

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	7
1. Обогащение классической сентенциальной логики операторами истинности и ложности	12
1.1. Понятия истинности и ложности	12
1.2. Классическая логика и ее интерпретация	15
1.3. Основные содержательные положения логики с операторами истинности и ложности	17
1.4. Формулировка классической сентенциальной логики с операторами истинности и ложности FL2	18
1.5. Аксиоматическая теория истины для классической сентенциальной логики	24
1.6. Семантические и несемантические формулировки законов противоречия и исключенного третьего	26
2. Обобщение классической логики на область предложений, не являющихся двузначными	29
2.1. Содержательные положения логики с операторами истинности и ложности в расширенной области	31
2.2. Формулировка логики ложности FL4	32
2.3. Теорема дедукции	33
2.4. Интерпретация языка логики FL4	35
2.5. Непротиворечивость логики FL4	37
2.6. Семантическая полнота логики FL4	40
3. Соотношения логики FL4 с четырехзначными логиками	43
3.1. Четырехзначная логика Белнапа	44
3.2. Логика тавтологических следований E_{fde} и матрица Смайли	49
3.3. Логика истины фон Вригта	51
3.4. Комбинированные логики Смирнова	53
3.5. Мультиимпликативность логики FL4	59
4. Классификация формул с одной переменной	60
4.1. Расширение области определения операторов	61
4.2. 9 видов отрицаний	64
4.3. 9 видов операторов утверждения, неэлиминируемость оператора истинности	65
4.4. Виды противоречий	66
4.5. Виды тавтологий. Различные формулировки законов логики	68
4.6. Бивалентные и трехвалентные формулы	70
4.7. 15 областей универсума предложений	72

5. Алгебра ложности FA4	74
6. Сублогики логики FL4 и их соотношение с трехзначными логиками	77
6.1. Логика FL3N	77
6.1.1. Логика Клини	77
6.1.2. Логика Бочвара	79
6.1.3. Логика Лукасевича	81
6.1.4. Логика Гейтинга и Геделя	88
6.1.5. Логика Васильева	89
6.2. FL3B и паранепротиворечивые логики	92
6.2.1. Логика Д'Оттавиано – да Коста	92
6.2.2. Логика антиномий Асенхо	93
6.2.3. Логика парадоксов Приста	94
6.2.4. Логика Сетте	95
6.2.5. Логика Арруды V1	96
6.2.6. От двух выделенных значений к одному	97
7. Условия применимости классической и неклассических логик в рамках языков неклассических логик	98
7.1. Условия применимости классической логики	99
7.2. Условия применимости 3-значных логик	101
8. Обогащение языка логики FL2 кванторами	103
9. Символическая логика символьных выражений	108
Заключение	118
Приложение 1	122
Приложение 2	130
Литература	138
Resume	143

Введение¹

В начале XXI века проблематика, связанная с исследованием концепций истинности, продолжает оставаться одной из центральных для логики, философии и методологии науки.

Парадоксы, обнаруженные в основаниях теории множеств (Б. Расселом и другими), затронули и классическую концепцию истины, восходящую к Аристотелю. Подразделение известных парадоксов на логические и семантические было предложено Ф. Рамсеем.

Начало прошлого XX века характеризуется активной исследовательской работой в области как оснований математики, так и логики. При этом были подвергнуты критике традиционные законы логики (Л. Брауэр, Н. Васильев, Я. Лукасевич, К. Льюис). Эти исследования, а также ряд проблем, возникших в связи с семантическими парадоксами, привели к созданию неклассических логик и новых подходов к концепции истины.

Современный подход к теории истины обычно связывают с семантической теорией истины Тарского. В ней А. Тарский предложил общий метод построения формально корректного определения понятия «быть истинным предложением» для ряда формализованных языков.

Обнаруженные А. Тарским проблемы, связанные с определением истины для «достаточно богатых» языков, побуждали исследователей искать новые пути развития концепции истины. Интересные, многообещающие и оригинальные подходы содержатся в работах С. Крипке, Н. Белнапа, фон Вригта. Идея Н. Васильева о различении логики и металогики, то есть двухуровневых логик, продолжала развиваться в работах А. Арруды, В. А. Смирнова. К ней примыкает идея Д. Бочвара о различении внешних и внутренних связей. Идеи С. Крипке связаны как с использованием частично определенного предиката истины, так и с семантикой возможных миров.

¹ Работа выполнена при поддержке РФНФ, грант № 02-03-18287.*

Один из подходов к проблеме истинности и ложности, позволяющий выявить целый ряд важных аспектов этой проблемы, связан с использованием многозначных логик. Начало такому подходу положено Д.Бочваром.

