

Э. Борель

Тригонометрия

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э1 **Э. Борель**
Тригонометрия / Э. Борель – М.: Книга по Требованию, 2014. – 236 с.

ISBN 978-5-458-35706-7

ISBN 978-5-458-35706-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

угольниковъ ¹⁾. Главная цѣль изученія заключается въ усвоеніи указанныхъ основныхъ свѣдѣній настолько, чтобы умѣть свободно ими пользоваться. Поэтому слѣдуетъ упражняться въ рѣшеніи примѣровъ на основныя начала тригонометріи до тѣхъ поръ, пока они не будутъ усвоены такъ же твердо какъ четыре арифметическихъ дѣйствія. Число примѣровъ должно быть возможно больше, при этомъ неважно, чтобы всѣ они были разнообразны. Бываетъ полезно даже продѣлать нѣсколько разъ одинъ и тотъ же примѣръ, но при различныхъ численныхъ заданияхъ. Въ виду этого, по совѣту нѣкоторыхъ преподавателей, я счелъ полезнымъ помѣстить подъ различными номерами примѣры, представляющіе видоизмѣненія одной и той же задачи, но при различныхъ заданияхъ.

Со строго обдуманномъ намѣреніемъ я удѣлилъ главное мѣсто десятичному дѣленію четверти круга, отодвинувъ на второй планъ шестеричную систему измѣренія дугъ; тѣмъ не менѣе, она излагается въ книгѣ настолько подробно, чтобы читатель сумѣлъ

¹⁾ Я считалъ необходимымъ указать способъ употребленія таблицъ во второй же главѣ, т.-е. на сколько возможно раньше. Обыкновенно установился обычай отодвигать эту существенную часть тригонометріи къ концу, полагая необходимымъ предварительно изложить способы составленія таблицъ.

Однако весьма важно, какъ можно раньше, научить учениковъ пользоваться таблицами; съ этой цѣлью полезно употреблять сначала четырехзначныя таблицы, которыя вполне достаточны для рѣшенія большей части практическихъ вопросовъ. Поэтому, несмотря на небольшіе размѣры книги, я помѣстилъ въ ней четырехзначныя таблицы логарифмовъ чиселъ, антилогарифмовъ (т.-е. чиселъ, соответствующихъ данному логарифму) и логарифмовъ круговыхъ функций дугъ, разнящихся между собой на половину града и градуса. Слѣдуетъ рекомендовать упражняться возможно больше въ рѣшеніи практическихъ вопросовъ, при помощи данныхъ таблицъ.

пользоваться ею. Съ этою цѣлью шестеричное дѣленіе примѣняется также въ большемъ числѣ примѣровъ. Въ настоящее время мы переживаемъ повидимому переходный моментъ, подобный тому, который послѣдовалъ за введеніемъ метрической системы измѣренія. Въ то время руководства арифметики были заполнены примѣрами, для упражненій на преобразование старыхъ единицъ измѣренія въ новыя и обратно. Въ настоящее время такъ же слѣдуетъ привыкать къ переходу отъ десятичной системы измѣренія къ шестеричной и обратно.

Не будемъ останавливаться на историческихъ причинахъ введенія новой системы измѣренія и на ея преимуществахъ. Для освѣщенія этого вопроса, совѣтуемъ лучше всего обратиться къ замѣчательной статьѣ члена Парижской Академіи Наукъ Гюйу: *О приложеніи десятичнаго дѣленія четверти круга къ мореплаванію*, напечатанной въ „Annuaire du Bureau des Longitudes“ за 1902 годъ. Авторъ высказываетъ надежду, что въ будущемъ старая система дѣленія окружности должна почти совершенно исчезнуть ¹⁾ и говорить, что молодые люди, привыкнувъ къ новой системѣ измѣренія, будутъ съ трудомъ мириться съ усложненіями, которыя вводятся въ вычисленія шестеричной системой измѣренія.

