

Понтрягин Лев Семенович

Непрерывные группы

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-3
ББК 84-4
Л34

Л34 **Лев Семенович П.**
Непрерывные группы / Понтрягин Лев Семенович – М.: Книга по Требованию,
2026. – 321 с.

ISBN 978-5-519-79005-5

ISBN 978-5-519-79005-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2026

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2026

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

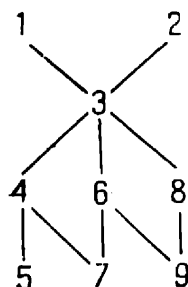
СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение . . .	8
Обозначения	10
Глава 1. Абстрактные группы	12
§ 1. Понятие группы	—
Опр. 1.	Прим. 1—2.
§ 2. Подгруппа. Нормальный делитель. Факторгруппа . . .	15
Опр. 2—4.	Прим. 3—5.
§ 3. Изоморфизм. Автоморфизм. Гомоморфизм	19
Опр. 5—6.	Теор. 1.
Прим. 6—7.	
§ 4. Центр. Коммутант	23
Опр. 7—9.	Прим. 8.
§ 5. Пересечение и произведение подгрупп. Прямое произведение.	25
Опр. 10—10', 10*—10*'. Теор. 2.	Прим. 9—10.
§ 6. Коммутативные группы	29
Глава 2. Топологические пространства	36
§ 7. Понятие топологического пространства :	37
Опр. 11—12.	Прим. 11—12.
§ 8. Окрестности	38
Опр. 13.	Теор. 3.
Прим. 13—14.	
§ 9. Гомеоморфизм. Непрерывное отображение	44
Опр. 14—15.	Теор. 4—5.
§ 10. Подпространство	46
Опр. 16.	Прим. 15—16.
§ 11. Связность	49
§ 12. Регулярность. Вторая аксиома счетности	50
Опр. 17—18.	Прим. 17—18.
§ 13. Компактность	54
Опр. 19.	Теор. 6—9.
Прим. 19.	
§ 14. Непрерывные функции	57
Опр. 20.	Прим. 20.
§ 15. Топологическое произведение	61
Опр. 21.	Прим. 21—22.
Глава 3. Топологические группы	64
§ 16. Понятие топологической группы	—
Опр. 22.	
§ 17. Система окрестностей единицы	66
Теор. 10.	Прим. 23—25.
§ 18. Подгруппа. Нормальный делитель. Факторгруппа	70
Опр. 23—25.	Теор. 11.
Прим. 26—27.	
§ 19. Изоморфизм. Автоморфизм. Гомоморфизм	75
Опр. 26—27.	Теор. 12—13.
Прим. 28—29.	

	Стр.
§ 20. Пересечение и произведение подгрупп. Прямое произведение	80
Опр. 28—28'. Теор. 14. Прим. 30.	
§ 21. Бесконечное прямое произведение	84
Опр. 29—29'. Прим. 31—32.	
§ 22. Связные и нульмерные группы	89
Теор. 15—17. Прим. 33—34.	
§ 23. Локальные свойства. Локальный изоморфизм	94
Опр. 30. Теор. 18. Прим. 35—36.	
Глава 4. Линейные представления компактных топологических групп	101
§ 24. Непрерывные функции на топологической группе	102
Теор. 19. Прим. 37—38.	
§ 25. Инвариантное интегрирование	106
Опр. 31. Теор. 20—21. Прим. 39—40.	
§ 26. Системы функций и интегральные уравнения на группе	115
Теор. 22. Прим. 41—42.	
§ 27. Предварительные сведения о матрицах	120
§ 28. Соотношения ортогональности	126
Опр. 32—33. Теор. 23—26. Прим. 43—44.	
§ 29. Полнота системы неприводимых представлений	131
Теор. 27—30. Прим. 45—46.	
Глава 5. Коммутативные топологические группы	141
§ 30. Группы характеров	142
Опр. 34. Теор. 31.	
§ 31. Основные соотношения теории характеров	148
Опр. 35. Теор. 32—35.	
§ 32. Простейшие примеры и предварительные сведения	153
Теор. 36. Прим. 47.	
§ 33. Компактные и дискретные группы	159
Опр. 36. Теор. 37—38. Прим. 48—51.	
§ 34. Прямая сумма для группы и ее группы характеров	165
Теор. 39.	
§ 35. Локально компактные группы	168
Теор. 40—41. Прим. 52.	
§ 36. Локально связные коммутативные группы	180
Теор. 42—44. Прим. 53.	
§ 37. Топологизированные алгебраические тела	186
Опр. 37. Теор. 45. Прим. 54.	
Глава 6. Понятие группы Ли	194
§ 38. Группа Ли	196
Опр. 38. Прим. 55.	
§ 39. Однопараметрические подгруппы	199
Теор. 46—48.	
§ 40. Теорема инвариантности	207
Теор. 49. Прим. 56.	
§ 41. Подгруппа и факторгруппа	210
Теор. 50—51.	
§ 42. Дополнительные замечания о канонических координатах . .	217
Глава 7. Структура компактных топологических групп	219
§ 43. Аппроксимация компактной группы группами Ли	—
Опр. 39. Теор. 52—54. Прим. 57—58.	

