

нований нововременного мышления, ведущих к гуманизации научного знания? Эта трудность в конце века остаётся вполне реальной и требующей своего преодоления, поэтому для всех, озабоченных судьбами науки в XX в., настоящая книга не может не представить интереса.

В предлагаемых вниманию читателей статьях особый акцент делается на соотношении науки и религии. Это можно объяснить прежде всего существованием некоторого пробела в исследованиях науки с точки зрения её соотношения именно с религией как сферой духовной деятельности за её пределами. Действительно, в XX в. основное внимание уделялось выяснению отношений между наукой и философией, наукой и социальными структурами, наукой и экономикой, наукой и культурой, и в гораздо меньшей степени — наукой и религией. Это связано, по-видимому, с особым типом взаимодействия науки и религии в новое время. Этот особый тип отношений хорошо выражает Гейзенберг, когда он пишет об отстранённости религии от науки, ссылаясь на некоторые особенности самого христианства. Христианский Бог возвысился над миром, Он непостижим, недостижим. Он удалился на небеса, поэтому и Землю вроде как имело смысл рассматривать независимо от Бога. «В этой связи по поводу науки нового времени правомерно было бы даже говорить о специфически христианской форме обезбоженности, а тем самым и яснее понять, почему в других культурах не происходят подобные процессы»⁵. Само христианство как бы отделило мир, вселенную от Бога и отдало их науке для изучения. Природные объекты изучаются как существующие сами по себе, независимо от наблюдателя-исследователя и, в конечном итоге, от самого Бога. В нормальные (по Куну) периоды развития науки учёный может заниматься своими экспериментами, никак не соотнося свою деятельность с верой (или не верой) в Бога.

Проблема соотношения науки и религии становится актуальной, когда речь идёт об основаниях науки, когда встаёт вопрос о её происхождении, например, о возникновении науки нового времени. Здесь уже не обойтись без философии и без теологии. Религия нужна учёному и в другом случае: ему важно быть уверенным, что мир действительно существует, что это не иллюзия, что он упорядочен. О таком значении религии для учёного Эйнштейн писал, что он не может «найти выражения лучше, чем «религия», для обозначения веры в рациональную природу реальности, по крайней мере той её части, которая до-

ступна человеческому сознанию. Там, где отсутствует это чувство, наука вырождается в бесплодную эмпирию»⁶. По мнению Эйнштейна, космическое религиозное чувство является сильнейшей и благороднейшей из пружин научного исследования. Эйнштейн отказывается обосновывать и доказывать свою веру в рациональное устройство мира. В беседе с Рабиндранатом Тагором он говорит, что если есть реальность, не зависящая от человека, то должна быть истина, отвечающая этой реальности, и отрицание первой влечёт за собой отрицание последней. «Нашу естественную точку зрения относительно существования истины, не зависящей от человека, нельзя ни объяснить, ни доказать, но в неё верят все, даже первобытные люди. Мы приписываем истине сверхчеловеческую объективность. Эта реальность, не зависящая от нашего существования, нашего опыта, нашего разума, необходима нам, хотя мы и не можем сказать, что она означает»⁷. На вопрос Тагора, почему он так уверен в объективности научной истины, Эйнштейн отвечает, что не может доказать правильность своей концепции, что это — его религия.

В теологии и в религиозной философии проблема религии и науки, религии и научной рациональности, разума Божественного и разума естественного обсуждается постоянно. Если наука в спокойные периоды своего развития, когда не обсуждаются её основания и возможности существования как таковой, вполне может и «забыть» о религии, о Боге, без ущерба для профессиональной деятельности учёного, оставаясь в рамках земного материального мира, то религия постоянно вынуждена задумываться о влиянии рационального мышления, полностью принадлежащего земному, посюстороннему миру, на характер интерпретации священных текстов, на отправление религиозных ритуалов, на чтение молитвы как обращения к трансцендентному Богу, на общение верующих с служителями церкви и т.д. Без земного рационального мышления (а в новое время это прежде всего научное мышление) религия обойтись не может, поэтому для неё весьма существенна проблема границы науки и религии, пожалуй, даже более существенна, чем для науки.

