

П. Л. Чебышев

Избранные труды
Классики науки

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
П11

П11 **П. Л. Чебышев**
Избранные труды: Классики науки / П. Л. Чебышев – М.: Книга по Требованию, 2013. – 926 с.

ISBN 978-5-458-33062-6

Имя выдающегося русского учёного - Пафнутия Львовича Чебышёва - известно каждому математически образованному человеку. В сборник вошли работы Чебышёва по теории чисел, теории вероятностей, математическому анализу, теории механизмов, а также статья Н. И. Ахиезера "П. Л. Чебышёв и его научное наследие" и статья И. И. Артоболевского, Н. И. Левитского "Модели механизмов П. Л. Чебышёва".

ISBN 978-5-458-33062-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ



ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЧИСЛА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, НЕ ПРЕВОСХОДЯЩИХ ДАННОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Во втором томе „Теории чисел“ Лежандр предлагает формулу для приближенного определения числа простых чисел, меньших данного числа. Свою формулу Лежандр проверяет таблицею простых чисел от 10 000 до 1 000 000 и потом прилагает ее к решению некоторых вопросов теории чисел. Несмотря на видимое согласие формулы Лежандра с таблицею простых чисел, мы не можем не изъявить сомнения насчет строгости ее и вследствие того не можем признать верными выводы, на ней основанные. К такому заключению приводит нас одна теорема относительно свойств функции, определяющей число простых чисел, меньших данного числа, теорема, из которой могут быть выведены многие любопытные предложения.

Мы займемся теперь изложением этой теоремы, а потом покажем некоторые из ее предложений.

Теорема, которая будет предметом наших исследований, заключается в следующем:

Теорема I. Если $\psi(x)$ означает число простых чисел, меньших x , n — какое-либо целое число, ρ — количество > 0 , то в сумме

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\psi(x+1) - \psi(x) - \frac{1}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

мы будем иметь такую функцию, которая с приближением ρ к 0 приближается к конечному пределу.

Доказательство. Мы докажем сначала, что такое свойство принадлежит функциям, получаемым через дифференцирование несколько

раз выражений

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}, \quad \log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right),$$

$$\sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}\right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}}$$

по ρ , предполагая здесь и везде впоследствии суммирование по m распространенным на все числа от $m=2$ до $m=\infty$, суммирование же по μ распространенным на одни простые числа от $\mu=2$ до $\mu=\infty$.

Начнем с первого. Нетрудно убедиться, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{e^x - 1} x^{\rho} dx = \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{-1+\rho} dx = \frac{1}{\rho} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx,$$

а потому

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} = \frac{\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} dx}{\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx}.$$

Из этого равенства видно, что производная n -го порядка от $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$ по ρ будет выражаться дробью, у которой знаменателем будет $\left(\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx \right)^{n+1}$, а числителем — целая функция от интегралов

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} dx, \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log x dx,$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log^2 x dx, \dots, \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log^n x dx,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log x dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log^2 x dx, \dots, \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log^n x dx.$$

Но такая дробь, будет ли $n=0$ или >0 , приближается к конечному пределу с приближением ρ к 0, ибо предел интеграла $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} dx$ при $\rho=0$ есть 1; интегралы же

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} dx, \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log x dx, \\ & \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log^2 x dx, \dots, \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) e^{-x} x^{\rho} \log^n x dx, \\ & \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log x dx, \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log^2 x dx, \dots, \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\rho} \log^n x dx \end{aligned}$$

при $\rho=0$, очевидно, сохраняют конечную величину.

Итак, с приближением ρ к 0 все производные от $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$, так же как и сама $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$, будут иметь пределами величины конечные.

Обращаемся теперь к функции

$$\log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right).$$

Известно, что

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 - \frac{1}{2^{1+\rho}} \right) \left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}} \right) \left(1 - \frac{1}{5^{1+\rho}} \right) \dots \right]^{-1} = \\ & = 1 + \frac{1}{2^{1+\rho}} + \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{4^{1+\rho}} + \dots, \end{aligned}$$

откуда выходит

$$\begin{aligned} & -\log \left(1 - \frac{1}{2^{1+\rho}} \right) - \log \left(1 - \frac{1}{3^{1+\rho}} \right) - \log \left(1 - \frac{1}{5^{1+\rho}} \right) - \dots = \\ & = \log \left(1 + \frac{1}{2^{1+\rho}} + \frac{1}{3^{1+\rho}} + \frac{1}{4^{1+\rho}} + \dots \right), \end{aligned}$$

что по нашему знакоположению напишется так:

$$-\sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) = \log \left(1 + \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} \right),$$

следовательно,

$$\log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) = \log \left(1 + \sum \frac{1}{m^{1+\rho}} \right) \rho,$$

а потому

$$\log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) = \log \left[1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} \right) \rho \right].$$

Из этого равенства видно, что производные

$$\log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right)$$

по ρ выразятся конечным числом дробей, у которых знаменателями будут целые положительные степени

$$1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} \right) \rho,$$

а числителями будут целые функции количества ρ , выражения $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$ и производных его по ρ . Но такие дроби с приближением ρ к 0 приближаются к конечным пределам, ибо выражение $1 + \rho + \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} \right) \rho$, составляющее знаменателей этих дробей, с приближением ρ к 0 приближается к 1 (потому что $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$, как доказано, при этом остается конечною величиною); функция же $\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}$ и производные ее, входящие в состав числителей этих дробей, по доказанному нами, с приближением ρ к 0 приближаются к конечным пределам.