§ 44. Вспомогательные топологические понятия	224
Опр. 40—41.	
§ 45. Компактные топологические группы конечной размерности	227
Теор. 55—57. Прим. 59.	
Глава 8. Локально изоморфные группы	232
§ 46. Фундаментальная группа. Накрывающее пространство	—
Опр. 42—43. Теор. 58—60.	
§ 47. Универсальная накрывающая группа	240
Опр. 44. Теор. 61—64. Прим. 60—61.	
Глава 9. Структура групп Ли	250
§ 48. Структурные константы. Инфинитезимальная группа.	—
Опр. 45—46. Теор. 65—66. Прим. 62—63.	
§ 49. Подгруппа. Факторгруппа. Гомоморфное отображение	257
Теор. 67—68. Прим. 64—65.	
§ 50. Условия интегрируемости	261
Теор. 69.	
§ 51. Построение группы Ли по структурным константам	264
Теор. 70—73. Прим. 66.	
§ 52. Построение подгруппы и гомоморфизма	275
Теор. 74—76. Прим. 67—68.	
§ 53. Комплексные группы Ли. Классификация	282
Теор. 77—82. Прим. 69—72.	
§ 54. Построение группы Ли в целом	292
Теор. 83—85. Прим. 73.	
§ 55. Компактные группы Ли	298
Теор. 86—87. Прим. 74.	
§ 56. Группы преобразований	305
Опр. 47. Теор. 88. Прим. 75.	
Список литературы	314

СХЕМА ЗАВИСИМОСТИ ГЛАВ



ВВЕДЕНИЕ

Первоначально понятие непрерывной, или, что то же самое, топологической группы возникло в математике в связи с рассмотрением групп непрерывных преобразований. Группа непрерывных преобразований, например, геометрических, сама естественным образом представляет собой топологическое многообразие. В дальнейшем оказалось, что для трактовки большей части возникающих здесь проблем нет надобности рассматривать группу как группу преобразований, достаточно изучать лишь группу саму по себе, помня, однако, что в ней установлены соотношения предельного перехода. Таким образом возникло новое математическое понятие: топологическая группа.

С точки зрения чисто логической топологическая группа представляет собой простое соединение двух основных математических понятий: группы и топологического пространства. Поэтому аксиоматика понятия топологической группы крайне естественна. Рассматривая группы, мы изучаем в наиболее чистом виде алгебраическую операцию умножения. Точно так же, рассматривая топологические пространства, мы в столь же чистом виде изучаем операцию предельного перехода. Так как обе эти операции принадлежат к числу основных математических операций, то они весьма часто объединяются. Топологическая группа и представляет собой то понятие, в котором объединены тесно связаны между собой обе указанные операции. В конструктивном отношении аксиоматика топологических групп не представляет собой ничего интересного, так как в основном лишь повторяет аксиоматику абстрактных групп. Таковы же и первые шаги теории топологических групп: они не содержат почти ничего специфического. Изложению этой почти тривиальной части теории посвящается третья глава настоящей книги. В первой и второй главах собраны те сведения из теории групп и абстрактной топологии, которые используются на протяжении дальнейших глав.

После того как аксиоматика топологической группы построена и дана общая теория, возникает более интересная задача: дать конструктивное исследование нового абстрактного понятия, т. е. привести его в связь со старыми более конкретными понятиями. На этом пути освещаются с новой общей точки зрения старые конкретные понятия и в то же время конкретизируется новое абстрактное понятие. Здесь основную роль играет теория линейных представлений, данная в четвертой главе настоящей книги. Благодаря этой теории удастся детально изучить структуру компактных и коммутативных топологических групп, что сделано в седьмой и пятой главах.

