

Интрилигатор М.

**Математические методы
оптимизации и
экономическая теория**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
И73

И73 Интрилигатор М.
Математические методы оптимизации и экономическая теория / Интрилигатор М. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 600 с.

ISBN 978-5-458-33434-1

Книга представляет собой руководство по теории математического программирования и ее экономическому применению. В ней последовательно излагаются постановка общей задачи математического программирования, классические методы оптимизации, линейное и нелинейное программирование, теория игр и т. д. Рассматриваются проблемы, связанные с применением математического аппарата статической оптимизации в теории потребления, теории производства и т. д. Книга будет полезна всем тем, кто занимается вопросами применения экономико-математических методов в народном хозяйстве.

ISBN 978-5-458-33434-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Предисловие

1. О МАТЕМАТИЧЕСКОМ СОДЕРЖАНИИ КНИГИ М. ИНТРИЛИГАТОРА¹

Многие практические задачи хозяйственной деятельности и ряд важных вопросов экономической теории связаны с задачами определения наилучшего, оптимального варианта решения. Таковы, например, задачи выбора оптимальной производственной программы предприятия, транспортные задачи рационального распределения грузопотоков или целый комплекс проблем, связанных с оптимальным планированием народного хозяйства. Для решения задач такого рода в математической науке созданы и интенсивно разрабатываются в настоящее время новые математические методы, объединяемые под общим названием методов математического программирования.

Со времени открытия Ньютоном и Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления аппарат прикладной математики создавался в основном под влиянием запросов естественных наук (в первую очередь физики) и техники. Однако для конкретного численного решения типичных задач, возникающих в экономике, этот аппарат оказывается недостаточным. Например, многие хозяйственные проблемы, представленные в математической форме, состоят в отыскании экстремума, т. е. максимума или минимума, линейной функции нескольких переменных при наличии линейных ограничений. Классический математический анализ не содержит алгоритмов для решения задач этого типа. Независимое друг от друга создание советским математиком Л. В. Канторовичем и Д. Данцигом в США специальных методов решения этих задач — линейного программирования — явилось нача-

¹ Данный раздел предисловия написан Ф. Я. Кельманом.

лом широких исследований и в области решения многих других видов экстремальных задач. Экономические проблемы оказали существенное влияние и на разработку такой математической дисциплины, как теория игр.

В настоящее время существует огромное количество работ, посвященных различным сторонам теории математического программирования: прикладным аспектам, методам численного решения и таким элементам, которые по традиции относятся к области «чистой математики». Сейчас создается широко разветвленная теория оптимизации. Изучение методов математического программирования, особенно линейного программирования, становится необходимым для практической работы экономиста. Это отражается и в расширении математической подготовки студентов экономических вузов. Без понимания основных идей и результатов применения теории математического программирования невозможно разобраться в существе большинства важных экономико-математических моделей и основанных на них практических предложений.

Само название книги М. Интрилигатора «Математические методы оптимизации и экономическая теория» как бы разделяет ее на две части. В первой отражается стремление автора дать читателю развернутое, четкое и логически связанное представление о современном состоянии теории решения экстремальных задач. Вторая часть названия показывает, что автор ориентируется в основном на читателя, работающего в сфере экономики или готовящегося к такой работе. Требования к читателю, в общем, не выходят за пределы стандартной вузовской программы по математическому анализу и линейной алгебре. Ряд сведений может быть почерпнут либо непосредственно при чтении книги, либо из имеющихся в ней специальных математических приложений. Книга может служить в качестве учебного пособия по методам оптимизации и по математическим моделям экономики для студентов и аспирантов широкого круга специальностей. Как работа обзорного характера она будет полезной и для специалистов, занимающихся исследованием операций.

Данная книга не дает исчерпывающего изложения современного состояния какой-либо отдельной математической дисциплины, например линейного программирования, теории игр или вариационного исчисления. Ее цель — показать в систематизированной форме основные направ-

ления математической теории оптимизации в их взаимосвязи. Эта цель определяет и отбор материала, и способ изложения.

Автор начинает с постановки в гл. 2 общей задачи математического программирования, излагает известные классические методы отыскания экстремумов дифференцируемых функций, а затем в гл. 4 переходит к нелинейному программированию. Линейное программирование рассматривается как частный случай общей задачи нелинейного программирования, и основные теоремы линейного программирования доказываются с помощью теоремы Куна — Таккера, приведенной в главе о нелинейном программировании. Усвоение материала облегчается последовательным применением множителей Лагранжа и их содержательной интерпретацией. Книга содержит много иллюстративного материала в виде различных рисунков и таблиц. Например, в таблице на рис. 5.3 в наглядной форме показана связь между двойственными задачами линейного программирования. В изложении теории игр, данном в гл. 6, используется принцип аналогии с задачами линейного программирования. Так, один из центральных результатов теории игр — теорема о минимаксе — доказывается с помощью теоремы двойственности.

