А. Д. Александров

Математика, ее содержание, методы и значение

Том 1

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А. Д. Александров
А11 Математика, ее содержание, методы и значение: Том 1 / А. Д. Александров – М.: Книга по Требованию, 2024. – 298 с.

ISBN 978-5-458-25708-4

Колеектив авторов при составлении этой книги исходил из намерения ознакомить достаточно широкие круги советской интелигенции с содержанием и методами отдельных математических дисциплин, из материальными основами и путями развития. В качестве минимума предварительных математических знаний читателя предполагается знание только курса средней школы, однако в отношении доступности материала каждый из трех томов не является однородным.

ISBN 978-5-458-25708-4

Глава I

ОБЩИЙ ВЗГЛЯД НА МАТЕМАТИКУ

Правильное представление о любой науке не складывается из отдельных, касающихся ее сведений, даже если они довольно обширны. Нужно еще иметь верный взгляд на науку в целом, понимать сущность данной науки. Цель этой главы состоит в том, чтобы дать общее представление о сущности математики. Для этого нет большой необходимости входить в подробное рассмотрение новых математических теорий, потому что уже история этой науки и элементарная математика дают достаточно оснований для общих выводов.

§ 1. ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИКИ

1. Даже при довольно поверхностном знакомстве с математикой легко заметить характерные ее черты: это, во-первых, ее отвлеченность, во-вторых, точность или, лучше сказать, логическая строгость и как бы непреложность ее выводов и, наконец, чрезвычайная широта ее применений.

Отвлеченность проявляется уже в простом счете. Мы оперируем отвлеченными числами, не заботясь о том, чтобы связывать их каждый раз с конкретными предметами. Мы учим в школе абстрактную таблицу умножения — таблицу умножения чисел вообще, а не числа мальчиков на число яблок или числа яблок на цену яблока и т. п.

Точно так же в геометрии рассматривают, например, прямые линии, а не натянутые нити, причем в понятии геометрической линии отвлекаются от всех свойств, оставляя только протяжение в одном направлении. Вообще понятие о геометрической фигуре является результатом отвлечения от всех свойств реальных предметов, кроме пространственной формы и размеров.

Такого рода отвлечения характерны для всей математики. Понятия о целом числе и о геометрической фигуре — это лишь одни из первоначальных ее понятий. За ними следует едва обозримое множество других, возвышающихся до таких абстракций, как комплексные числа, функции, интегралы, дифференциалы, функционалы, n-мерные и даже бесконечномерные пространства и т. д. и т. п. Абстракции эти как будто громоздятся одна на другую, удаляясь в такую отвлеченность, где, кажется, теряется уже всякая связь с жизнью и где «простой смертный» не поймет ничего, кроме того, что «все это непонятно».

На самом деле это, конечно, не так. И хотя, скажем, понятие n-мерного пространства действительно очень абстрактно, оно тем не менее имеет вполне реальное содержание, понять которое вовсе не так трудно. В этой книге будет, в частности, подчеркнут и пояснен реальный смысл перечисленных абстрактных понятий, и читатель убедится, что все они связаны с жизнью и по своему происхождению и в приложениях.

Впрочем, абстракция — не исключительная принадлежность математики: она свойственна всякой науке, да и всему человеческому мышлению вообще. Поэтому отвлеченность математических понятий не исчерпывает еще особенностей математики.

Математика в отношении своих абстракций отличается еще тем, что она, во-первых, оставляет в них прежде всего количественные отношения и пространственные формы, отвлекаясь от всего остального. Во-вторых, математические абстракции возникают через ряд ступеней; они идут в отвлечении гораздо дальше, чем абстракции, обычные в естественных науках. Эти два момента мы дальше подробно выясним на примерах основных понятий математики: числа и фигуры. Наконец,— и это бросается в глаза,— математика, как таковая, сама по себе вообще почти целиком вращается в кругу абстрактных понятий и их связей. Если естествоиспытатель для доказательства своих утверждений постоянно обращается к опыту, то математик доказывает теоремы только рассуждениями и выкладками.