Нам остается теперь доказать это же относительно производных

$$\sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}}.$$

Для этого мы замечаем, что первая производная этой функции есть

$$\sum \frac{1}{\mu^{2+2\rho}} \cdot \frac{\log \mu}{1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}}.$$

По виду же этой функции нетрудно заметить, что ее высшие производные выразятся конечным числом членов вида

$$\sum \frac{1}{\mu^{2+2\rho}} \cdot \frac{\log^p \mu}{1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}}} \cdot \frac{1}{s \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right)^r},$$

где p, ρ, r, s не ≤ 0 . Но каждый из таких членов для $\rho = 0$ и $\rho > 0$ имеет конечную величину; ибо для $\rho = 0$ и $\rho > 0$ функция, стоящая под знаком $\sum$, относительно $\frac{1}{\mu}$ будет бесконечно малой порядка не ниже второго.

Убедившись таким образом, что производные от выражений

$$\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho}, \quad \log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right),$$

$$\sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}},$$

с приближением ρ к 0 приближаются к конечным пределам, мы заключаем то же и о выражении

$$\frac{d^n \left[\sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) + \sum \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right]}{d\rho^n} + \frac{d^n \left[\log \rho - \sum \log \left(1 - \frac{1}{\mu^{1+\rho}} \right) \right]}{d\rho^n} +$$

$$+ \frac{d^{n-1} \left(\sum \frac{1}{m^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} \right)}{d\rho^{n-1}},$$

которое по выполнении дифференцирования и сокращения приводится к следующему:

$$\pm \left(\sum \frac{\log^n \mu}{\mu^{1+\rho}} - \sum \frac{\log^{n-1} m}{m^{1+\rho}} \right),$$

в чем и заключается предложенная нами теорема, ибо, как нетрудно заметить, по нашему знакоположению выражение

$$\sum \frac{\log^n \mu}{\mu^{1+\rho}} - \sum \frac{\log^{n-1}}{m^{1+\rho}}$$

тождественно выражению

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \frac{1}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}.$$

В самом деле, последнее выражение есть разность двух

$$\sum_{x=2}^{\infty} [\varphi(x+1) - \varphi(x)] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}, \quad \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\log^{n-1} x}{x^{1+\rho}},$$

из которых первое приводится к $\sum \frac{\log^n \mu}{\mu^{1+\rho}}$ (сумме значений $\frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$, соответствующих простым числам), ибо $\varphi(x+1)$ и $\varphi(x)$, означая число простых чисел, меньших $x+1$ и x , в разности $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ дают 1, когда x число простое, и 0, если x число составное; второе же переменною x на m обращается в $\sum \frac{\log^{n-1} m}{m^{1+\rho}}$.

Так убеждаемся в справедливости предложенной нами теоремы.

Из доказанной нами теоремы можно вывести многие любопытные свойства функции, определяющей число простых чисел, меньших дан-

ного предела. Для этого мы замечаем, что разность $\frac{1}{\log x} - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x}$ при x большом есть бесконечно малое относительно $\frac{1}{x}$ порядка первого; а потому выражение

$$\left(\frac{1}{\log x} - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right) \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

при x большом будет относительно $\frac{1}{x}$ порядка $2 + \rho$, и, следовательно,

при ρ не < 0 сумма

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\log x} - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right) \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

будет иметь конечное значение. Складывая же эту сумму с выражением

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \frac{1}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

о котором сейчас доказали теорему I, на основании ее заключаем, что значение

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}} dx$$

с приближением ρ к 0 приближается к конечному пределу. А отсюда нетрудно вывести следующую теорему:

Теорема II. *От $x=2$ до $x=\infty$ функция $\varphi(x)$, означающая число простых чисел, меньших x , удовлетворяет бесконечное число*

раз и неравенству $\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{\alpha x}{\log^n x}$ и неравенству $\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x}$, как бы α , оставаясь количеством положитель-

ным, ни было мало, а n ни было велико.

Доказательство. Мы ограничимся здесь доказательством второго неравенства, первое докажется подобным образом. Для доказательства того, что неравенству

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x} \quad (1)$$

удовлетворяет бесконечное множество чисел, допустим противное и посмотрим, к чему приведет нас это допущение. Допустив, что неравенству (1) удовлетворяет конечное число чисел, положим, что α есть

целое число, превосходящее и количество e^n и наибольшее число, удовлетворяющее неравенству (1). В этом предположении для $x > a$ будет

$$\varphi(x) \geq \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{ax}{\log^n x}, \quad \log x > n,$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \geq \frac{ax}{\log^n x}, \quad \frac{n}{\log x} < 1. \quad (2)$$

Но в этом случае, как сейчас увидим, в противность доказанному нами, значение выражения

$$\sum_{x=2}^{\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

будет приближаться к $+\infty$ с приближением ρ к 0. В самом деле, это выражение мы можем рассматривать как предел

$$\sum_{x=2}^s \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

при $s = \infty$. Предполагая же $s > a$, это выражение мы можем рассматривать как сумму

$$C + \sum_{x=a+1}^s \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}, \quad (3)$$

называя через C сумму

$$\sum_{x=2}^a \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}},$$

которая, очевидно сохраняет конечное значение при $\rho = 0$ и $\rho > 0$.