Для некоторых из авторов книги интерес к проблеме границ науки именно с точки зрения её соотношения с религией имелась ещё причина и «субъективного» характера: мы уже занимались этой проблемой, работая над коллективной монографией «Философско-религиозные истоки науки» под редакцией П.П.Гайденко⁸. Увлечшись темой и увидев в ней новые возможности для дальнейшей разработки, мы продолжили исследование. В двух первых статьях (В.Н.Катасонова и Т.Б.Романовской)

вопрос о границах науки обсуждается на базе конкретного материала из области науки: теория множеств Кантора, в первом случае, и физические теории конца XX в. — во втором. А.А.Печёнкин знакомит нас с положением дел на переднем крае современной философии науки с точки зрения способов определения науки и выявления её границ. В книге предприняты и исторические исследования, проблема границ науки в прошлом рассмотрена в остальных статьях: Античность, раннее христианство (Ю.А.Шичалин, С.В.Месяц и Е.Н.Молодцова), широкая историческая перспектива от Возрождения до наших дней представлена в статье В.П.Визгина, русская философия начала века в лице С.Н.Булгакова присутствует в статье Л.А.Марковой. Несмотря на широкий разброс рассматриваемых в книге исторических периодов и разнообразие точек зрения тех мыслителей, идеи которых подвергаются анализу, в монографии присутствует, как мы надеемся, единое направление рассуждений: что нам позволяет говорить именно о науке и в Античности, и в Средние века, и в новое время, и в XX в.? Как наука определяется, каким образом фиксируются её пределы, границы в эти далёкие друг от друга исторические эпохи такими разными мыслителями? В XX в., подобно тому, как это происходило на рубеже других эпох (между Средними веками, например, и новым временем), мы являемся свидетелями действительно фундаментальных изменений в основаниях естествознания, и для нас является насущным вопрос, можем ли мы продолжать говорить о науке в прежнем смысле слова. Если же этот смысл меняется, то в каком направлении, как трансформируются отношения науки с культурой в целом, с религией, с социумом, где пролегают границы между ними? Именно такого рода вопросы волновали авторов настоящей книги, и они, каждый по-своему, на своём материале, пытались на них ответить. Насколько успешно — судить читателю.

Примечания

- ¹ Гейзенберг В. Шаги за горизонт. С. 192.
- ² Там же. С. 295.
- ³ Там же. С. 303-304.
- ⁴ Там же. С. 192-193.
- ⁵ Гейзенберг В. Физика и философия. Часть и целое. М., 1998. С. 123.
- ⁶ Эйнштейн А. Письмо Соловину от 1 января 1951 г. // Эйнштейн А. Собр. науч. тр. М., 1967. Т. IV. С. 564.
- ⁷ Эйнштейн А. Природа реальности. Беседа с Рабиндранатом Тагором // Там же. С. 132.
- ⁸ Философско-религиозные истоки науки. М., 1997.

В.Н.Катасонов

ЛЕСТНИЦА НА НЕБО
(генезис теории множеств Г.Кантора
и проблема границ науки)

Введение

Наука, чтобы остаться эффективным и трезвым предприятием, вынуждена всегда задумываться о своих границах. Подобное продумывание обычно осуществляется в рамках тех паранаучных дисциплин, которые занимаются проблемами обоснования научного знания: методологии и философии науки. Утеря чувства границ всегда приводила и приводит науку к утопическим проектам, которые суть своеобразный род мечтаний, замыкающих человека в некоторую «виртуальную» реальность. Эта виртуальная реальность ложного проекта, нередко, тем герметичней отгораживает человека от *истинной реальности*, чем более состоятельной с абстрактно-логической точки зрения выглядит соответствующая научная теория.

Можно рассматривать как внутренние, так и внешние границы науки. *Внутренние границы* обусловлены самим научным методом. Познание не исчерпывается только научным познанием. Последнее имеет свои специфические особенности. Еще Паскаль учил нас различать «*raison géométrique*» и «*raison de finesse*». Наука сама выделяет изучаемую ею сферу реальности, сама конструирует свой предмет и задает свои правила, тем самым определяя и свои границы. Однако внутренние границы науки хотя всегда и наличные, тем не менее исторически достаточно подвижны. Наука стремится раздвинуть свои границы как «вширь» — экстенсивно, через включение в исследование все

новых и новых областей, так и «вглубь» — через более критический пересмотр своих методов и предпосылок. Наука в этом смысле предприятие всегда развивающееся, растущее, с подвижными внутренними границами.

