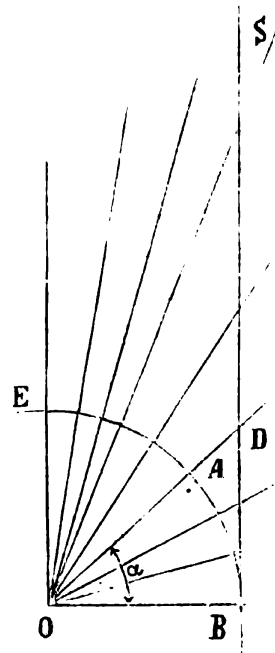
меньше и въ заключеніе, при совпаденіи подвижной стороны съ OC , слѣдовательно, при $\alpha = 90^\circ$, станетъ точкой, именно 0 , т.-е. нулемъ; такимъ образомъ, косинусъ 90° равенъ 0 , или $\cos 90^\circ = 0$.

Поэтому, мы получаемъ слѣдующій результатъ:

При возрастаніи угла отъ 0° до 90° , его косинусъ уменьшается отъ 1 до 0 .

3) Тангенсъ. На фиг. 15, гдѣ радиусъ $OA = 1$, $BD = \operatorname{tg} \alpha$. Съ уменьшеніемъ угла α посредствомъ отклоненія подвижной стороны къ OB точка пересѣченія D на касательной BS передвигается въ B ; такимъ образомъ, отрѣзокъ BD все уменьшается, и въ заключеніе, если подвижная сторона совпадаетъ съ OB , т.-е. $\alpha = 0^\circ$, то BD переходитъ въ точку B и становится, слѣдовательно, нулемъ; т.-е. тангенсъ 0° равенъ 0 , или $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$.

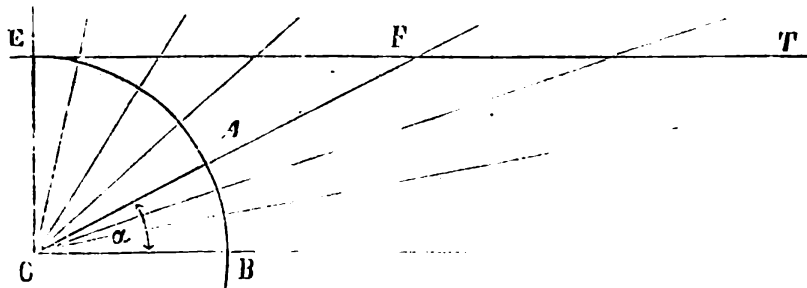
Напротивъ, при увеличеніи угла α отклоненіемъ подвижной стороны изъ положенія OA въ OE , точка пересѣченія D на BS непрерывно удаляется отъ B , слѣдовательно, BD возрастаетъ. Если подвижная сторона достигаетъ положенія OE , т.-е. становится $\parallel BS$, а уголъ α поэтому равняется 90° , то точка пересѣченія D совершенно исчезаетъ въ направленіи BD по прямой BS ; говорятъ, что обѣ параллельныя линіи OE и BS пересѣкаются въ бесконечности, и отрѣзокъ отъ B до этой отдаленной въ бесконечность точки пересѣченія бесконечно великъ, вмѣсто чего пишутъ знакъ ∞ . слѣдовательно, тангенсъ 90° бесконечно великъ, или $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$.



Фиг. 15.

Отсюда получаемъ результатъ:

При возрастаніи угла отъ 0° до 90° , его тангенсъ возрастаетъ отъ 0 до ∞



Фиг. 16.

4) Котангенсъ. На фиг. 16 $CA = 1$, тогда $\operatorname{cotg} \alpha = EF$. При уменьшеніи угла α посредствомъ отклоненія подвижной стороны CA къ CB , точка пересѣченія F на касательной ET отодвигается отъ E , слѣдовательно, EF становится больше. Наконецъ, приводя подвижную сторону въ совпаденіе съ CB , слѣдовательно, полагая $\alpha = 0^\circ$, мы дѣлаемъ ее $\parallel ET$; обѣ параллельныя линіи пересѣкаются въ бесконечности; такимъ образомъ, F отодвигается въ бесконечность, и EF становится бесконечно велико, т.-е. котангенсъ 0° бесконечно великъ, или $\operatorname{cotg} 0^\circ = \infty$.