Конечно, и математики для открытия своих теорем и методов постоянно пользуются моделями, физическими аналогиями, обращаются к множеству отдельных, совершенно конкретных примеров и т. п. Все это служит реальным источником теории, служит для нахождения ее теорем, но каждая теорема окончательно входит в математику только тогда, когда она строго доказана логическим рассуждением. Если бы геометр, докладывая о новой открытой им теореме, стал демонстрировать ее на моделях и этим ограничился, никто из математиков не признал бы теорему доказанной. Требование *доказать* теорему хорошо известно уже из школьного курса геометрии, и оно проходит через всю математику. Мы могли бы измерять углы у оснований тысячи равнобедренных треугольников с огромной точностью, но это не дало бы нам *математического доказательства теоремы* о том, что углы при основании равнобедренного треугольника равны. Математика требует вывести этот результат из основных понятий геометрии. (Теперь при строгом изложении геометрии свойства основных понятий точно формулируют в аксиомах.) И так всегда: доказать теорему для математика означает вывести ее путем рассуждения из начальных свойств, присущих тем понятиям, которые фигурируют в этой теореме. Таким образом, не только понятия, но и метод математики оказывается отвлеченным, умозрительным.

Сами математические выводы отличаются большой логической строгостью. Математическое рассуждение проводится с такой скрупулезностью, которая делает его бесспорным и убедительным для каждого, кто только его поймет. Эта скрупулезность и убедительность математических доказательств хорошо известна уже из курса средней школы. Да и сами математические истины представляются совершенно бесспорными. Недаром говорят: «доказать как дважды два четыре». Здесь математическое соотношение $2 \times 2 = 4$ берется именно как образец неопровержимости и бесспорности.

Однако строгость математики не абсолютна: она развивается; принципы математики не застыли раз навсегда, а движутся и тоже могут служить и служат предметом научных споров.

В конечном счете *источник жизненности математики заключается в том, что ее понятия и выводы при всей своей отвлеченности исходят, как мы убедимся, из действительности и находят широкие применения в других науках, в технике, во всей жизненной практике; это — самое главное для понимания математики.*

Исключительная широта применений математики представляет тоже одну из характерных ее особенностей.

Во-первых, мы постоянно, чуть ли не ежечасно, на производстве, в быту, в общественной жизни пользуемся наиболее распространенными понятиями и выводами математики, вовсе не задумываясь об этом. Так, мы применяем арифметику, считая дни или расходы, а подсчитывая площадь квартиры, используем выводы геометрии. Выводы эти, конечно, очень простые, но полезно вспомнить, что когда-то в древности они были одним из высших достижений зарождавшейся тогда математики.

Во-вторых, вся современная техника была бы невозможна без математики. Без более или менее сложных расчетов не обходится, пожалуй, ни одно техническое усовершенствование; в развитии же новых областей техники математика играет очень важную роль.

Наконец, почти все науки более или менее существенно пользуются математикой. «Точные науки» — механика, астрономия, физика, а также в большой мере и химия — обычно выражают свои законы формулами (как это знакомо каждому еще со школьной скамьи) и развивают свои теории, широко используя математический аппарат. Без математики прогресс этих наук был бы просто невозможен. Поэтому как раз потребности механики, астрономии и физики всегда оказывали прямое, решающее воздействие на развитие математики.

В других науках математика играет меньшую роль, но и там она находит важные применения. Конечно, в изучении таких сложных явлений, как явления биологические и общественные, математический метод по существу не может играть такой же роли, как, скажем, в физике. Всегда, а здесь тем более, применение математики имеет смысл только в единении с глубокой теорией конкретного явления. Об этом важно помнить, чтобы не сбиваться на простую игру в формулы, за которой не стояло бы никакого реального содержания. Но так или иначе, математика находит приложения почти во всех науках, от механики до политической экономии.

Напомним несколько примеров особенно блестящих применений математики в точных науках и технике.

Одна из самых далеких планет солнечной системы Нептун была открыта в 1846 г. на основании математических расчетов. Анализируя неправильности в движении планеты Уран, астрономы Адамс и Леверье пришли к выводу, что неправильности эти вызваны притяжением другой планеты. Леверье на основании законов механики и закона тяготения вычислил, где эта планета должна была находиться, и наблюдатель, которому он об этом сообщил, увидел ее в телескоп там, где указал Леверье. Это открытие было не только триумфом механики и астрономии, особенно системы Коперника, но также триумфом математического расчета.