Однако ограничения науки возникают и по другой причине. Наука, используя определенный методологический инструментарий, стремится *рационализировать* изучаемые фрагменты реальности, дать их образ в виде некой связной логической системы. Но не все в реальности допускает такую рационализацию, что и создает *внешние границы* для науки. В жизни присутствует и иррациональное, причем двояко: и как до-рациональное, и как сверхрациональное. В реальности есть место хаосу, в котором разуму, так сказать, «не на что опереться»... В то же время есть и сверхрациональное — то, доступ к чему был возможен, например, в неоплатонизме, только благодаря экстазу (мистика Единого). В мировых авраамитических религиях это есть Бог-Творец, познаваемый не столько через наше изучение Его, сколько через Его нам откровение... В этой сфере также возможно (и действительно) познание, но уже не в его научной форме, предполагающей целый набор философских и методологических предпосылок: субъект-объектное разделение, возможность методологически контролируемого и повторяемого эксперимента, принудительную доказательность результатов, общезначимость и т.д.

Трезвая позитивная наука, не поддающаяся соблазну сциентистской идеологизации своих методов познания, в своем реальном историческом существовании всегда осознает существование этих границ. *Искусство науки* в том и состоит, собственно говоря, чтобы, *не переходя этих границ*, объяснить все, что может быть объяснено, рационализировать все по природе рационализуемое, не соблазняясь на невозможное. Однако фундаментальные научные теории вынуждены подходить к этим границам, и тогда наука является нам захватывающую драму человеческого познания, в дерзновениях, прельщениях и крушениях которой, нередко довольно трагических, мы учимся лучше различать: что мы действительно знаем, во что мы верим, а чего нам просто очень хочется...

Одной из таких фундаментальных теорий является теория множеств, лежащая в основании всей сегодняшней математики и, следовательно, всего математического естествознания. На примере истории ее генезиса, возникновения и обсуждений ее «парадоксов» и апорий проблема границ науки выступает в высшей степени рельефно и характерно для науки заканчивающегося столетия¹. К конкретному обсуждению всего этого мы сейчас и перейдем.

І. «Философия бесконечности» Г.Кантора

1. Актуальная и потенциальная бесконечности

Опубликование Г.Кантором первых работ по теории множеств в 70-х — начале 80-х годов прошлого столетия, вводящих в рассмотрение так называемые мощности актуально бесконечных множеств и арифметики бесконечных чисел, вызвало сразу же серьезное сопротивление как в среде математиков, так и в среде философов. Вопрос о существовании актуально бесконечных множеств был классическим философским вопросом, и господствующим мнением здесь со времен античности было отрицание самой возможности таких множеств. Кантор же претендовал давать какие-то градации этих невозможных бесконечностей. Ситуация была довольно скандальной, и Кантору пришлось достаточно рано вступить не только в математическую, но и в философскую дискуссию. Точнее, положение было еще драматичней: говоря с математиками, Кантор был вынужден использовать философскую терминологию, чтобы хоть как-то оправдать всю необычность своих подходов, а полемизируя с философами, использовать свои новые математические конструкции, ибо только они могли конкретно показать ограниченность старых представлений². Так один из основных первоначальных трудов Кантора по теории множеств, специально обсуждающий концепцию бесконечных чисел, называется «Основы общего учения о многообразиях. Математически — философский опыт учения о бесконечном». Он был выпущен отдельной брошюрой в 1883 году. В предисловии к этой работе Кантор откровенно пишет: «Публикуя это сочинение, я не могу не упомянуть, что когда я писал его, то я имел в виду главным образом двоякого рода читателей: с одной стороны, философов, следивших за развитием математики вплоть до новейшего времени, а с другой — математиков, которые знакомы с важнейшими фактами древней и новой философии»³. Как видим, требования к читателю были достаточно высокие. А поскольку большинство математиков и философов второй половины XIX века уже не удовлетворяло им, постольку работы Кантора раздражали как одних, так и других. Достаточно широкий научный кругозор как требуемое условие «безболезненного» восприятия и в особенности обсуждения новой теории был моментом, существенно затруднившим ее вхождение в научный обиход.