К числу конкретных понятий теории топологических групп относится понятие группы Ли. Первоначально теория топологических групп и возникла в форме теории групп Ли. Как обычно в теориях сравнительно давнего происхождения, в теории групп Ли остались нерешенными некоторые вопросы принципиального характера. Решению этих принципиальных вопросов посвящается шестая глава настоящей книги. Там же дается подготовительный материал для главы седьмой, так как компактные топологические группы изучаются при помощи приведения их в связь с группами Ли. Более детально исследуются группы Ли в девятой главе. Там даются основы теории групп Ли, а также формулируются без доказательства некоторые основные результаты, доказательство которых слишком сложно. В восьмой главе дается понятие универсальной накрывающей группы. Оно устанавливает связь между локальными свойствами топологической группы и ее свойствами в целом.

Почти каждый параграф книги заканчивается примерами, характер которых весьма разнообразен. С одной стороны, здесь имеются почти тривиальные иллюстрации теоретического материала, с другой же стороны, часто дается краткое изложение доказательств некоторых теорем, имеющих вполне самостоятельное значение.

Книгу не обязательно читать всю подряд. Схема зависимости глав приложена выше.

Книга рассчитана на читателя с весьма скромной математической подготовкой. В основном предполагается знание лишь самого элементарного математического материала, типа аналитической геометрии, теории матриц, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и т. п. Кроме указанных элементарных сведений в книге используются еще следующие менее элементарные:

1) Теория интегральных уравнений — для четвертой главы. В качестве пособия можно рекомендовать книгу Ловитта „Линейные интегральные уравнения“ (ГТТИ, 1933).

2) Теория уравнений с частными производными, а именно условия разрешимости уравнений в полных дифференциалах — для девятой главы. В качестве пособия можно рекомендовать книгу Ш. Ж. де ла Валле-Пуссена „Курс анализа бесконечно малых“, т. 2, гл. VIII, §§ 5 и 6 (ГТТИ, 1933).

Все указанные здесь сведения перед их применением точно формулируются в виде теорем, приводимых без доказательства.

К книге прилагается список литературы. Ссылки на литературу будут даваться указанием номера по этому списку, помещаемого в квадратных скобках.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

В основу изложения книги кладется понятие множества, которое предполагается известным (см. [12]). Здесь я привожу некоторые обозначения, связанные с понятием множества и элементарными операциями над множествами.

А) Запись $a \in M$ означает, что элемент a принадлежит множеству M . В случае если множество M конечно или счетно, мы иногда будем задавать его простым перечислением входящих в него элементов. В символах это записывается так: $M = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$. Написанное означает, что множество M составлено из элементов $a_1, \dots, a_n, \dots$.

В) Запись $M = N$ или $M \supset M$ означает, что множества M и N совпадают.

С) Запись $M \subseteq N$ или $N \supset M$ означает, что каждый элемент множества M входит во множество N , т. е. что множество M составляет часть множества N . Здесь не исключена возможность и совпадения обоих множеств.

Д) Через $M \cap N$ обозначается *пересечение* множеств M и N , т. е. множество, составленное из всех элементов, одновременно принадлежащих множествам M и N .

Е) Через $M \cup N$ обозначается *сумма* множеств M и N , т. е. множество, составленное из всех элементов, принадлежащих по крайней мере одному из множеств M и N .

Ф) Через $M - N$ обозначается *разность* между множеством M и множеством N , т. е. множество, составленное из всех элементов, входящих в M , но не входящих в N . Таким образом операция вычитания возможна здесь всегда, независимо от того, является ли множество N частью множества M или нет. Если $M \subseteq N$, то в результате вычитания получается *пустое* множество, т. е. множество, не содержащее элементов.

Г) Пусть M и N — два множества. Допустим, что каждому элементу x множества M поставлен в соответствие один определенный элемент $y = f(x)$ множества N . Тогда мы будем говорить, что имеется *отображение* f множества M в множество N . Элемент y называется *образом* элемента x при отображении f , а элемент x — *прообразом* или одним из прообразов элемента y .