Теория оптимизации, рассмотренная в части II книги, является непосредственной математической базой для постановки и исследования ряда практических и теоретических вопросов экономической науки. В части III излагаются именно такие вопросы экономической теории, которые допускают постановку оптимизационных задач. Ценность этого раздела книги состоит прежде всего в описании того, как формальный математический аппарат может применяться для анализа экономических процессов. Экономические приложения теории оптимизации автор называет задачами рационального ведения хозяйства (econoptimizing). Такая терминология помогает связать воедино достаточно разнородные вопросы, включенные в книгу.

Особенностью книги М. Интрилигатора является то, что это, по-видимому, первое руководство по экономико-математическим проблемам, в котором наряду с методами математического программирования излагается также и математическая теория оптимального управления. Эти вопросы излагаются в части IV, названной «Динамическая оптимизация». Придерживаясь хотя и принятой,

но довольно условной классификации задач оптимизации на статические и динамические, автор относит последние к задачам управления. Если терминология ряда математических дисциплин, таких, как, например, математический анализ или линейное программирование, сейчас знакома широкому кругу экономистов, то смысл, в котором в настоящей книге употребляются понятия «управление» или «задача управления», нуждается в некоторых пояснениях.

В течение примерно двух последних десятилетий сформировалась новая прикладная математическая дисциплина, известная под названием теории оптимального управления, или математической теории оптимальных процессов. Развитие этой дисциплины было вызвано потребностями одной из важнейших областей технических наук — теории автоматического регулирования. В самой общей постановке проблема регулирования (управления) автоматическими устройствами сводится к выбору значений во времени некоторых величин, называемых управляющими параметрами, подчиненных ряду ограничений, при которых достигается экстремум некоторого функционала. Этот функционал в математической форме характеризует цель управления. Определение экстремума такого функционала в математической теории оптимального управления и называют задачей управления.

Математический аппарат современной теории оптимального управления включает методы вариационного исчисления, метод принципа максимума и методы динамического программирования.

Классические методы вариационного исчисления, разработавшиеся с XVIII столетия, не всегда применимы к задачам теории автоматического управления. Для решения этих задач и были созданы новые методы — принцип максимума и динамическое программирование¹. (За разработку принципа максимума группа советских математиков во главе с академиком Л. С. Понтрягиным была удостоена Ленинской премии 1962 г.)

Динамическое программирование уже нашло немало интересных приложений и при решении практических экономических задач, например при создании моделей

¹ Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, Математическая теория оптимальных процессов, М., «Наука», 1969; Р. Беллман, Динамическое программирование, перев. с англ., М., ИЛ, 1960.

календарного планирования производства. Что касается вариационного исчисления и принципа максимума, то знакомство с этими разделами теории оптимизации будет полезным для экономиста-теоретика и с познавательной точки зрения, и в свете их возможных приложений к вопросам оптимального планирования и управления в народном хозяйстве.

В западной экономической литературе последних лет имеются примеры применения этих математических методов к исследованию проблем экономического роста (см., например, библиографию к гл. 16 данной книги). На русский язык переведены монографии, в которых затрагиваются указанные вопросы¹. Использование принципа максимума для анализа модели оптимального экономического роста проведено М. Интрилигатором весьма обстоятельно. Отметим здесь, что проблема экономического роста в той форме, как она изложена в книге М. Интрилигатора, недостаточно освещена в советской и переводной экономико-математической литературе. Автор рассматривает оптимальный экономический рост в так называемой «неоклассической» модели роста, в которой предусматривается взаимозамещаемость труда и капитала. Эта модель предложена американским экономистом Р. Солоу в 1956 г. В экономико-математической литературе на русском языке значительно подробнее представлены модели экономического роста, восходящие к модели расширяющейся экономики Д. фон Неймана и к динамической модели «затраты—выпуск» В. Леонтьева.

Книга М. Интрилигатора имеет ряд общих черт с переведенной на русский язык книгой К. Ланкастера «Математическая экономика». В книге Ланкастера также рассматриваются вопросы теории оптимизации и ее приложения к моделям экономики, а математический уровень изложения в обеих книгах примерно одинаков. В то же время книга Интрилигатора отличается иной последовательностью изложения разделов теории математического программирования и в нее включен материал, который в работе Ланкастера либо совершенно не рассматривается, либо затронут лишь вскользь. Это теория игр, методы решения задач управления (вариационное исчисление,

¹ См., например, Я. Т и н б э р х э н, Х. Б о с, Математические модели экономического роста, М., «Прогресс», 1967; Л. С т о л е р у, Равновесие и экономический рост, М., «Статистика», 1974

динамическое программирование и принцип максимума) и такие разделы экономической теории, как теория экономического благосостояния, исследование проблем экономического роста с учетом замещаемости капитала и труда, а также проблема кривых безразличия в потреблении. В целом эти две книги хорошо дополняют друг друга.