Задачи, поставленные в связи с разработкой и применением искусственного интеллекта, которые имеют отношение к обрабатываемой информации и поэтому актуальные для развития современных компьютерных систем, заставляют по-новому взглянуть на проблемы истинности и ложности.

Существует ли определение термина «истинное предложение»? Несмотря на многочисленные исследования в этой области, до сих пор актуальным остается проблема рассмотрения термина «истинное предложение» в общем случае. Это по-прежнему открытый вопрос, на который не получен общепризнанный ответ. Определение предиката истины имеется только для ряда частных случаев формализованных языков.

Этот вопрос может быть поставлен иначе:

«Как употребляются в языке понятия истинности и ложности?», или в более формальном виде:

«Как употребляются в языке логики понятия истинности и ложности?».

Таким образом, обоснование и построение логики с предикатами и операторами истинности и ложности, учитывающей и содержательно и формально основные положения и следствия вышеуказанных концепций и логик, представляется вполне актуальным.

Как уже отмечалось выше, исследование проблемы истины восходит своими корнями к античности. Так, уже софистами в античности был сформулирован в числе других парадокс лжеца. Подход к определению истины у Аристотеля задал ее понимание [Аристотель 1976] «истину говорит тот, кто считает разъединенное разъединенным и связанное связанным, а ложное – тот, кто думает обратное тому, как дело обстоит с вещами» и стал доминирующим в последующие века.

В начале XX века в логике и математике были открыты новые типы парадоксов, существенным образом затронувших основные положения наивной теории множеств, заставившие по-новому взглянуть на проблему истины и сыгравшие важную роль в развитии логики (в первую очередь – логико-семантических исследований и неклассических логик).

Новый этап в исследовании и развитии концепции истины связан с теорией истины Тарского [Tarski A. 1933], сразу ставшей

классической. В ней А.Тарский установил, что существенными предпосылками, приводящими к семантическим антиномиям, являются:

(I) семантически замкнутый язык,

(II) допущение, что в этом языке действуют обычные законы логики.

Поэтому, чтобы не допустить появления парадоксов, он принял решение не пользоваться семантически замкнутым языком. Вместо последнего он использовал два разных языка – объектный язык и метаязык. Объектный язык он предложил отделить от метаязыка, тем самым сделав невозможным появление семантических парадоксов типа парадокса лжеца.

Сам А.Тарский утверждал, что основной результат его исследования заключается в следующем: необходимое условие для удовлетворительного определения истины в метаязыке состоит в том, что метаязык должен «быть существенно богаче» объектного языка. В случае невыполнения этого условия термин «истинно» необходимо включить в список неопределяемых терминов метаязыка, а фундаментальные свойства понятия истины задавать аксиоматически.

Многие исследователи согласились с тем, что при проведении логических исследований необходимо различать объектный язык и метаязык, и, в дополнение к этому, логики этих двух типов языков могут быть разными. Идея двух уровней логики была намечена уже Н.Васильевым.

Различные пути построения концепции истины могут быть классифицированы в зависимости от того, какие логики принимаются для объектного языка и метаязыка, а также какой подход был избран: дефиниционный или аксиоматический.

Поскольку формулы языка логики, как содержащие, так и не содержащие семантические предикаты, могут рассматриваться как классически так и неклассически, то имеется 4 варианта их рассмотрения. Перечислим эти варианты, записывая предложение «Формулы языка логики, не содержащие семантические предикаты, рассматриваются классически» сокращенно как «не семантические – классически» и т.д. Язык может характеризоваться, по крайней мере, двумя уровнями: уровнем объектного языка и уровнем метаязыка.

- 1) семантические – классически,
не семантические – классически.
- 2) семантические – классически,
не семантические – неклассически.

- 3) семантические – неклассически,
не семантические - классически.
- 4) семантические – неклассически,
не семантические - неклассически.

Теория истины Тарского может быть отнесена к первому варианту, к нему же относится концепция Гупта-Херцбергера.

О втором варианте имеет смысл говорить, когда для формул объектного языка применяется неклассическая логика, а для формул метаязыка – классическая логики. Такая трактовка метаязыка была принята в той или иной форме рядом логиков. Она обнаруживается в трехзначной логике Лукасевича для формул с модальными операторами Lp и Mp ; в логике Бочвара для формул $\uparrow p$ и $\uparrow \neg p$; в формализованной А.Аррудой логике Васильева VI для формулы $\neg p$; в принципах введения значений истинности, предложенных А.А.Зиновьевым для метавысказываний о значениях истинности ($P \leftarrow v$); в системе интенционального следования Войшвилло для формул метаязыка Tr/α и Fp/α ; в метатеории логик первопорядкового следования Попова для формул метаязыка T_1p и F_1p ; в логиках истины фон Фригта для формулы Tr ; в комбинированном исчислении высказываний и событий Смирнова для формулы θp в системе SM .