Введение актуальной бесконечности как базисного научного понятия в математику, как почти всякое значительное нововведение в науке, создало столько же новых проблем, сколько и позволило решить старых. Точнее говоря, создало, конечно же, больше. Однако с самого начала удалось провести аккуратное различие понятий в области, где столь долгое время было много путаницы. Кантор, вслед за Больцано, настойчиво объяснял различие актуальной и потенциальной бесконечностей. «Что касается математической бесконечности,... она, как мне кажется, выступает прежде всего в значении некоторой переменной, то растущей вверх всяких границ, то убывающей до произвольной малости, но всегда остающейся *конечной* величиной. Такое бесконечное я называю *несобственно бесконечным*»⁴. Вместе с этим понятием несобственной (или *потенциальной*) бесконечности в математике встречаются примеры и другого рода, пишет Кантор. Таково, например, использование бесконечно удаленной точки комплексной плоскости в теории функций комплексной переменной. Здесь эту точку рассматривают в собственном смысле, т.е. рассматривают ее окрестности, поведение функции в этой точке и т.д. Благодаря преобразованиям, изучаемым в этой теории, бесконечно удаленная точка становится равноправной со всеми другими конечными точками плоскости. «Если бесконечное выступает в подобной вполне оправданной форме, то я называю его *собственно бесконечным*»⁵. Действительно, с XVII столетия в математике начинают использовать актуально бесконечные величины. Наряду с бесконечно удаленной точкой в проективной геометрии рассматривают также бесконечно удаленные прямые и плоскости. Основное понятие математического анализа — *дифференциал* — также рассматривался многими как актуально бесконечно малая⁶.

Кантор четко различает три типа величин: конечные, потенциально бесконечные и актуально бесконечные. Вторые не есть собственно бесконечные, а представляют собой лишь *переменное конечное*. Собственно бесконечное, как вводит его Кантор, представляет собой одновременно и *определенное* бесконечное, бесконечные порядковые числа. Эта точка зрения находилась в вопиющем противоречии с более чем двухтысячелетней традицией понимания бесконечного. Патриархом этого понимания был Аристотель, настойчиво утверждавший: может существовать только потенциальная бесконечность. «Вообще говоря, бесконечное существует таким образом, что всегда берется иное и иное, а взятое всегда бывает конечным, но всегда разным и разным. Так что бесконечное не следует брать как определенный предмет, например как человека или

дом, а в том смысле, как говорится о дне или состязании, бытие которых не есть какая-либо сущность, а всегда находится в возникновении и уничтожении, и хотя оно конечно, но всегда разное и разное»⁷. Это настойчивое отталкивание античной мысли от актуально бесконечного, понимание бесконечного только как процесса, как становления, бесконечность которого, собственно, сводилась к непрерывности становления, имеют свою основу в особом отношении античной мысли, — и шире: всей культуры, — к форме, в *почитании* формы, *обожествлении* ее⁸. Бесконечное есть для античности неоформленное, безобразное, не ставшее и на основании всего этого как бы несуществующее.

Христианство внесло здесь свою существенную поправку: в сознание европейской культуры вошла актуально бесконечная сущность: Бог-Творец. И тут обозначились (и реализовались) разные возможности. Те, кто признавал исходную несоизмеримость Бога и человека, Творца и Твари, в частности божественного ума и человеческого, смиренно преклонялись перед *тайной* божественного всемогущества, всеведения, вечности, короче, перед тайной божественной *бесконечности*. О ней мы можем знать только через откровение и только через смирение верующего ума открываются человечеству высшие тайны познания. Другая точка зрения также говорила об откровении, но больше об откровении *естественном* (а не историческом), в природе, в твари, и в особенности об образе Божиим, отраженном в человеке. Человек был сотворен живой личностью, он обладал разумом, волей, чувством, творческими способностями. Это соблазняющее богоподобие⁹ человека открывало также путь и к *спекулятивному богословию*, к выведению знания о Боге не из откровения, а из рассуждений, из интеллектуальных и философских конструкций. Традиция спекулятивного богословия мощно расцвела внутри западноевропейской схоластики, пережила ее и существенно повлияла на становление новоевропейской науки. Интенциями именно этой традиции питалась и мысль Кантора.

