

Н. И. Лобачевский

**Об исчезании
тригонометрических строк**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н. И. Лобачевский**
Об исчезании тригонометрических строк / Н. И. Лобачевский – М.: Книга
по Требованию, 2013. – 62 с.

ISBN 978-5-458-56962-0

ISBN 978-5-458-56962-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos. (i\pi x - i\omega) f(x) dx &= \frac{\sin. i\omega}{i\pi} \{(-1)^i f(1) - f(0)\} \\ &+ \frac{\cos. i\omega}{i^2 \pi^2} \{(-1)^i f'(1) - f'(0)\} \\ &- \frac{1}{i^2 \pi^2} \int_0^1 \cos. (i\pi x - i\omega) f''(x) dx \quad (2) \end{aligned}$$

которое легко вывести помощію интегрированія по частямъ и гдѣ i цѣлое положительное, x и ω произвольныя числа, π содержаніе окружности къ поперечнику,

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) \qquad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = f''(x)$$

Здѣсь можно видѣть съ перваго раза, въ чемъ должно заключаться доказательство на исчезаніе строки

$$\sum \int_0^1 \cos. i\pi (x - \omega) d\omega f(\omega) \qquad \begin{cases} i=0 \\ i=\infty \end{cases} \quad (3)$$

для всякой функции $f(\omega)$; какъ скоро исчезаніе строки (1) уже допущено.

Итакъ я начну сперва говорить о суммѣ

$$\sum \frac{1}{i} \sin. i\omega \qquad \begin{cases} i=1 \\ i=\infty \end{cases} \quad (4)$$

Пусть она прерывается на $i=2^n$. Соединяя по два члена съ рядомъ, получимъ

$$\sum_1^{2^n} \frac{1}{i} \sin. i\omega = \sum_1^{2^{n-1}} \frac{\sin. (2i-1)\omega}{2i(2i-1)} + \cos. \frac{1}{2}\omega \sum_1^{2^{n-1}} \frac{1}{i} \sin. (2i-1)\omega$$

Подобнымъ образомъ

$$\sum_1^{2^{n-1}} \frac{1}{2} \sin. (2i - \frac{1}{2}) \omega = \sum_1^{2^{n-2}} \frac{\sin. (4i - \frac{1}{2}) \omega}{2i(2i-1)} + \cos. \omega \sum_1^{2^{n-2}} \frac{1}{2} \sin. (4i - \frac{3}{2}) \omega$$

$$\sum_1^{2^{n-2}} \frac{1}{2} \sin. (4i - \frac{3}{2}) \omega = \sum_1^{2^{n-3}} \frac{\sin. (8i - \frac{3}{2}) \omega}{2i(2i-1)} + \cos. 2\omega \sum_1^{2^{n-3}} \frac{1}{2} \sin. (8i - \frac{5}{2}) \omega$$

$$\sum_1^{2^{n-3}} \frac{1}{2} \sin. (8i - \frac{5}{2}) \omega = \sum_1^{2^{n-4}} \frac{\sin. (16i - \frac{5}{2}) \omega}{2i(2i-1)} + \cos. 4\omega \sum_1^{2^{n-4}} \frac{1}{2} \sin. (16i - \frac{7}{2}) \omega$$

Вообще для всякаго цѣлаго положительнаго числа r

$$\begin{aligned} \sum_1^{2^{n-r}} \frac{1}{2} \sin. (2^r i - \frac{2^r - 1}{2}) \omega = & \sum_1^{2^{n-r-1}} \frac{\sin. (2^{r+1} i - \frac{3 \cdot 2^r - 1}{2}) \omega}{2i(2i-1)} \\ & + \cos. (2^{r-1} \omega) \sum_1^{2^{n-r-1}} \frac{1}{2} \sin. (2^{r+1} i - \frac{2^{r+1} - 1}{2}) \omega \end{aligned}$$

Изъ всѣхъ уравненій выводимъ

$$\begin{aligned} \sum_1^{2^n} \frac{1}{2} \sin. i \omega = & \sum_1^{2^{n-1}} \frac{\sin. (2i - 1) \omega}{2i(2i-1)} \\ & + \cos. \frac{1}{2} \omega \sum_1^{2^{n-2}} \frac{\sin. (4i - \frac{1}{2}) \omega}{2i(2i-1)} \\ & + \cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega \sum_1^{2^{n-3}} \frac{\sin. (8i - \frac{3}{2}) \omega}{2i(2i-1)} \\ & + \cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega \cos. 2\omega \sum_1^{2^{n-4}} \frac{\sin. (16i - \frac{5}{2}) \omega}{2i(2i-1)} \\ & + \text{и проч.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega \dots \cos. (2^{r-2} \omega) \sum_1 \frac{2^{n-r} \sin. (2^r i - \frac{3 \cdot 2^{r-1} - 1}{2}) \omega}{2 i (2 i - 1)} \\
 & + \cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega \dots \cos. (2^{r-2} \omega) \sum_1 \frac{2^{n-r}}{i} \sin. (2^r i - \frac{2^r - 1}{2}) \omega
 \end{aligned}$$