Говорят, что f есть отображение множества M на множество N , если каждый элемент b множества N имеет хотя один прообраз a при отображении f , т. е. $b = f(a)$.

Если A есть подмножество множества M , т. е. $A \subseteq M$, то через $f(A)$ мы будем обозначать множество всех таких элементов из N , которые являются образами элементов, принадлежащих A ; $f(A)$ будем называть *образом множества* A . Если $B \subseteq N$, то через $f^{-1}(B)$ мы будем обозначать множество всех таких элементов из M , которые переходят в B

при отображении f ; множество $f^{-1}(B)$ будем называть *полным прообразом множества B* при отображении f .

Отображение f множества M на множество N называется *взаимно однозначным*, если каждый элемент множества N имеет лишь один прообраз при отображении f . Если f есть взаимно однозначное отображение, то уравнение $y=f(x)$ можно разрешить относительно x , т. е. определить однозначно x , зная элемент y , и мы имеем $x=f^{-1}(y)$. Отображение f^{-1} называется *обратным* по отношению к отображению f .

ГЛАВА ПЕРВАЯ

АБСТРАКТНЫЕ ГРУППЫ

Теория абстрактных групп изучает алгебраическую операцию в ее наиболее чистом виде: элементы, составляющие группу, рассматриваются лишь с точки зрения операции, установленной в группе, все остальные возможные свойства этих элементов оставляются в стороне.

Настоящая глава посвящается изложению основных понятий теории абстрактных групп.

§ 1. Понятие группы

Определение 1. Множество G элементов называется *группой*, если выполнены следующие условия, называемые *аксиомами группы*:

1) В G установлена операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов a, b из G некоторый элемент c из G . Операция эта по большей части называется *произведением*, и результат ее обозначается через ab , $c = ab$. (Произведение ab может зависеть от порядка сомножителей a и b : ab , вообще говоря, не равно ba .)

2) *Ассоциативность*: для всяких трех элементов a, b, c из G выполнено соотношение $(ab)c = a(bc)$.

3) В G имеется *правая единица*, общая для всех элементов группы, т. е. такой элемент e , что $ae = a$ для всякого элемента a из G .

4) Для всякого элемента a из G существует *правый обратный элемент*, т. е. такой элемент a^{-1} , что $aa^{-1} = e$.

Множество элементов группы G может быть как конечным, так и бесконечным. Если множество G конечно, то сама группа называется *конечной*, а число элементов множества G называется *порядком* группы G . В противоположном случае группа G называется *бесконечной*.

Если сверх указанных четырех аксиом. в группе выполнено еще условие *коммутативности*, т. е. для всяких двух элементов a и b из G

$$ab = ba, \quad (1)$$

то группа называется *коммутативной* или *абелевой*. Для коммутативных групп вместо мультипликативных обозначений часто употребляются аддитивные, т. е. вместо произведения ab пишется сумма $a + b$; в соответствии с этим групповая операция называется не умножением, а *сложением*. В этом случае единица e группы называется нулем и обозначается через 0 , а элемент a^{-1} , обратный к элементу a , называется *противоположным* и обозначается через $-a$.

А) В силу аксиомы 2) $(ab)c = a(bc)$; таким образом этот элемент можно обозначить просто через abc . Точно так же, если имеется произведение четырех элементов, например, $((ab)c)d$, то оно обозначается просто через $abcd$ и, как легко видеть, не зависит от расстановки скобок. То же самое правило имеет место и для произвольного числа множителей.

В) Правая единица e группы является также и *левой единицей*, т. е. $ea = a$ для всякого элемента a . Правый обратный элемент a^{-1} к элементу a является также и *левым обратным*, т. е. $a^{-1}a = e$. Элемент, обратный к элементу a^{-1} , совпадает с a , $(a^{-1})^{-1} = a$.

Докажем утверждение В). Из аксиом 3) и 4) следует, что $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$; умножая обе части этого соотношения справа на правый обратный элемент к элементу a^{-1} , получаем $a^{-1}a = e$, т. е. правый обратный элемент является одновременно и левым обратным; сверх того элемент, обратный к a^{-1} , есть a . Далее имеем $ea = aa^{-1}a = ae = a$, т. е. правая единица одновременно является и левой.