Из многозначных интерпретаций для логик, принимающих такую трактовку метаязыка, выделим четырехзначные интерпретации. Так, фон Фригт для логики истины принимает четыре значения («univocally true», «univocally false», «true and false», «neither true nor false»). В исследованиях по искусственному интеллекту Н.Белнап в статье «Как нужно рассуждать компьютеру» предлагает оценивать поступающую в компьютер информацию в терминах истины и лжи, используя четыре оценки: только истинно, только ложно, оба (и то и другое), ни одно (ни то, ни другое), обозначенные как T , F , B , N . Для двух последних значений имеются определенные аналогии с пресыщенными оценками и истиннозначными провалами в семантике возможных миров.

Отмечается также, что в индийской логике имеется традиция рассматривать тезис с четырех сторон (чатушкотика), как, например, в знаменитом вопросе к Будде «Мир или вечен, или не вечен, или вечен и не вечен, или ни вечен, ни не вечен?».

Таким образом, идеи логик с четырехзначной интерпретацией и сходными по смыслу значениями истинности имеются как у древних, так и у современных мыслителей, как на Востоке, так

и на Западе. Подобные логики могут предназначаться для рассуждений как естественного, так и искусственного интеллекта.

В подходе Крипке-Фефермана-Гилмора допускается использование предиката истины как частично определенного; формулы языка логики, не содержащие семантических предикатов, рассматриваются ими классически, чем реализуется третий вариант.

К четвертому варианту относятся логические системы IM, INW построенные В.А.Смирновым в комбинированном исчислении высказываний и событий.

В исследованиях Е.Д.Смирновой, использующей семантику возможных миров, рассматриваются по отдельности все четыре указанных выше варианта.

Особенностью развиваемой в монографии концепции истины и строящейся на ее основе логики является то, что предикаты и операторы истинности и ложности включены в объектный язык исчисления. В этом состоит отличие от подходов, требующих отделения терминов, имеющих метаязыковое происхождение, от языка-объекта. Предикат истинности не определяется, а его основные свойства задаются системой аксиом. Логика с предикатами и операторами истинности и ложности характеризуется также тем, что в ней к высказываниям, префиксированным операторами истинности и ложности применима классическая логика, в то время как к произвольным высказываниям применима неклассическая логика. Тем самым предлагаемая в монографии логика с предикатами и операторами истинности и ложности рассматривается в рамках второго варианта, при этом учитываются и другие подходы.

Автор приносит благодарность коллегам за стимулирующие обсуждения, критические замечания и интерес к высказанным идеям А.М.Анисову, П.И.Быстрову, В.Л.Васюкову, И.А.Герасимовой, Г.В.Гриненко, А.А.Зиновьеву, Ю.В.Ивлеву, А.С.Карпенко, Е.Е.Ледникову, В.М.Попову, Е.Д.Смирновой, А.В.Чагрову, В.И.Шалаку. В свое время автору помогли Е.А.Сидоренко и В.А.Смирнов.

1. Обогащение классической сентенциальной логики операторами истинности и ложности

В этой главе будут рассмотрены следующие темы:
Понятия истинности и ложности
Классическая логика и ее интерпретация
Основные содержательные положения логики с операторами истинности и ложности
Формулировка классической сентенциальной логики с операторами истинности и ложности FL2
Аксиоматическая теория истины для классической сентенциальной логики
Семантические и несемантические формулировки законов противоречия и исключенного третьего

1.1. Понятия истинности и ложности

В логической семантике имеется ряд концепций и теорий истины. Понятия истинности и ложности рассматриваются в различных подходах и теориях по крайней мере трояким образом в следующих смыслах:

- 1) как предикат,
- 2) как оператор
- 3) как абстрактный предмет или объект.

Пусть выражения ' p_1 ', ' p_2 ' являются именами предложений ' S_1 ' и ' S_2 ' соответственно. Тогда в высказываниях вида "Предложение p_1 истинно", "Предложение p_2 ложно" понятия истинности и ложности выражаются предикатами истинности и ложности.

В высказываниях вида "Истинно, что S_1 ", "Ложно, что S_2 " понятия истинности и ложности выражаются операторами истинности и ложности.

В высказываниях вида "Предложение p_1 означает истину", "Предложение p_2 означает ложь", или более кратко " S_1 есть истина", " S_2 есть ложь", – понятия истинности и ложности рассматриваются как абстрактные предметы: **истина** и **ложь**.

