

Е. С. Березанская

Математика

**Рабочая книга для 7 года
обучения**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Е11

Е11 **Е. С. Березанская**
Математика: Рабочая книга для 7 года обучения / Е. С. Березанская – М.:
Книга по Требованию, 2015. – 336 с.

ISBN 978-5-458-27811-9

ISBN 978-5-458-27811-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2015

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2015

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

измеренные с точностью до 1 мм с недостатком, их меры оказались бы равными и т. д. ¹⁾).

Вывод. Два отрезка равны в том случае, если их приближенная мера, взятая с недостатком, одна и та же, какую бы малую единицу меры ни выбрали.

§ 2. Деление отрезка прямой на произвольное число равных частей.

Задача. Требуется отрезок прямой AB (рис. 2) разделить на 5 равных частей.

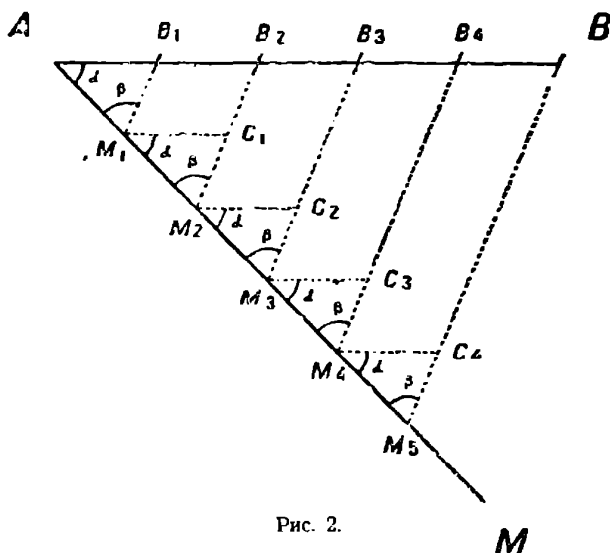


Рис. 2.

Вы знаете, что для этого надо через один из концов прямой, например через A , под произвольным углом провести вспомогательную прямую AM , отложить на AM от точки A пять равных отрезков произвольной длины:

$$AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5;$$

точку M_5 соединить с другим концом B данной прямой. Через точки M_4, M_3, M_2, M_1 провести линии, параллельные M_5B :

$$M_4B_4 \parallel M_3B_3 \parallel M_2B_2 \parallel M_1B_1 \parallel M_5B.$$

¹⁾ В результате измерения длины всегда получается число. Это число называется числом, измеряющим данный отрезок. Так, на рисунке 1 числа, измеряющие отрезок AB с различной степенью точности, будут: 7 м, 7,3 м, 7,34 м и т. д.

Тогда:

$$AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = \frac{1}{5} AB.$$

Для доказательства через точки M_1, M_2, M_3, M_4 проведите прямые, параллельные AB :

$$M_1C_1 \parallel M_2C_2 \parallel M_3C_3 \parallel M_4C_4 \parallel AB.$$

Сравните треугольники AB_1M_1 и $M_1C_1M_2$. На основании какого признака эти треугольники равны?

Сравните отрезки B_1B_2 с M_1C_1 и отрезок AB_1 с отрезком M_1C_1 . Почему они равны? Будут ли AB_1 и B_1B_2 равны? Почему?

Докажите, что

$$\triangle M_1C_1M_2 = \triangle M_2C_2M_3 = \triangle M_3C_3M_4 = \triangle M_4C_4M_5.$$

Выведите из равенства этих треугольников, что равны отрезки:

$$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B.$$

Сколько равных отрезков следовало бы отложить на вспомогательной линии AM от точки A , чтобы данный отрезок AB разделить на 7; 9; n равных частей?

Проведите вспомогательную линию AM под другим углом, возьмите на ней новые равные отрезки и убедитесь, что новые точки деления отрезка AB на пять частей совпадут с точками:

$$A, B_1, B_2, F_3, B_4, B.$$

Формулируйте способ деления данного отрезка на произвольное число равных частей.