Кантор как раз и хотел взять бесконечность «как человека или дом», говоря словами Аристотеля, как некий целый законченный предмет, как бесконечное число. И более того. Это число оказывалось не единственным (традиционно обозначавшимся символом ∞). Область бесконечных чисел оказывалась сама бесконечной, со своими особыми свойствами. Вся идущая от античности огромная традиция критики возможности актуально бесконечного есть для Кантора лишь постоянно повторяю-

щийся паралогизм. «Все так называемые доказательства невозможности актуально бесконечных чисел являются, — как это можно показать в каждом отдельном случае и заключить из общих соображений, — ошибочными по существу и содержат $\pi\rho\acute{o}\tau\omicron\nu\ \phi\epsilon\acute{\upsilon}\delta\omicron\varsigma$ ¹⁰ в том, что в них заранее приписывают или, скорее, навязывают рассматриваемым числам все свойства конечных чисел. Между тем бесконечные числа, если только вообще их приходится мыслить в какой-нибудь форме, ввиду своей противоположности конечным числам, должны образовывать совершенно новый вид чисел, свойства которых зависят исключительно от природы вещей и образуют предмет исследования, а не нашего произвола и наших предрассудков»¹¹. Собственно, в разоблачении этих «предрассудков» и состоит в основном канторовская критика предшествовавших философских воззрений, направленных против актуальной бесконечности. Кантору пришлось вести эту полемику, так как и в среде математиков, и в среде философов сразу же после опубликования первых результатов по теории ординалов (бесконечных чисел) большинство, как мы уже сказали выше, выступило против этой опрокидывающей традиционные представления теории.

Однако прежде чем разбирать детали этой полемики, нам необходимо иметь элементарное представление о теории множеств.

2. Элементарные понятия «наивной» теории множеств

Теория множеств в той форме, в которой ее строил сам Кантор, еще до появления парадоксов, до четкого выделения ее аксиоматического базиса и использования современных средств математической логики, называется традиционно «наивной» теорией множеств. Она предполагает постоянную апелляцию к некоей общепринятой и неопределимой *интуиции множества*. И здесь должно заметить, что парадоксы и вся дальнейшая история развития теории множеств и представляли собой, по существу, как раз *критику* этой основной интуиции.

Исходное понятие множества тем самым предполагается наличным. Множества можно рассматривать в двух аспектах: а) как неупорядоченные и б) как наделенные некоторым порядком их элементов. Ясно, что первое рассмотрение есть более общий подход. Для любых (т.е., вообще говоря, неупорядоченных) множеств определяется понятие *мощности* множества. Сам Кантор определяет мощность следующим образом: «Мощностью тью» или «кардинальным числом» множества M мы называем то

общее понятие, которое получается при помощи нашей активной мыслительной способности из M , когда мы абстрагируемся от качества его различных элементов m и от порядка их задания»¹². Кантор обозначает кардинальное число для множества M (две черты означают двойное абстрагирование). Для мощностей определяются понятия равенства, больше, меньше. Мощности множеств A и B равны (или множества эквивалентны), если существует взаимно однозначное отображение множества A на *все* множество B . В этом случае пишут $A = B$. Если же существует взаимно однозначное отображение A на часть множества B , но не существует взаимно однозначного отображения B на часть A , тогда говорят, что $A < B$. Для кардинальных чисел (мощностей) строится своя арифметика. Суммой множеств A и B (без общих элементов) называется множество, состоящее из элементов как A , так и B : оно обозначается $A \cup B$. Тогда сложение кардиналов по определению есть:

$$A+B = \overline{\overline{A \cup B}}$$

Можно показать, что определение это корректно и получающаяся операция коммутативна и ассоциативна. Произведением двух множеств $A=\{a\}$ и $B=\{b\}$ называется множество $C=A \bullet B$, состоящее из пар $\{(a;b)\}$, где $a \in A$, $b \in B$. Соответственно определяется умножение кардиналов

$$A \bullet B = \overline{\overline{A \bullet B}}$$

Так определенное умножение коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения. Можно аналогично определить и возведение множеств в степень, которое также будет обладать традиционными (для чисел) свойствами. Мы тем самым построили некоторую арифметику кардинальных чисел. Для конечных множеств эта арифметика совпадает с обычной арифметикой натуральных чисел. Но поскольку с самого начала предполагалось, что рассматриваемые множества могут быть и бесконечными, тем же самым получена и арифметика бесконечных кардинальных чисел. Свойства бесконечных кардиналов уже отличаются от свойств конечных чисел. Так пусть $\aleph_0$ — первый бесконечный кардинал¹³, т.е. мощность множества натуральных чисел $\aleph_0 = \{n\}$. Тогда нетрудно показать, что $\aleph_0 > n$, $\aleph_0 + 1 = \aleph_0 + n = \aleph_0$; $\aleph_0 \bullet 2 = \aleph_0 \bullet n = \aleph_0 \bullet \aleph_0 = \aleph_0$; $\aleph_0^2 = \aleph_0^3 = \aleph_0^n = \aleph_0$