Другой, не менее убедительный пример представляет открытие электромагнитных волн. Английский физик Максвелл, обобщая установленные опытами законы электромагнитных явлений, выразил эти законы в виде уравнений. Из уравнений он чисто математически вывел, что могут существовать электромагнитные волны и что они должны распространяться со скоростью света. Опираясь на это, он предложил электромагнитную теорию света, которая затем была всесторонне развита и обоснована. Но, кроме того, вывод Максвелла толкнул на поиски электромагнитных волн чисто электрического происхождения, например испускаемых при колебательном разряде. Такие волны были действительно открыты Герцем. А вскоре А. С. Попов нашел средства возбуждения, передачи и приема электромагнитных колебаний, вывел их в область широких применений и положил тем самым начало всей радиотехнике. В открытии радио, ставшего общим достоянием, сыграли большую роль также результаты чисто математического вывода.

Так от наблюдений,— каковы, например, наблюдения отклонений магнитной стрелки электрическим током,— наука идет к обобщению, к теории явлений, к формулировке законов и их математическому выражению. Из этих законов рождаются новые выводы, и, наконец, теория воплощается в практике, которая в свою очередь дает теории новые мощные импульсы к развитию.

Особенно замечательно, что даже самые абстрактные построения математики, возникшие внутри нее самой, уже без непосредственных толчков со стороны естествознания или техники, находят тем не менее плодотворные применения. Например, мнимые числа появились на свет в алгебре, и долгое время их реальный смысл оставался непонятным, на что показывает само их название. Однако после того, как в начале прошлого столетия им было дано геометрическое толкование (см. главу IV, § 2), мнимые числа вполне укрепились в математике, и возникла обширная теория функций комплексной переменной (т. е. переменной вида $x + y\sqrt{-1}$). Эта теория, так сказать, «мнимых» функций от «мнимых» переменных оказалась вовсе не мнимым, а очень реальным средством решения вопросов техники. Так, основная теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе крыла самолета доказывается как раз средствами этой теории. Та же теория оказывается полезной, например, при решении задач о просачивании воды под плотинами,— задач, значение которых очевидно в период строительства крупных гидроэлектростанций.

Другой, не менее блестящий пример представляет неэвклидова геометрия[1]. Она возникла на почве тысячелетних, тянувшихся со времен Эвклида попыток доказать аксиому о параллельных, т. е. из задачи, имевшей чисто математический интерес. Н. И. Лобачевский, создавший эту новую геометрию, сам осторожно называл ее «воображаемой», так как не мог указать ее реального значения, хотя и был уверен в том, что такое значение ее найдется. Выводы его геометрии казались большинству не то что «воображаемыми», но даже невообразимыми и нелепыми. Тем не менее идеи Лобачевского положили начало новому развитию геометрии, созданию теорий разных неэвклидовых пространств; потом эти идеи послужили одной из основ общей теории относительности, причем математическим аппаратом этой теории служит одна из форм неэвклидовой геометрии четырехмерного пространства. Так, казавшиеся по меньшей мере непонятными абстрактные построения математики оказались мощным средством развития одной из важнейших физических теорий. Точно так же в современной теории атомных явлений, в так называемой квантовой механике, существенно используются многие чрезвычайно абстрактные математические понятия и теории, как, например, понятие бесконечномерного пространства и др.

Нет нужды углубляться в перечисление примеров; мы достаточно подчеркнули, что математика имеет широчайшее применение в повседневной практике, в технике, в науке, причем в точных науках и больших проблемах техники находят также применения теории, выросшие внутри самой математики. Такова одна из характерных особенностей математики наряду с ее отвлеченностью, строгостью и убедительностью ее выводов.

2. Обратив внимание на все эти особенности математики, мы, конечно, не выяснили ее сущности, а указали, скорее, ее внешние признаки. Задача состоит в том, чтобы объяснить эти особенности. Для этого нужно ответить, по крайней мере, на следующие вопросы:

Что отражают абстрактные математические понятия? Каков, иными словами, реальный предмет математики?

---

[1] Здесь мы только указываем этот пример, не вдаваясь в объяснения, которые читатель найдет в главе XVII (том 3).

Почему отвлеченные математические выводы представляются столь убедительными, а первичные понятия столь очевидными? В чем, иными словами, основание метода математики?

Почему при всей своей отвлеченности математика находит широчайшее применение, а не оказывается праздной игрой в абстракции? Иными словами: откуда значение математики?

Наконец, какие силы двигают развитие математики, позволяя ей соединять абстрактность и широту применений? Иными словами: в чем содержание процесса развития математики?