Замечание. Фигуру, полученную при делении отрезка на равные части (рис. 2), можно рассматривать как треугольник ABM , у которого одна сторона AM разделена на равные части. Если через точки деления этой стороны проведены прямые, параллельные второй стороне M_1B , то третья сторона AB этими параллельными делится на столько равных частей, на сколько была разделена первая.

Вывод. Если одну из сторон треугольника разделить на несколько равных частей и через точки деления провести прямые, параллельные второй стороне, то третья сторона треугольника этими параллельными разделится на равные части.

§ 3. Отношение отрезков.

а) Случай, когда отношение — число целое.

Начертите произвольный отрезок прямой AC . Разделите его известным вам способом (§ 2) на несколько равных частей

б.

например на восемь частей (рис. 3). Линией BE отрезок AC разбивается на отрезки AB и BC .

Примите за единицу меры отрезок AF и сосчитайте, сколько таких единиц в отрезках AB , BC , AC .

Напишите соответственно числа, измеряющие эти отрезки:

$$AB=7; BC=1; AC=8.$$

Если число, измеряющее отрезок AC , разделим на число, измеряющее отрезок BC , то получим отношение отрезка AC к отрезку BC . Это записывается так:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{8}{1}, \text{ или } \frac{AC}{BC} = 8, \text{ или } AC:BC=8:1.$$

Читается это так: отрезок AC относится к отрезку BC , как 8 относится к 1, или короче — отношение отрезка AC к BC равно 8.

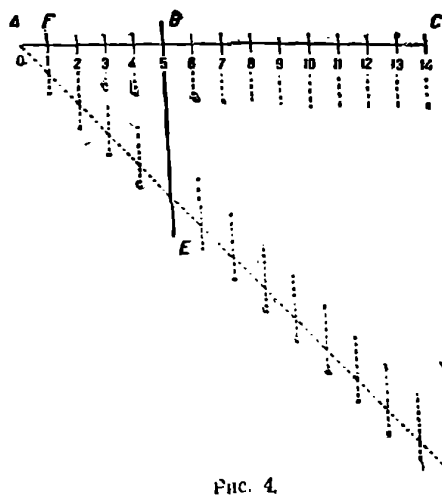


Рис. 4.

Напишите отношение отрезка AB к BC ; отношение отрезка AM к EM ; AE к EM (рис. 3).

б) Случай, когда отношение — число дробное.

На рисунке 4 отрезок AC разделен на равные части.

Примите AF за единицу меры и сосчитайте, сколько таких единиц в отрезках AC , AB , BC .

Напишите соответственно числа, измеряющие эти отрезки:

$$AC=14; AB=? BC=?$$

Напишите и прочитайте попарно отношения отрезков AC к AB , BC к AB , AB к BC :

$$\frac{AC}{AB} = \frac{14}{5}; \frac{BC}{AB} = \frac{9}{5}; \frac{AB}{BC} = \frac{5}{9}, \text{ или } AC:AB=14:5 \text{ и т. д.}$$

Напишите также попарно отношения отрезков: AM к AE ; EM к AE ; AE к EM и др.

Замечание. Как на рисунке 3, так и на рисунке 4 линия BE , делящая отрезок AC на два отрезка, проходит через одну из точек деления данного отрезка на равные части. На рисунке 3 прямой BE отсекается отрезок BC , равный $\frac{1}{3}$ части AC ; на рисунке 4 отрезок AB равен $\frac{5}{14} AC$.

а) Случай приближенного отношения отрезков.