С) В группе G каждое из уравнений

$$ax = b \quad (2)$$

и

$$ya = b \quad (3)$$

относительно неизвестных x и y имеет решение и притом единственное. Из этого, в частности, следует единственность единицы и единственность обратного элемента, ибо e является решением уравнения $ax = a$, а элемент a^{-1} — решением уравнения $ax = e$.

Для доказательства разрешимости уравнений (2) и (3) достаточно указать, что элемент $a^{-1}b$ является решением уравнения (2), а элемент ba^{-1} — решением уравнения (3). Очевидно, далее, что указанные решения являются единственными, ибо, умножая уравнение (2) слева на a^{-1} , получаем $x = a^{-1}b$, точно так же, умножая уравнение (3) справа на a^{-1} , получаем $y = ba^{-1}$.

Д) После того как доказана единственность единицы и обратного элемента (см. С)), естественно ввести обычные для элементарной алгебры обозначения. Если m — натуральное число, то a^{m+1} определим индуктивно, положив $a^{m+1} = a^m a$, считая, что $a^1 = a$. Отрицательную степень определим, положив $a^{-m} = (a^{-1})^m$. a^0 определим, положив $a^0 = e$. Если p и q — два целых числа, то нетрудно показать, что выполнены обычные правила: $a^p a^q = a^{p+q}$, $(a^p)^q = a^{pq}$. При аддитивных обозначениях вместо a^n пишут na .

Е) Если для элемента a группы существует такое натуральное число m , что $a^m = e$, то мы скажем, что элемент a имеет конечный порядок, в противоположном случае будем приписывать элементу a порядок бесконечность или нуль или же назовем элемент a свободным. Если элемент a имеет конечный порядок, то числовое значение этого порядка определим как минимальное натуральное число r , для которого $a^r = e$. Оказывается, что если при целом n $a^n = e$, то число n делится на r .

Для доказательства этого утверждения разделим n на r , т. е. представим n в форме $n = pr + q$, где q есть остаток при делении, причем

$$0 \leq q < r. \quad (4)$$

Тогда имеем $e = a^n = a^{pr+q} = (a^r)^p a^q = a^q$. Таким образом $a^q = e$, и следовательно, в силу неравенства (4) $q = 0$, т. е. n делится на r .

Пример 1. Пусть M — некоторое множество. Будем называть *преобразованием* множества M всякое взаимно однозначное отображение множества M самого на себя. Если s есть некоторое преобразование множества M , то это значит, что каждому элементу a из M поставлен в соответствие некоторый определенный элемент $s(a)$ из M причем в каждый элемент из M переходит таким образом один и только один элемент из M . Результат преобразования s , примененного к элементу a , обозначается также через sa , $s(a) = sa$.

Совокупность G всех преобразований множества M естественным образом составляет группу. Пусть s и t — два преобразования M , их произведение $r = st$ определим условием $r(a) = s(t(a))$ для всякого элемента a из M . Легко видеть, что определенное таким образом r является взаимно однозначным отображением M самого на себя.

Установленный таким образом закон перемножения преобразований удовлетворяет аксиоме ассоциативности: $(rs)t = r(st)$. Для доказательства применим обе части равенства к произвольному элементу a из M :

$$(rs)t(a) = (rs)(t(a)) = r(s(t(a))),$$

$$r(st)(a) = r(st(a)) = r(s(t(a))),$$

т. е. в обоих случаях мы имеем один и тот же результат.

Единицей группы G преобразований множества M является тождественное преобразование, т. е. такое преобразование e , которое каждый элемент a из M переводит сам в себя: $e(a) = a$. Обратным для преобразования s является такое преобразование s^{-1} , которое всякий элемент sa множества M переводит в a ; так как преобразование s является взаимно однозначным отображением, то всякий элемент из M может быть представлен в форме $s(a)$ и, следовательно, преобразование s^{-1} определено для всех элементов из M .

Таким образом все групповые аксиомы в группе преобразований выполнены.

Пусть теперь H — некоторая совокупность преобразований множества M , причем H , вообще говоря, уже не содержит всех преобразований M . H составляет группу в силу того же закона перемножения, который имеет место в G , если наряду со всякими двумя преобразованиями из H в H входит и их произведение и если наряду со всяким преобразованием из H в H входит также и обратное к нему преобразование.

Пример 2. Пусть G — совокупность всех n -строчных квадратных матриц $\|s_{ij}^t\|$, составленных из действительных чисел с детерминантом,