К недостаткам математической части книги Интрилигатора относится несколько поверхностное описание алгоритмов решения задач математического программирования. Хотя автор стремился к математически строгой трактовке рассматриваемых проблем, однако этот принцип не всегда выдерживается для того, чтобы сделать изложение более понятным для читателя. Часто автор ограничивается формулировкой теоремы и ее разъяснением или дает упрощенную схему доказательства.

2. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАЗДЕЛОВ КНИГИ

Экономическим проблемам в книге М. Интрилигатора уделено меньше места, чем математическим. Тем не менее в ней дано полное изложение в математической форме современной политической экономии в том виде, как она преподается в высших учебных заведениях капиталистических стран. Нет ничего удивительного, что эта политическая экономия имеет явно апологетическую направленность. Иначе быть не может. Обоснование неизбежности такой апологетики известный американский экономист Мартин Бронфенбреннер видит в старом латинском изречении «*sciūs regio, eius religio*», т. е. «какая страна, такая и религия»¹. Действительно, в капиталистической стране вряд ли потребуют от студентов знания основ марксизма-ленинизма, например того известного положения, что «*историческую тенденцию капиталистического накопления*» Маркс характеризует в следующих знаменитых словах: «...Централизация средств производства и обобществление труда достигают такого пункта, когда они становятся несовместимыми с их капиталистической оболочкой. Она взрывается. Бьет час капиталистической частной собственности. Экспроприаторов экспроприируют»

¹ M. Bronfenbrenner, Notes on Marxian Economics in the United States, *The American Review*. Vol. LIV, № 6, December 1964.

(«Капитал», I)¹. Эту тему в учебниках политической экономии капиталистических стран, естественно, не обсуждают.

Обобществление средств производства неизбежно. Теория, которая этой проблеме не уделяет должного внимания, не может быть полноценной. Такой единой немарксистской экономической теории и не существует. «Экономическая теория», представленная в книге М. Интрилигатора, состоит по крайней мере из двух различных построений: во-первых, из работ Вальраса — Эрроу — Дебре и, во-вторых, из теоретических взглядов Джона фон Неймана. Они между собой никак не связаны, и ни одно из них не исчерпывает предмета экономики. При этом первое построение, наиболее модное и в книге М. Интрилигатора принимаемое за основное, явно несовершенно, так как оно не отражает внутреннюю логику развития капиталистического производства.

Капиталистическая апологетика в математической экономике проявляется в нежелании анализировать весь горизонт экономической действительности и делать соответствующие выводы из достигнутых математическим путем результатов.

Возникшая с целью отрицания трудовой теории стоимости математическая экономия в первую очередь сосредоточила внимание на так называемой микроэкономике, т. е. на теории потребительского бюджета («домашнего хозяйства») и теории предприятия («фирмы»). В учении о народном хозяйстве эти темы являются вспомогательными и ими ни Адам Смит и Рикардо, ни Маркс не занимались. «Классиками» для буржуазных экономистов стали швейцарец Леон Вальрас (1834—1910) и американец Джон Бейтс Кларк (1847—1938). Упоминают также Маршалла и Смита, но последнего — по недоразумению.

Вальрас — один из первых авторов теории «предельной полезности». Апологетика этой теории заключается в иллюзорном представлении о том, что цены товаров определяются предельными полезностями, т. е. «полезностью» товаров в сочетании с их «редкостью» (ограниченным количеством). Это верно лишь по отношению к таким «товарам», как уникальные произведения искусства, погашенные почтовые марки и т. п. (они служат средством

¹ В. И. Ленин, Полн. собр. соч., т. 26, стр. 67.

накопления). Цены же товаров, производимых и потребляемых (входящих в бюджет рабочей семьи), зависят от условий производства. И именно эти цены определяют собой предельные полезности. Например, при высокой цене молока его покупают только детям (высокая предельная полезность); при низкой цене молока готовится молочная лапша для всей семьи, причем иногда находится такой член семьи, который склонен отдавать свою лапшу собаке (низкая предельная полезность молока).

Вальраса считают также основателем статической модели «экономического равновесия», связанной своими корнями с теорией предельной полезности, так как природные ресурсы предполагаются ограниченными.

Другой основоположник математической экономики, Дж. Б. Кларк, показал себя апологетом капиталистического строя непосредственно и в явной форме. Во введении к своему главному труду он прямо заявил:

«Над обществом тяготеет обвинение в том, что оно «эксплуатирует труд». «Рабочих, как говорят, регулярно грабят, лишая их того, что они производят». ...Если бы это обвинение было доказано, всякий здравомыслящий человек стал бы социалистом, и его стремление переделать систему производства было бы мерилом и выражением его чувства справедливости. Если мы намерены, однако, проверить это обвинение, мы должны вступить в сферу производства. Мы должны разложить продукт общественного производства на его составные части — для того, чтобы увидеть, способен ли естественный эффект конкуренции дать каждому производителю ту долю богатства, которую именно он производит»¹.