А если дѣлаемъ $r = n$, то

$$\begin{aligned}
 & \sum_1 \frac{2^n}{i} \sin. i \omega = \sum_1 \frac{2^{n-1} \sin. (2 i - 1) \omega}{2 i (2 i - 1)} \\
 & + \sum_{r=2}^{r=n} \cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega \dots \cos. (2^{r-2} \omega) \sum_1 \frac{2^{n-r} \sin. (2^r i - \frac{3 \cdot 2^{r-1} - 1}{2}) \omega}{2 i (2 i - 1)} \\
 & + \cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega \cos. 2 \omega \dots \cos. (2^{n-2} \omega) \sin. \frac{2^n + 1}{2} \omega \quad (5)
 \end{aligned}$$

Послѣдній членъ, какаѣ бы дуга $\omega < \pi$ ни была, съ возрастаніемъ n или долженъ дѣлаться нулемъ, или по крайней мѣрѣ нечувствительнымъ. Онъ дѣлается нулемъ и одинъ разъ навсегда уничтожается, когда въ

$$\omega = \pi \sum 2^{-p}$$

число членовъ ограничено. Еслижъ оно безконечно, и слѣдовательно между цѣлыми отрицательными показателями $-p$ будетъ недоставать также безконечно много цѣлыхъ чиселъ, то съ каждымъ пропущеннымъ членомъ $\pi 2^{-q}$ будетъ по величинѣ

$$\cos. (2^{r-1} \omega) < \sqrt{\frac{1}{2}}$$

а произведение

$$\cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega \cos. 2 \omega \dots$$

по крайней мѣрѣ уменьшаться въ содержаніи къ $\sqrt{\frac{1}{2}}$ и наконецъ дѣлаться нечувствительнымъ.

Теперь во второй части уравненія (5) принимаемъ всѣ остальные члены за положительные и увеличиваемъ, поставивши единицы вмѣсто синусовъ. Послѣ этого можно всегда взять n довольно большое число, чтобы по величинѣ

$$\sum_1^{2^n} \frac{1}{2^i} \sin. i \omega < \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^i (2^i - 1)} \left\{ 1 + \sum_{r=2}^{r=n} \cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega \dots \cos. (2^{r-1} \omega) \right\}$$

Разсматриваемъ напередъ производимель

$$L = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^i (2^i - 1)}$$

Доказать изчезаніе этой строки можемъ по способу, которой изложенъ въ моей Алгебрѣ (Алгебра или Вычисленіе конечныхъ 1834 г. стр. 337) и которой примѣняется ко всѣмъ подобнымъ случаямъ. Полагаемъ, что для какого нибудь i дробь

$$\frac{1}{2^i (2^i - 1)}$$

будучи разложена по степенямъ $\frac{1}{2}$, даетъ самую низшую степень 2^{-r} и которая слѣдовательно встрѣчается не далѣе, какъ до члена

$$\frac{1}{4i(4i-1)}$$

потому что для всякаго $i > 1$

$$4i(4i-1) - 4i(2i-1) > 0$$

И такъ

$$L < \sum_{r=1}^{r=\infty} i 2^{1-r}$$

Между тѣмъ неравенство

$$\frac{1}{2i(2i-1)} > \frac{1}{2^r}$$

даетъ

$$i > 2^{\frac{r-1}{2}}$$

Послѣ чего

$$L < \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{r-1}{2}}}$$

или

$$L < 2 + \sqrt{2}$$

10 ОВЪ ИЗЧЕЗ. ТРИГОНОМЕТР. СТРОКЪ.—(ЛОВАЧЕВСКАГО.)

Если бы въ такомъ суммованіи, остановившись на извѣстномъ членѣ, захотѣли судить о величинѣ остатка въ строку, то не трудно видѣть, что вообще

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i (2^i - 1)} < \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2^{r-1}}{2^r}$$

начиная съ r , которое удовлетворяетъ условію

$$2^i (2^i - 1) > 2^r$$

и отсюда находимъ

$$\frac{2^{r-1}}{2^r} < \sqrt{\frac{1}{2^i (2^i - 1)}}$$

слѣдовательно

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i (2^i - 1)} < \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2^i (2^i - 1)}}$$

значеніе, которое исчезаетъ съ возрастаніемъ i . Напримѣръ взявши $i=3$, получимъ

$$L < 1, 02$$

Чтобы пояснить болѣе примѣненіе нашего способа, берёмъ еще другую безконечную строку, которая въ послѣдствіи будетъ нужна

$$M = \sum \frac{1}{i^2}$$

и кошорая необходимо изчезаетъ вмѣстѣ съ L , по-
тому что $M < 4L$. Полагаемъ

$$i^2 = 2^r$$

или непосредственно

$$i^2 < 2^r$$

съ цѣлымъ показателемъ r . После чего

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} &< \sum_{r=1}^{\infty} i 2^{1-r} \\ &< \sum_{r=1}^{\infty} 2^{1-\frac{1}{2}r} \\ &< (2 + \sqrt{2}) 2^{1-\frac{1}{2}r} \\ &< \frac{4 + 2\sqrt{2}}{i} \end{aligned}$$