Высказывания различных видов об истинности (ложности) предложений, подчиняющихся классической логике, попарно эквивалентны друг другу. А именно следующие предложения: “Предложение p_1 истинно”, “Истинно, что S_1 ”, “Предложение p_1 означает истину”, “ S_1 ”, – попарно эквивалентны.

Аналогично попарно эквивалентны предложения: “Предложение p_2 ложно”, “Ложно, что S_2 ”, “Предложение p_2 означает ложь”, “неверно, что S_2 ”.

Однако, если для каких-либо предложений нарушаются принципы и положения классической логики, то нарушаются и вышеуказанные эквивалентности.

Имеет смысл, подобно тому, как это делает Н.Васильев, рассматривать логики двух уровней: на первом уровне законы логики имеют место для предложений, на втором уровне для высказываний об истинности или ложности вида “Предложение p_1 истинно”, “Предложение p_2 ложно”.

Вслед за Тарским, который полагал, что предикат ‘истинно’ относят к предложениям, в данной работе будем исходить из рассмотрения понятий истинности и ложности как предикатов. Символически будем записывать соответствующие высказывания как формулы $T(q(S_1))$, $F(q(S_2))$, где ‘ S_1 ’ и ‘ S_2 ’ – предложения, ‘ $q(S_1)$ ’ и ‘ $q(S_2)$ ’ – имена этих предложений и q – оператор, преобразующий предложения в их имена¹.

Имея дело с понятиями истинности и ложности, необходимо считаться с возможностями встретиться с трудностями их применения и употребления в естественном и формализованном языках. Это трудности связаны:

- 1) с семантическими парадоксами типа парадокса лжеца,
- 2) с определением предиката истины,
- 3) с определением предложения и высказывания.

Начнем обсуждение с первой трудности.

Согласно Тарскому, существенными предпосылками, приводящими к антиномиям, являются следующие:

“(1) Мы неявно предполагаем, что язык, в дополнение к своим выражениям, содержит также имена этих выражений и семантические термины, например, термин «истинно», относящийся к предложениям этого языка. Мы допускаем также, что все предложения, задающие адекватное употребление этого

¹ В ряде предыдущих работ автора в качестве оператора, преобразующего предложения в их имена использовалась звездочка *, т.е. если ‘ S_1 ’ и ‘ S_2 ’ – предложения, то ‘ S_1^* ’ и ‘ S_2^* ’ – имена этих предложений.

термина, могут быть сформулированы в нашем языке. Языки, обладающие такими свойствами, мы будем называть «семантически замкнутыми».

(II) Мы предполагаем, что в этом языке действуют обычные законы логики”.

Позже А.Гупта [Gupta A. 1982] показал, что, в дополнении к этим двум положениям, Тарский подразумевал еще третье:

(III) Язык должен содержать функцию подстановки, выраженную синтаксически.

К парадоксам ведет неограниченное применение понятий истинности и ложности, поэтому во избежание семантических парадоксов наложим ограничение на подстановку в формулу с предикатом истинности.

В качестве имен предложений, подставляемых в формулы $T(n_1)$, $F(n_2)$, ограничимся только такими именами, которые образуются из предложений посредством использования кавычек (т.е. кавычной функции или оператора (функции) цитирования).

Предложенные ограничения на форму высказываний с термином "истинно", связанные с обязательным использованием функции цитирования, позволяют избежать семантических парадоксов за счет отсутствия операций, позволяющих осуществить автореференцию. В этом подходе не предлагается решение семантических парадоксов. В то же время введенные ограничения не отбрасывают каких либо содержательно значимых высказываний или положений.

1. Таким образом, понятия истинности и ложности будем рассматривать и употреблять только в высказываниях вида:

“Предложение ‘S₁’ истинно”, “Предложение ‘S₂’ ложно”, в которых имена предложений образованы с помощью функции цитирования и в которые вместо S подставляются предложения. Эти высказывания символизируем формулами $T(q(S_1))$ и $F(q(S_2))$.

Термообразующий оператор q исполняет роль функции цитирования и действует подобно квадратным скобкам [], которые использует В.А.Смирнов в комбинированном исчислении предложений и событий.

На сходство такого рассмотрения предиката истинности с ограничением на подстановку имен в формулу $T(n)$ (в содержательном смысле, конечно) с частично определенным предикатом истинности в теории истины Крипке [Kripke S. 1975], обратил внимание автора В.А.Смирнов.

2) На пути исследования понятия истинности Тарский [Тарский А. 1999] пришел к выводу о неопределимости предиката