Рассмотрите рисунок 5. На этом рисунке прямая BE делит отрезок AC на две части AB и BC . Требуется найти отношение отрезков, полученных на рисунке 5. Отрезок AC мы можем по

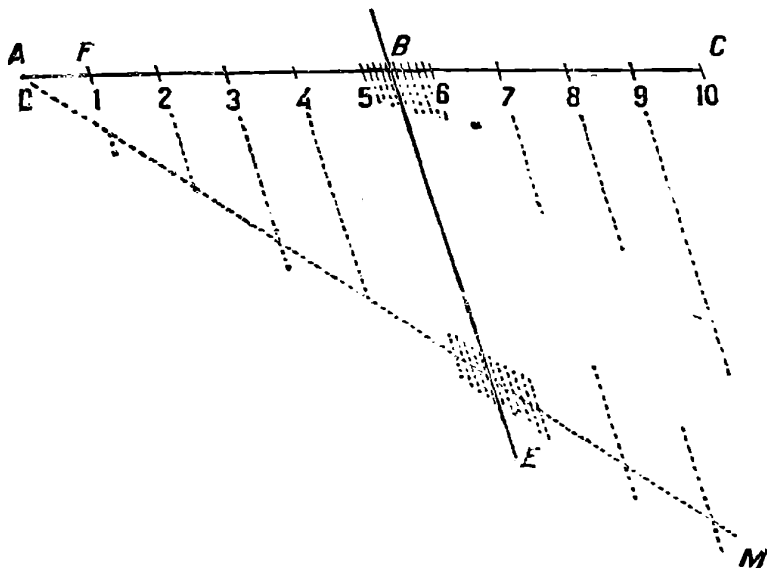


Рис. 5.

нашему произволу разделить на какое угодно число равных частей: на 10, 100, 1000. На рисунке 5 отрезок AC разделен на 10 частей, а одна из этих частей кроме того разделена еще на 10 частей. Таким образом, на рисунке показаны сотые доли отрезка AC .

Найдем отношение отрезка AB к отрезку AC .

Отрезок AB заключен между 5-й и 5-й десятыми долями отрезка AC , точнее между 54-й и 55-й сотыми долями его. Если AC принять за единицу меры, то числа 0,5; 0,54 называются

отношениями отрезков AB и AC ; первое — с точностью до 0,1; второе — с точностью до 0,01; это записывается так:

$$\frac{AB}{AC} = 0,5\dots;$$

точнее:

$$\frac{AB}{AC} = 0,54\dots$$

Если бы удалось установить, что BE проходит между 2-м и 3-м делениями сотой части AC , разделенной на 10 частей, т. е. если бы AB заключалось между 542-й и 543-й тысячными долями AC , то отношение AB к AC было бы найдено с точностью до 0,001:

$$\frac{AB}{AC} = 0,542\dots$$

Точки после цифр в числах: 0,5...; 0,54...; 0,542... показывают, что отношение не выражено точно. Более точными способами можно найти большее число десятичных знаков. Вопрос о том, сколько нужно найти десятичных знаков в приближенном отношении, решается в каждом практическом случае отдельно.

Найдите для рисунка 5 отношения отрезка BC к AC с точностью до 0,1; 0,01; 0,001, запишите их.

Найдите и запишите отношения отрезков: AE к AM ; ME к AM .
Найдите отношения:

$$\frac{BC}{AC} = ? \quad \frac{BC}{AB} = ? \quad \frac{AE}{ME} = ? \quad \frac{ME}{AE} = ?$$

§ 4. Пропорциональные отрезки.

Начертите два пересекающихся отрезка AB и AC (рис. 6). Разделите эти отрезки известным вам способом (§ 2) на одинаковое число равных частей. Проведите через одно и то же по счету деление прямую EF . Обратите внимание попарно на отрезки AF и FB , AE и EC . Напишите отношения этих отрезков и сравните эти отношения:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{5}{3}; \quad \frac{AE}{EC} = \frac{5}{3};$$

откуда:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AE}{EC}.$$

Определение. Если отношение двух отрезков равно отношению двух других отрезков, то такие четыре отрезка называются

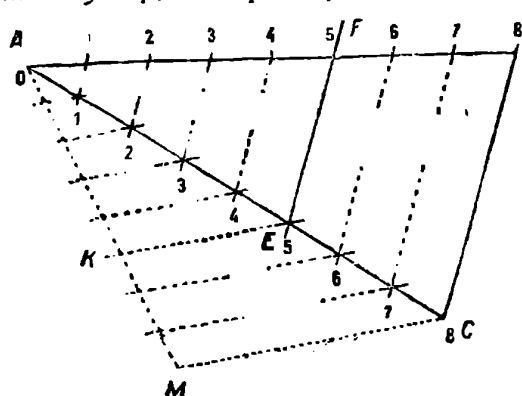


Рис. 6.