Пользуюсь настоящимъ случаемъ, чтобы выразить признательность преподавателямъ средней школы, ко-

¹⁾ Я не говорю, что шестеричная система должна *совершенно* исчезнуть, потому что астрономамъ придется еще долго ею пользоваться, такъ какъ много прежнихъ наблюдений и вычисленій выполнено въ шестеричной системѣ измѣренія дугъ. Но и астрономы со временемъ привыкнутъ пользоваться новой системой измѣренія, указывая, въ началѣ и въ концѣ своихъ вычисленій, способъ приведенія ихъ къ старой системѣ измѣренія.

которые дѣлились со мною своими замѣчаніями по поводу моихъ руководствъ; совѣты ихъ очень цѣнны для меня, и я надѣюсь пользоваться ими и дальше. Я буду очень радъ, если эта книга встрѣтитъ такой же доброжелательный пріемъ со стороны преподавателей, какъ и всѣ предыдущія. Ихъ одобреніе послужитъ мнѣ лучшей наградой за трудъ.

Эмиль Борель.

ТРИГОНОМЕТРІЯ.

ГЛАВА I.

Основныя понятія.

1. Измѣреніе дугъ.

1. **Цѣль тригонометріи.** — Какъ хорошо извѣстно, чтобы построить геометрическую фигуру, составленную изъ отрѣзковъ прямыхъ линій, нѣтъ необходимости знать всѣ ея части. Такъ, напримѣръ, для построенія треугольника, достаточно знать его двѣ стороны и уголъ между ними; чтобы построить параллелограмъ, достаточно знать его двѣ неравныхъ стороны и одну діагональ и т. д. Такимъ образомъ всѣ составныя части геометрической фигуры становятся извѣстными, если мы знаемъ опредѣленное число изъ нихъ. Тщательно выполненное построеніе, при помощи линейки, угольника, циркуля и транспортира, позволяетъ найти искомыя части съ опредѣленною степенью точности. Напримѣръ, если построить треугольникъ, двѣ стороны котораго равны соотвѣтственно 32 и 45 миллиметрамъ, а уголъ, заключенный между ними, равенъ половинѣ прямого угла, то легко найти, что длина третьей стороны равняется приблизительно 31,9 миллиметрамъ. Цѣль тригонометріи заключается въ рѣшеніи вопросовъ, подобныхъ предыдущему, при помощи вычисле-

ніа; другими словами, *тригонометрія* даєть способъ *находити численную величину (длины и углы) составных частей геометрической фигуры, на основаніи численныхъ величинъ (длинъ и угловъ) остальныхъ ея частей, которыя достаточны, для построенія разсматриваемой фигуры.* Здѣсь рѣчь идетъ исключительно о геометрическихъ фигурахъ, составленныхъ изъ отрѣзковъ прямыхъ линій. Такъ какъ подобныя фигуры вообще состоятъ изъ треугольниковъ, то можно сказать, что задача тригонометріи заключается въ *рѣшеніи треугольниковъ*, или въ вычисленіи неизвѣстныхъ частей треугольника, при помощи его извѣстныхъ остальныхъ частей, которыхъ достаточно для построенія разсматриваемаго треугольника ¹⁾. Въ виду этого необходимо остановиться на вопросѣ объ *измѣреніи угловъ болѣе подробно*, чѣмъ это дѣлается обыкновенно въ геометріи, и съ этою цѣлью удобнѣе начать съ разсмотрѣнія задачи объ *измѣреніи дугъ*. Хотя оба эти вопроса: измѣреніе угловъ и измѣреніе дугъ совершенно равнозначны, тѣмъ не менѣе второй вопросъ допускаетъ болѣе ясное изложеніе чѣмъ первый, такъ какъ самое понятіе о дугѣ является менѣе отвлеченнымъ чѣмъ понятіе объ углѣ.