Ответив на эти вопросы, мы получим общее представление о предмете математики, об основаниях ее метода, о ее значении и развитии, т. е. поймем ее сущность.

Идеалисты и метафизики не только путаются в решении этих коренных вопросов, но доходят до полного извращения математики, выворачивая ее в буквальном смысле наизнанку. Так, видя крайнюю отвлеченность и убедительность математических выводов, идеалисты воображают, что математика происходит из чистого мышления.

В действительности математика не дает никаких оснований для идеализма и метафизики; как раз наоборот: рассматриваемая объективно во всех ее связях и развитии, она дает еще одно блестящее подтверждение диалектического материализма и каждым своим шагом опровергает идеализм и метафизику. Мы убедимся в этом, когда попытаемся даже в самых общих чертах ответить на поставленные выше вопросы о сущности математики. Мы убедимся также, что ответ на эти вопросы уже заключается в положениях, установленных классиками марксизма как относительно математики, так и относительно природы науки и познания вообще. Для предварительного выяснения этих вопросов достаточно рассмотреть основания арифметики и элементарной геометрии. К ним мы и обратимся. Дальнейшее проникновение в математику, конечно, углубит и разовьет, но никак не отменит полученные при этом выводы.

§ 2. АРИФМЕТИКА

1. Понятие о числе (мы говорим пока только о целых положительных числах) — это понятие, такое для нас привычное, вырабатывалось очень медленно. Об этом можно судить хотя бы по тому, как считали народы, еще совсем недавно стоявшие на разных ступенях первобытно-общинного строя. У некоторых из них не было даже названий для чисел больше двух или трех, у других счет шел дальше, но так или иначе он сравнительно быстро кончался, и о большем числе они говорили просто «много» или «неисчислимо». Это показывает, что запас ясно различаемых чисел накапливался у людей постепенно.

Вначале люди не имели понятия о числе, хотя и могли по-своему судить о размерах той или иной совокупности вещей, встречавшейся в их практике. Надо думать, что число воспринималось ими непосредственно как неотъемлемое свойство совокупности предметов, которое, однако, еще ими явно не выделялось. Мы настолько привыкли к счету, что едва ли можем себе это представить, но понять это можно[1].

На более высокой ступени число уже указывается как свойство совокупности предметов, но еще не отделяется от нее как «отвлеченное число», как число вообще, не связанное с конкретными предметами. Это видно из таких названий чисел у некоторых народов, как «рука» для пяти, «весь человек» — для двадцати и т. п. Здесь пять понимается не отвлеченно, а просто как «столько же, сколько пальцев на руке», двадцать — как «столько же, сколько всех пальцев у человека» и т. п. Совершенно аналогично у некоторых народов не было, например, понятий «черный», «твердый», «круглый». Чтобы сказать, что предмет черный, они сравнивали его, допустим, с вороном, а чтобы сказать, что имеется пять предметов, они прямо сравнивали эти предметы с рукой. Бывало и так, что разные названия чисел употреблялись для разного рода предметов: одни числа для счета людей, другие для счета лодок и т. д. до десяти разных сортов чисел. Тут нет отвлеченных чисел, они являются как бы «именованными», относящимися только к определенному роду предметов. У других народов вообще нет отдельных названий для чисел, например нет слова «три», хотя они могут сказать: «три человека», «в трех местах» и т. п.

Аналогично этому мы легко говорим, что тот или иной предмет черный, но гораздо реже говорим о «черноте» самой по себе,— это понятие представляется более абстрактным[2].

Число предметов есть свойство некоторой их совокупности, число же, как таковое, иными словами «отвлеченное число», есть это свойство, отвлеченное от конкретных совокупностей и мыслимое уже само по себе, подобно «черноте», «твердости» и т. п. Как чернота есть общее свойство предметов цвета угля, так число «пять» есть общее свойство всех совокупностей, содержащих столько же предметов, сколько пальцев на руке.

---

[1] В самом деле, всякая совокупность предметов, будь то стадо овец или поленница дров, существует и непосредственно воспринимается во всей своей конкретности и сложности. Выделение в ней отдельных свойств и отношений есть результат известного анализа. Примитивное мышление еще не делает такого анализа, а берет объект только в целом. Подобно этому, например, человек, не занимавшийся музыкой, воспринимает музыкальное произведение, не выделяя в нем деталей мелодии, тональности и т. п., в то время как музыкант легко анализирует даже сложную симфонию.