Для $i=4$ находимъ

$$\sum_{i=4}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 1,08$$

$$M < 2,45$$

Другой способъ предложимъ еще слѣдующій. Пусть
для какого нибудь i

$$2i(2i-1) = a^2$$

Для всякаго другаго $i' > i$,

$$\frac{1}{2i'(2i'-1)} = \sum \frac{A}{\alpha^{2n}}$$

гдѣ $A < \alpha^2$ и гдѣ знакъ суммы относится къ цѣлымъ положительнымъ числамъ n . Пустъ далѣе N то цѣлое, которое дастъ

$$2N(2N-1) = \alpha^{2n}$$

или непосредственно

$$2N(2N-1) < \alpha^{2n}$$

Отсюда

$$N \leq \frac{1 + \sqrt{(1 + 8\alpha^{2n})}}{4}$$

Послѣ чего

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i(2i-1)} &< \frac{1}{\alpha^2} + \frac{\alpha^2-1}{\alpha^4} \left(\frac{1 + \sqrt{(1 + 8\alpha^4)}}{4} - i \right) \\ &+ \frac{\alpha^2-1}{\alpha^6} \left(\frac{1 + \sqrt{(1 + 8\alpha^6)}}{4} - i \right) \\ &+ \frac{\alpha^2-1}{\alpha^8} \left(\frac{1 + \sqrt{(1 + 8\alpha^8)}}{4} - i \right) \\ &+ \text{и ш. д.} \end{aligned}$$

Отбрасываемъ вездѣ единицу подъ квадратнымъ корнемъ :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i(2i-1)} < \frac{5-4i}{4\alpha^2} + \frac{\alpha+1}{\alpha\sqrt{2}}$$

Полагаемъ $i = 2$:

$$\sum_{i=2}^{i=\infty} \frac{1}{2^i (2^i - 1)} < -\frac{1}{16} + \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$

$$L < \frac{7}{16} + \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$$

$$< 1,40$$

Переходимъ къ другой строкѣ:

$$2^n \sum_{i=1}^n \sin. i \omega < L \left\{ 1 + \sum_{r=2}^{r=n} \cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega \cos. 2 \omega : \dots \cos. (2^{r-1} \omega) \right\}$$

Замѣтимъ, что

$$\cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega = \frac{\sin. 2 \omega}{2^2 \sin. \frac{1}{2} \omega}$$

$$\cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega \cos. 2 \omega = \frac{\sin. 4 \omega}{2^3 \sin. \frac{1}{2} \omega}$$

Вообще

$$\cos. \frac{1}{2} \omega \cos. \omega \dots \cos. (2^{r-1} \omega) = \frac{\sin. 2^{r-1} \omega}{2^{r-1} \sin. \frac{1}{2} \omega}$$

и слѣдовательно

$$2^n \sum_{i=1}^n \sin. i \omega < L \left\{ 1 + \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{\sin. (2^{r+1} \omega)}{2^r \sin. \frac{1}{2} \omega} \right\}$$

Принимая на правой сторонѣ всѣ синусы въ числителяхъ за единицы, находимъ

$$\sum_1^{2^n} \frac{1}{i} \sin. i \omega < L \left(1 + \frac{1 - 2^{1-n}}{\sin. \frac{1}{2} \omega} \right)$$

а полагая $n = \infty$, переходимъ къ строку (1)

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{i} \sin. i \omega < L \left(1 + \frac{1}{\sin. \frac{1}{2} \omega} \right)$$

Обратимся теперь къ уравненію (2), откуда выводимъ безконечную строку

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{i=\infty} \int_0^1 \cos. (i \pi x - i \omega) f(x) dx = \\ & \sum_1^{\infty} \frac{\sin i \omega}{i \pi} [(-1)^i f(1) - f(0)] + \sum_1^{\infty} \frac{\cos. i \omega}{i^2 \pi^2} [(-1)^i f'(1) - f'(0)] \\ & - \sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{i^2 \pi^2} \cos. (i \pi x - i \omega) f''(x) dx \quad (6) \end{aligned}$$

Здѣсь по величинѣ

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{\sin i \omega}{i \pi} [(-1)^i f(1) - f(0)] & < A L \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2} \omega} \right) \\ \sum_1^{\infty} \frac{\cos. i \omega}{i^2 \pi^2} [(-1)^i f'(1) - f'(0)] & < B M \end{aligned}$$

гдѣ A по величинѣ самое большое изъ двухъ

$$\frac{f(1) + f(0)}{\pi} \qquad \frac{f(1) - f(0)}{\pi}$$