2. Тригонометрическій кругъ. — Для опредѣленія положенія точки на какой-либо прямой, мы принимаемъ опредѣленную точку на ней за начало, намѣчаемъ положительное направленіе и выбираемъ опредѣленную единицу длины. Такимъ же образомъ, чтобы опредѣлить положеніе точки на окружности, необходимо намѣтить на ней точку, принимаемую за начало дугъ, положительное направленіе движенія по окруж-

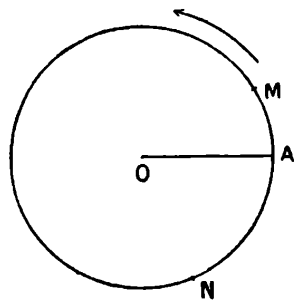
¹⁾ Мы ограничимся разсмотрѣніемъ только *прямолинейной тригонометріи*, которая называется такъ въ отличіе отъ *сферической*, занимающейся рѣшеніемъ сферическихъ треугольниковъ, начерченныхъ на сферѣ и образованныхъ дугами ея большихъ круговъ.

ности и, наконецъ, единицу длины. Въ тригонометріи за единицу длины принимается обыкновенно *радіусъ разсматриваемаго круга*. Подобный кругъ, съ намѣченнымъ началомъ, обусловленнымъ положительнымъ направлениемъ и радіусомъ, который взять за единицу длины, называется *тригонометрическимъ кругомъ*.

Обыкновенно условливаются считать положительнымъ то направленіе движенія вдоль окружности, которое *противоположно движенію часовой стрѣлки*. Само собою разумѣется, что этотъ выборъ совершенно произвольный и что съ такимъ же успѣхомъ можно было бы выбрать за положительное прямо противоположное направленіе. Наконецъ за начало дугъ обыкновенно считаютъ точку, наиболѣе отстоящую вправо на окружности. Выборъ этотъ хотя и вполнѣ произвольный, но тѣмъ не менѣе всегда принимается, благодаря своему удобству.

Описанный тригонометрическій кругъ изображенъ на чертежѣ 1-омъ; начало дугъ находится въ точкѣ *A*; положительное направленіе отмѣчено стрѣлой на чертежѣ; единица длины равна *OA*. На чертежѣ нанесенъ также радіусъ *OA*, который соединяетъ центръ окружности съ началомъ дугъ и называется *начальнымъ радіусомъ*.

Положеніе точки *M* на окружности вполнѣ опредѣляется своей, такъ называемой, *криволинейной абсциссой*, т.е. длиной и знакомъ дуги *AM*. Напримѣръ, на чертежѣ 1-омъ криволинейная абсцисса точки *M* равна приблизительно 0,6, а криволинейная абсцисса точки *N* равна приблизительно —1,3. Если бы нашъ кругъ представлялъ матеріальный



Черт. 1.

кругъ, напริมѣръ, въ видѣ колеса съ радіусомъ величиной въ одинъ метръ, то криволинейныя абсциссы на немъ можно было бы легко измѣрять, при помощи метра изъ ленты или полосы клеенки.

3. Кратныя значенія криволинейныхъ абсциссъ.— Мы только что сказали, что криволинейная абсцисса точки M равна величинѣ 0,6, а криволинейная абсцисса точки N равняется — 1,3. Въ самомъ дѣлѣ, точка, принужденная двигаться по окружности, должна направиться въ положительную сторону, чтобы пройти по кратчайшему пути изъ положенія A въ M и описать путь, длиной въ 0,6. Такъ же точно, чтобы пройти по кратчайшему пути изъ A въ N , точка должна направиться въ отрицательную сторону и пройти разстояніе въ 1,3. Но вполне возможно также перейти изъ положенія A въ N , двигаясь въ положительномъ направленіи; однако въ этомъ случаѣ путь будетъ болѣе длинный. Это было бы, пожалуй, похоже на то, что путешественникъ, имѣя въ своемъ распоряженіи достаточно свободнаго времени, отправляется изъ Парижа въ Москву черезъ Нью-Йоркъ, Санъ-Франциско, Токогаму и Сибирь. Спрашивается, чему будетъ равняться описанная дуга, если движущаяся точка направится изъ A въ положеніе N , слѣдуя въ положительномъ направленіи, т.-е. пройдетъ сначала черезъ точку M ? Само собою разумѣется, что длина соответствующей дуги AMN равняется длинѣ всей окружности, за вычетомъ длины малой дуги AN . Если радіусъ окружности принять за единицу длины, то длина всей окружности равняется 2π , или приблизительно 6,28; такъ какъ длина малой дуги AN , согласно сдѣланному выше предположенію, равна 1,3, то отсюда слѣдуетъ, что длина дуги AMN имѣетъ слѣдующее приближенное значеніе