пропорциональными.

Отрезки: AF , FB , AE , EC на рисунке 6 — пропорциональные отрезки.

Напишите и сравните попарно отношения отрезков AE и EC , AK и KM . Пропорциональны ли эти отрезки?

Убедитесь, что отрезки AB и AF , AC и AE пропорциональны.

Напишите отношения других отрезков из рисунка 6, сравните их и покажите, какие отрезки будут пропорциональными.

Ответ.

FB , AF , CE и AE ; FB , AB , EC , AC ; KM , AM , FB , AB и др.

§ 5. Другое определение пропорциональных отрезков.

На рисунке 7 изображены два прямоугольника $ABDC$ и $A_1B_1D_1C_1$. Стороны:

$$AB = 3 \text{ см}; A_1B_1 = 6 \text{ см}; AC = 2 \text{ см}; A_1C_1 = 4 \text{ см}.$$

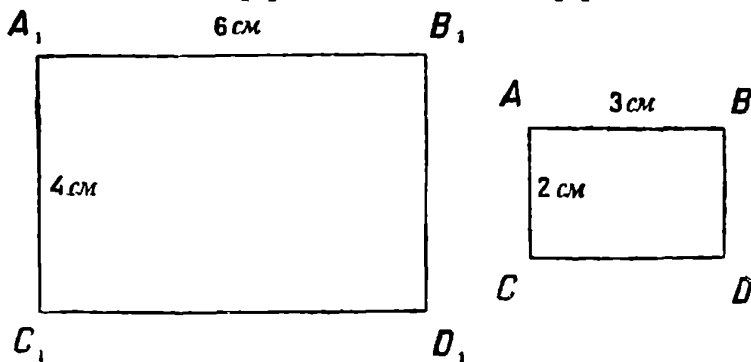


Рис. 7.

Вспомните, какие четыре числа составляют геометрическую пропорцию. Составят ли четыре числа, измеряющие стороны прямоугольников на рисунке 7, геометрическую пропорцию?

Напишите эту пропорцию:

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4},$$

или в общем виде:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Определение. Четыре отрезка называются пропорциональными, если числа, их измеряющие, составляют геометрическую пропорцию.

Стороны прямоугольников на рисунке 7 — пропорциональные отрезки.

§ 6. Упражнения.

1. Рассмотрите рисунок 8. Напишите попарно отношения отрезков:

AC и AE , AB и AF , AC и AE , BC и KC , AF и AB , $EF = CK$ и BC .

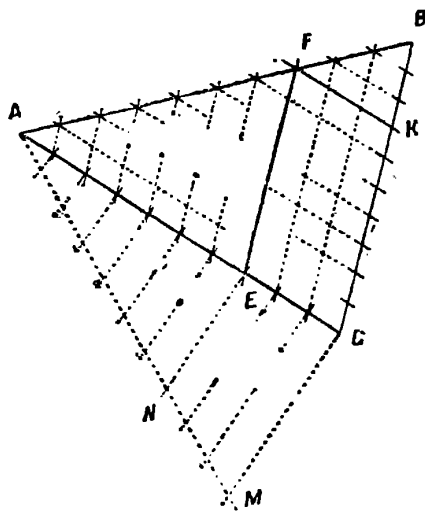


Рис. 8.

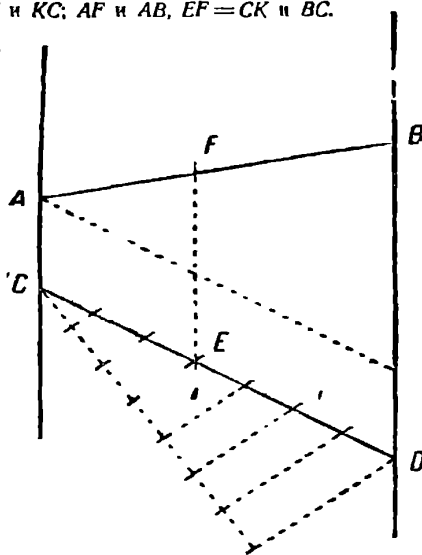


Рис. 9.