В своей попытке оправдать капиталистическую систему Кларк разработал теорию «предельной производительности», изложенную у М. Интрилигатора в главе «Теория фирмы». В дальнейшем будет показано, что достигнуть своей цели ему не удалось.

В результате сочетания теорий Вальраса и Кларка возник «неоклассический подход» в современной математической экономике, так подробно изложенный в книге М. Интрилигатора².

¹ Дж. Б. Кларк, Распределение богатства, перев. с англ., М., ОГИЗ, 1934, стр. 41.

² Эбергардт Фельс называет неоклассические представления «эклетиическими» (E. M. Fell's, *Gesellschaftlich notwendige*

3. МИКРОЭКОНОМИКА: ПОТРЕБИТЕЛЬСКИЙ БЮДЖЕТ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Математический аппарат, разработанный применительно к проблемам микроэкономики, получил в настоящее время всеобщее признание. Без таких концепций математической экономики, как производственные функции, предельные значения, экстремумы — максимальные и минимальные значения — и другие, невозможно успешно построить экономико-математические модели, имеющие своим назначением служить вспомогательным орудием народнохозяйственного планирования.

Но решение некоторых отдельных вопросов применения математических методов в микроэкономике нуждается в существенной корректировке с экономической точки зрения. Это относится, в частности, к теории личного потребления. Основное понятие в ней — «функция полезности» — конструируется в книге М. Интрилигатора на основе нескольких математических аксиом. В дальнейшем эта функция получила различные экономические толкования. Наиболее важная область ее применения относится к совокупностям товаров, входящим в потребительский бюджет. И здесь целесообразно вместо «полезности» принять более определенный термин «уровень потребления». Это будет сравнительная характеристика с точки зрения потребителя удовлетворения его потребностей в результате фактического потребления той или иной совокупности товаров, составляющих его бюджет.

В такой постановке вопроса о «функции полезности» вызывает решительные возражения аксиома «ненасыщения» (стр. 203), играющая у М. Интрилигатора немаловажную роль в «экономике благосостояния» (стр. 353). «Ненасыщение» означает не что иное, как включение в расходную часть потребительского бюджета накопления (сбережения) в товарной или денежной форме. Но нет достаточных оснований для того, чтобы сбережения, предназначенные для обеспечения желательного уровня жизни в будущем, рассматривать наравне с расходами на продукты питания, развлечения и т. п., производимыми для поддержания уровня потребления в данном, текущем периоде.

Arbeit, *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Vol. 184, September 1970).

Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн, чьи попытки измерения полезности рассматриваются М. Интрилигатором в разделе 7.6, полностью отдавали себе в этом отчет:

«... В рамках наших непосредственных целей было бы излишним усложнением запутываться в задачах предпочтения между событиями в различные периоды будущего. Известно, что это дает интересные, хотя до сих пор и чрезвычайно темные, связи с теорией сбережений и процента»¹.

Реальной экономической величиной, которую следует рассматривать в потребительском бюджете в данном промежутке времени, является общий расход семьи, определяемый как количество фактически потребленных товаров и услуг, умноженных на их цены. Расходы на товары длительного пользования должны включаться в бюджет потребителя по ценам их проката (на жилище — по квартирной плате), причем именно эти цены, как отмечал Энгельс, следует сопоставлять со стоимостями².

Применение математического анализа в теории личного потребления имеет в условиях социалистического хозяйства практическое значение, так как он может служить основой для успешного прогнозирования платежеспособного спроса населения.

Но непосредственное оперирование неизвестными и, возможно, непознаваемыми «функциями полезности» не дает приемлемых результатов. При конструировании «функций полезности» высказываются обычно такие соображения, которые имеют всегда в той или иной степени произвольный характер.

Между тем точные результаты получаются при анализе особого состояния бюджета потребителя, когда, несмотря на изменения структуры потребляемых товаров (вследствие изменения соотношений между ценами), остается неизменным его общий «уровень потребления». Математически это состояние для случая двух товаров характеризуется уравнением кривой безразличия $U(x_1, x_2) = \text{const}$, приведенным на стр. 209.

Эффективность применения концепции постоянного уровня потребления в теории личного потребления обу-

¹ Дж. фон Нейман и О. Моргенштерн, Теория игр и экономическое поведение, перев. с англ., М., «Наука», 1969, стр. 45.

² К. Маркс и Ф. Энгельс, Соч., т. 18, стр. 266.