[2] В образовании понятий о свойствах предметов, будь то цвет или численность совокупности, можно различить три ступени, которые, впрочем, нельзя слишком строго разграничивать. На первой ступени свойство определяется прямым сравнением предметов: такой же, как ворон; столько же, сколько на руке. На второй ступени появляется прилагательное: черный камень, аналогично — числительное: пять деревьев и т. п. На третьей ступени свойство отвлекается от предметов и может фигурировать «как таковое», как «чернота», как отвлеченное число «пять» и т. п.

При этом сама равночисленность устанавливается простым сравнением: беря предмет из совокупности, мы загибаем один палец и так пересчитываем их по пальцам. Вообще сопоставлением предметов двух совокупностей можно, вовсе не пользуясь числами, установить, одинаковое ли в них число предметов. Так, гости, рассаживаясь за столом и ничего не считая, легко поправляют хозяйку, если она забыла один прибор: один гость остался без прибора.

Таким образом, можно дать следующее определение числа: *каждое отдельное число, как «два», «пять» и т. п., есть свойство совокупностей предметов, общее для всех совокупностей, предметы которых можно сопоставить по одному, и различное у таких совокупностей, для которых такое сопоставление невозможно.*

Для того чтобы обнаружить и ясно выделить это общее свойство, т. е. для того чтобы образовать понятие о том или ином числе и дать ему название «шесть», «десять» и т. д., нужно было сравнить между собой немало совокупностей предметов. Люди считали на протяжении долгих поколений, миллионы раз повторяя одни и те же операции, и так на практике обнаруживали числа и отношения между ними.

2. Действия, операции над числами возникали, в свою очередь, как отражение реальных действий над конкретными предметами. Это заметно и в названиях чисел. Так, например, у некоторых индейцев число «двадцать шесть» произносится, как «на два десятка я кладу сверху шесть». Ясно, что здесь отражается конкретный способ пересчитывания предметов. Тем более ясно, что сложение чисел соответствует складыванию, соединению двух или нескольких совокупностей в одну. Так же легко видеть конкретный смысл вычитания, умножения и деления (умножение, в частности, в большой мере происходит, видимо, от счета равными совокупностями: по 2, по 3 и т. п.).

В процессе счета люди открывали и усваивали не только связи между отдельными числами, как, например, то, что два и три будет пять, но устанавливали постепенно и общие законы. На практике обнаруживалось, что сумма не зависит от порядка слагаемых или что результат счета данных предметов не зависит от того, в каком порядке этот счет производится. (Это последнее обстоятельство находит выражение в совпадении «порядковых» и «количественных» чисел: первый, второй и т. д. и один, два и т. д.) Таким образом, числа выступали не как отдельные и независимые, а в связи друг с другом.

Одни числа выражаются через другие даже в названиях и записи. Так, «двадцать» означает «два (раза) десять», по-французски 80 — «четыре-двадцать» (quatre-vingt), 90 — «четыре-двадцать-десять», а, например, римские цифры VIII, IX означают, что $8=5+3$, $9=10-1$.

В общем, возникали не просто отдельные числа, а *система* чисел с ее связями и законами.

Предмет арифметики составляет именно система чисел с ее связями и законами[1]. Отдельное отвлеченное число само по себе не имеет содержательных свойств, и о нем вообще мало что можно сказать. Если мы спросим себя, например, о свойствах числа 6, то заметим, что $6=5+1$, $6=3\cdot 2$, что 6 есть делитель 30 и т. п. Но здесь всюду число 6 связывается с другими числами, так что свойства данного числа состоят именно в его отношениях к другим числам[2]. Тем более ясно, что всякое арифметическое действие определяет связь, или, иными словами, отношение между числами.

Таким образом, арифметика имеет дело с отношениями между числами. Но отношения между числами являются отвлеченными образами реальных количественных отношений между совокупностями предметов, поэтому можно сказать, что *арифметика есть наука о реальных количественных отношениях, рассматриваемых, однако, отвлеченно, так сказать, в чистом виде.*

Арифметика, как мы видим, происходит не из чистого мышления, как стараются изобразить идеалисты, а отражает определенные свойства реальных вещей; она возникла в результате долгого практического опыта многих поколений.