Составьте пропорции. Пропорциональны ли стороны треугольника AEF соответственно сторонам треугольника ACB ?

Решение.

$$\frac{AE}{AC} = \frac{FE}{BC}; \quad \frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB} \text{ и т. д.}$$

2. Начертите отрезки:

$$a = 2 \text{ см}, b = 5 \text{ см}, c = 4 \text{ см}.$$

Начертите отрезок d такой, чтобы отрезки a, b, c, d были пропорциональны. Укажите. Вспомните, как найти четвертый пропорциональный член геометрической пропорции.

Проверьте и убедитесь, что $d = 10 \text{ см}$

План земельных угодий с Залесья

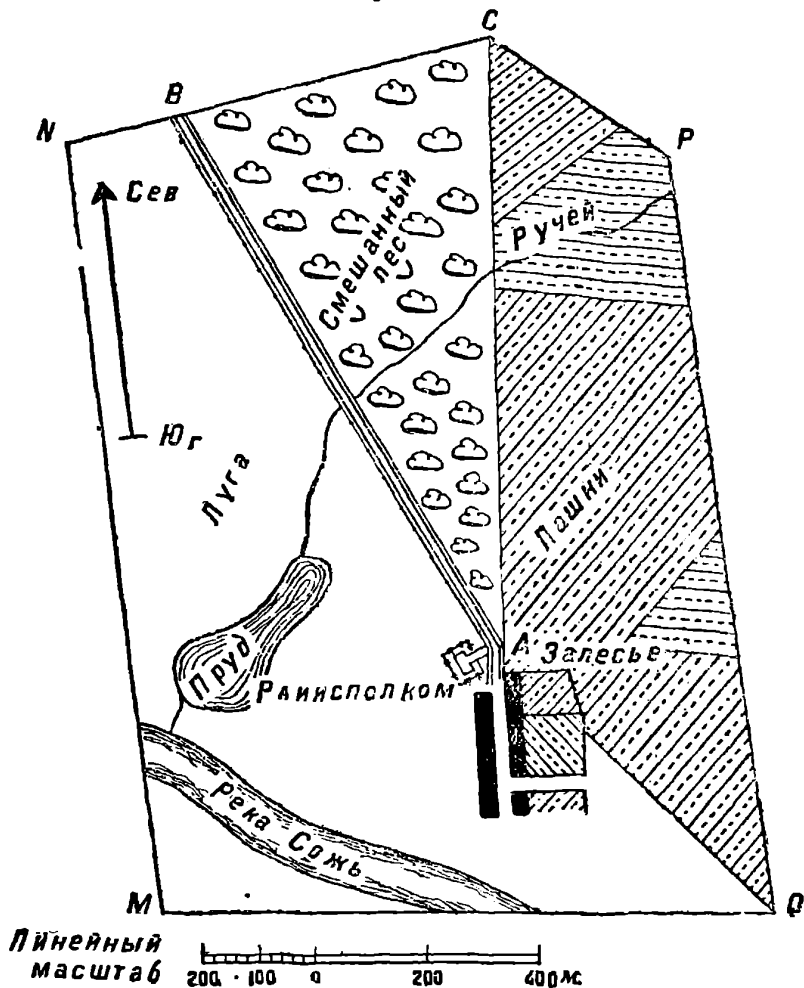


Рис. 10.

3. 1) Рассмотрите рисунок 9. Дано $AC \parallel BD \parallel EF$. Докажите, что прямая EP делит отрезки AB и CD на пропорциональные части:

$$AF:FB = CE:ED.$$

2) Покажите также, что всякая прямая, параллельная AC , разделит отрезки AB и CD на пропорциональные части.

§ 7. Копирование плана с изменением масштаба.