Напротивъ, увеличивая уголъ α отклоненіемъ подвижной стороны къ ОЕ, отодвигаемъ F къ Е; поэтому, EF уменьшается и въ заключеніе превращается въ точку, именно, Е, т.-е. въ нуль при совпаденіи подвижной стороны съ ОЕ, слѣдовательно, при $\alpha = 90^\circ$; т.-е. котангенсъ 90° равенъ 0, или $\cotg 90^\circ = 0$.

Поэтому, имѣемъ результатъ:

Съ возрастаніемъ угла отъ 0° до 90° его котангенсъ убываетъ отъ ∞ до 0.

Найденные въ этомъ § результаты легко сопоставить въ слѣдующей понятной таблицѣ.

Надо замѣтить, что синусъ и косинусъ постоянно заключены между значеніями 0 и 1, такъ что, вообще, являются правильными дробями, тогда какъ тангенсъ и котангенсъ могутъ быть любымъ числомъ между нулемъ и безконечностью.

Для пониманія того, что изложено и выведено въ §§ 4, 5 и 6, замѣтимъ слѣдующее относительно фигуръ отъ 11 до 16.

Функция	Уголъ	
	0°	90°
sin	0	1
cos	1	0
tg	0	∞
cotg	∞	0

Для кого затруднительно представить себѣ значенія, принимаемыя отрѣзкомъ синуса АС, отрѣзкомъ косинуса ОС и т. д. при переходѣ угловъ къ 0° или 90° , тотъ пусть представитъ себѣ фиг. 11 или 12 въ видѣ, напримѣръ, слѣдующаго механизма. На гладко отшлифованной металлической пластинкѣ выгравирована дуга круга съ центромъ О, затѣмъ выгравированы радіусы ОВ, ОЕ и касательныя ВD и ЕF. Дуга ОЕ раздѣлена на градусы, начиная съ 0° при В, такъ что при Е стоитъ 90° . Отрѣзокъ ОВ = 1 раздѣляется на вѣсколку равныхъ частей, напримѣръ, 100; равнымъ образомъ, линіи ВD и ЕF съ точкой нуля при В и Е приготовлены въ видѣ масштабовъ. Въ О приложена подвижная рукоятка, которую надо представлять себѣ сколь возможно длиннѣе, и на послѣдней въ А вдѣлана палка такимъ образомъ, что, при вращеніи рукоятки ОА, она посредствомъ соотвѣстнаго приспособленія всегда передвигается перпендикулярно къ ОВ, слѣдовательно, параллельно самой себѣ. Въ такомъ случаѣ, поворачивая рукоятку на соотвѣстственное число градусовъ, можно было бы прочесть непосредственно по числамъ, находящимся на масштабахъ АС, ОС, ВD, ЕF при точкахъ С — значенія синуса и косинуса, при D — тангенса, при F — котангенса. При этомъ замѣтимъ, что точка D все время движется по касательной, проведенной черезъ В, а точка F по касательной — черезъ Е.

Частымъ черченіемъ фиг. 11 нужно такъ ее запомнить, чтобы постоянно умѣть представлять ее себѣ. Тогда легко будетъ заучить наизусть результаты и формулы, выведенные въ этомъ §, а также и другіе, которые еще будутъ выведены.

Результаты, найденные въ §§ 4 и 6 и подлежащіе запечатлѣнію въ памяти, суть, слѣдовательно, въ отношеніи къ фиг. 11 слѣдующіе:

$$(3) \dots \dots \left\{ \begin{array}{lll} \sin \alpha = AC; & \sin 0^\circ = 0; & \sin 90^\circ = 1. \\ \cos \alpha = OC; & \cos 0^\circ = 1; & \cos 90^\circ = 0 \\ \operatorname{tg} \alpha = BD; & \operatorname{tg} 0^\circ = 0; & \operatorname{tg} 90^\circ = \infty. \\ \operatorname{cotg} \alpha = EF; & \operatorname{cotg} 0^\circ = \infty; & \operatorname{cotg} 90^\circ = 0. \end{array} \right.$$