3. Чем обширнее и сложнее становилась общественная практика, тем более широкие задачи она ставила. Нужно было не только отмечать количество предметов и обмениваться мыслями об их числе, что уже потребовало формирования понятия числа и названий чисел, но надо было учиться считать все бо́льшие совокупности (будь то животные в стаде, предметы при обмене, дни до намеченного срока и т. п.), фиксировать и передавать другим результаты счета, что как раз и требовало совершенствования названий, а затем и обозначений для чисел.

Введение обозначений для чисел, идущее, повидимому, от самого зарождения письменности, сыграло громадную роль в развитии арифметики. Кроме того, это был первый шаг к математическим знакам и формулам вообще. Следующий шаг, состоявший во введении знаков для арифметических действий и буквенного обозначения для неизвестного (x), был сделан гораздо позже.

Понятие числа, как всякое абстрактное понятие, не имеет одного непосредственного образа, его нельзя представить, а можно только мыслить. Но мысль оформляется в языке, поэтому без названия нет и поня-

---

[1] Слово «арифметика» происходит от греческого «искусство счета» («арифмос» — число и «техне» — искусство).

[2] Это понятно также из самых общих соображений. Любая абстракция, отделенная от конкретного основания,— как число отвлекается от конкретных совокупностей предметов,— «сама по себе» не имеет смысла, она живет только в связях с другими понятиями. Эти связи содержатся уже в любом высказывании, в самом неполном определении. Вне их она лишается содержания и значения, т. е. просто не существует. Содержание понятия отвлеченного числа лежит в законах, в связях системы чисел.

тия. Обозначение есть то же название, только не звуковое, а письменное, и оно воспроизводится мыслью в виде зрительного образа. Например, если я скажу «семь», что вы представляете? Вероятно, не семь каких-нибудь предметов, а прежде всего цифру «7»; она и служит материальной оболочкой для отвлеченного числа «семь». А такое число, как, например, 18 273, заметно труднее произнести, чем написать, и уж вовсе нельзя с полной точностью представить себе в образе совокупности предметов. Таким образом, обозначения помогли, хотя и не сразу, создать понятие о таких числах, которых уже нельзя было обнаружить в простом наблюдении и непосредственном пересчитывании. В этом была практическая необходимость: с появлением государства нужно было собирать подати, собирать и снабжать войско и т. п., что требовало операций с очень большими числами.

Итак, во-первых, роль обозначений для чисел состоит в том, что они дают простое воплощение понятия отвлеченного числа[1]. Такова роль математических обозначений вообще: они дают воплощение отвлеченных математических понятий. Так, $+$ означает сложение, x — неизвестное число, a — любое данное число и т. д. Во-вторых, обозначения чисел дают возможность особенно просто осуществлять действия над ними. Каждый знает, насколько легче «подсчитать на бумаге», чем «в уме». Такое же значение имеют математические знаки и формулы вообще: они позволяют заменять часть рассуждений выкладками, т. е. чем-то почти механическим. К тому же, если выкладка написана, она имеет уже определенную достоверность. Тут все видно, все можно проверить, все определяется точными правилами. Для примера можно вспомнить сложение «столбиком» или любое алгебраическое преобразование, как, например, «перенесение в другую часть равенства с изменением знака».

Из сказанного ясно, что без подходящих обозначений для чисел арифметика не могла бы продвинуться далеко вперед. Тем более современная математика была бы просто невозможна без специальных знаков и формул.

Само собой понятно, что люди далеко не сразу смогли выработать современный, столь удобный, способ записи чисел. С древних времен у разных народов с начатками культуры появлялись разные числовые обозначения, мало похожие на наши современные не только по начертанию знаков, но и по принципам; не всюду, например, пользовались именно десятичной системой (так, у древних вавилонян была смешанная десятичная и шестидесятиричная система). На прилагаемой таблице показаны для примера

[1] Стоит заметить, что понятие о числах, которое вырабатывалось, как мы видели, с таким трудом в течение очень долгого времени, усваивается теперь ребенком сравнительно легко. Почему? Во-первых, конечно, потому, что ребенок слышит и видит, как взрослые постоянно пользуются числами, и они даже учат его этому. А во-вторых, потому,— и именно на это мы хотим обратить внимание,— что ребенок имеет готовые слова и обозначения для чисел. Он сначала выучивает эти внешние образы числа, а потом уже овладевает его смыслом.