Совету села Залесья необходимо иметь план принадлежащих ему земельных угодий. Этот план (рис. 10) находится в архиве районного исполкома. Необходимо план скопировать. План этот можно скопировать — или в точности соблюдая все размеры или можно изменить размеры линий, не изменяя углов. Перечертим план, уменьшая его линейные размеры в два раза.

Так как размеры плана небольшие, поступим так: прикрепим его неподвижно на чистом листе бумаги с краю листа. Затем, немного отступив от самого плана, прочерчиваем с помощью линейки и треугольника линию $M'N' \parallel MN$. Далее от точки M' откладываем отрезок $M'N' = \frac{1}{2}MN$. Таким же точно способом проведем через точку N' прямую $N'C' \parallel NC$ и на ней отложим отрезок $N'C' = \frac{1}{2}NC$ и т. д. В результате мы получим контур

$M'N'C'P'Q'$ (рис. 11), подобный контуру плана на рисунке 10. Так как стороны нового многоугольника по построению параллельны сторонам многоугольника $MNC PQ$, то все внутренние углы многоугольника $M'N'C'P'Q'$ равны соответственным углам многоугольника $MNC PQ$; каждая сторона полученного многоугольника в два раза меньше стороны данного.

После того как построен контур нового плана, в нем легко тем же способом, как и раньше, провести все прямые линии внутри. Для того чтобы нанести кривые линии на новый план,

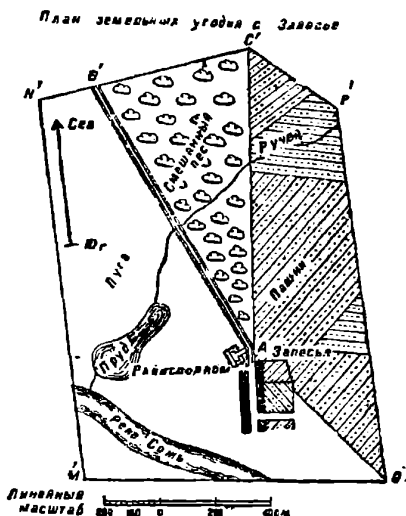


Рис. 11.

необходимо определить расстояние нескольких основных точек на каждой кривой от какой-нибудь границы и подобно предыдущему построить эти точки на новом плане, затем полученные точки соединяем от руки. Таким способом в нашем случае придется начертить пруд, реку, ручей.

§ 8. Понятие о подобии многоугольников.

Определение. Стороны двух многоугольников, заключающие равные углы, называются *сходственными*.

Так, например, у многоугольников на рисунках 10 и 11:

$$\angle NMQ = \angle N'M'Q';$$

следовательно, стороны MQ и $M'Q'$ — сходственные, NM и $N'M'$ также сходственные и т. д.

Многоугольники, у которых одинаковое число сторон, называются *одноименными*.

Вычислите отношение сходственных сторон многоугольников:

$$MNCPQ \text{ и } M'N'C'P'Q'.$$

Сравните эти отношения. Запишите, что все отношения сходственных сторон равны:

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{N'C'}{NC} = \frac{C'P'}{CP} = \frac{P'Q'}{PQ} = \frac{1}{2}.$$

Пропорциональны ли сходственные стороны многоугольчиков:

$$MNCPQ \text{ и } M'N'C'P'Q'?$$

Точно так же по построению имеем:

$$\begin{aligned} \angle NMQ &= \angle N'M'Q'; \angle MNC = \angle M'N'C'; \angle PCN = \angle P'C'N'; \\ \angle QPC &= \angle Q'P'C'; \angle QMN = \angle Q'M'N'. \end{aligned}$$

Определение. Одноименные многоугольники, имеющие соответственно равные углы и пропорциональные сходственные стороны, называются *подобными*.

Подобие обозначается знаком $\sim$. Следовательно:

многоугольник $MNCPQ \sim$ многоугольнику $M'N'C'P'Q'$.

В § 7 мы имели пример подобных фигур. В дальнейшем мы рассмотрим признаки, по которым можно узнавать, не измеряя непосредственно всех углов и всех сторон, будут ли подобны данные фигуры.