$$6,28 - 1,3 = 4,98.$$

Поэтому криволинейную абсциссу точки N мы можем принимать равной, или 4,98, или же — 1,3. Таким же образом криволинейная абсцисса точки M равняется $+ 0,6$ или равна $- 5,68$, такъ какъ такова приблизительно длина дуги ANM , которую приходится пройти точкѣ изъ A въ M , двигаясь въ отрицательную сторону.

Можно смотрѣть на опредѣленіе положенія точки на окружности еще съ болѣе общей точки зрѣнія, которая приносить своего рода выгоду, какъ мы увидимъ впослѣдствіи.

Чтобы перейти изъ точки A въ M , можно, напирѣ, совершить 163 полныхъ оборота окружности въ положительномъ направленіи и затѣмъ описать малую дугу AM . Въ такомъ случаѣ длина всего пройденнаго пути выразится числомъ

$$163 \times 2\pi + 0,6.$$

Послѣднее выраженіе представляетъ одно изъ значеній, которое можно присвоить криволинейной абсциссѣ точки M . Обозначимъ вообще черезъ a величину малой дуги AM , а подъ k будемъ разумѣть цѣлое положительное или отрицательное число. Предположимъ, что, при переходѣ изъ положенія A въ M , движущаяся точка описываетъ полную окружность k разъ въ положительномъ направленіи, если k — положительное число, или $- k$ разъ въ отрицательномъ направленіи, если k представляетъ отрицательное число (т.-е. $- k$ является положительнымъ), и затѣмъ уже описываетъ малую дугу AM . Въ такомъ случаѣ все пройденное точкой пространство представляется, какъ по величинѣ такъ и по своему знаку, слѣдующимъ выраженіемъ

$$2k\pi + a,$$

въ чемъ читатель легко можетъ самъ убѣдиться. Полученный результатъ $2k\pi + a$ представляетъ *общій видъ выраженія криволинейныхъ абсциссъ точки М*, при чемъ a имѣетъ значеніе одной какой-либо изъ этихъ абсциссъ. Нѣтъ надобности предполагать, что a обозначаетъ непремѣнно наименьшую дугу $АМ$. Въ самомъ дѣлѣ, если положить, напримѣръ,

$$a' = 2k\pi + a$$

и

$$a'' = 2k'\pi + a',$$

гдѣ k и k' представляютъ цѣлыя числа, то отсюда слѣдуетъ формула прежняго вида

$$a'' = 2(k + k')\pi + a,$$

такъ какъ число $k + k'$ является такимъ же положительнымъ или отрицательнымъ числомъ, какъ k или k' .

4. Приложение.—Чтобы нагляднѣе выяснить понятіе о кратныхъ значеніяхъ криволинейныхъ абсциссъ и вмѣстѣ съ тѣмъ понять пользу ихъ употребленія, примѣнимъ ихъ къ рѣшенію слѣдующаго примѣра.

Задача.—*Двѣ подводки движутся въ противоположныя стороны по окружности, радіусъ которой равенъ километру; скорость первой подводки равна 20 километрамъ въ часъ, а скорость второй подводки равняется 30 километрамъ въ часъ; требуется опредѣлить время ихъ встрѣчи, если извѣстно, что въ полдень обѣ подводки проходятъ одновременно черезъ точку А.*

Условимся считать исходнымъ пунктомъ точку А и положительнымъ направленіе движенія первой подводки; за единицу длины принимаемъ километръ и за единицу времени часъ. Слѣдовательно, скорость первой подводки равняется $+20$, а скорость второй — -30 . Если условимся считать время съ полудня, то въ такомъ случаѣ, очевидно, что въ моментъ времени t