

И.К. Кикоин

Журнал Квант 1972 №6

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 50
ББК 22
К38

К38 **Кикоин И.К.**
Журнал Квант 1972 №6 / И.К. Кикоин – М.: Книга по Требованию, 2015. – 84 с.

ISBN 978-5-458-29881-0

ISBN 978-5-458-29881-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2015
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2015

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Лапландии и Перу было закончено еще более точное градусное измерение во Франции. Из всего этого материала была выведена длина окружности меридиана, одна сорока-миллионная доля которой и была принята за основную меру длины — метр (что по-гречески означает «мера»). Производя градусные измерения, французские ученые пользовались старинной мерой длины, называвшейся «туазом» (один туаз равнялся шести парижским футам; фут — длина ступни; в одном футе было двадцать дюймов: а дюйм — это мера длины, равная толщине большого пальца). Определив длину метра, выраженную в долях туаза, изготовили платиновую линейку такой длины и положили ее на вечное хранение в Международном бюро мер в Париже. Эта линейка получила название «архивный метр» и стала законной мерой длины метрической системы, которую приняли многие страны мира.

С тех пор много раз и в разных странах производились градусные измерения, одно из которых, и самое замечательное, в 1816—1854 гг. было проведено под руководством директора Пулковской обсерватории В. Я. Струве и военного геодезиста К. И. Теннера. Это измерение охватывало дугу в 25° протяженностью около 2800 км от рыбацкой деревушки Фугленес на севере Норвегии до города Измаила на берегу Дуная. Вычисленная по новейшим измерениям длина четверти меридиана оказалась несколько больше 10 миллионов архивных метров и составляет 10 002 138 м, так что архивный метр оказался примерно на 0,2 мм короче своей номинальной длины. Однако менять уже принятую меру было не рационально, это вызвало бы лишь путаницу. Поэтому архивный метр остался законной мерой длины, а для обеспечения ее сохранности были сделаны 30 точных копий, которые распределили по разным странам. Постоянство этих «нормальных» метров периодически проверяется, для чего их привозят в Париж, чтобы срав-

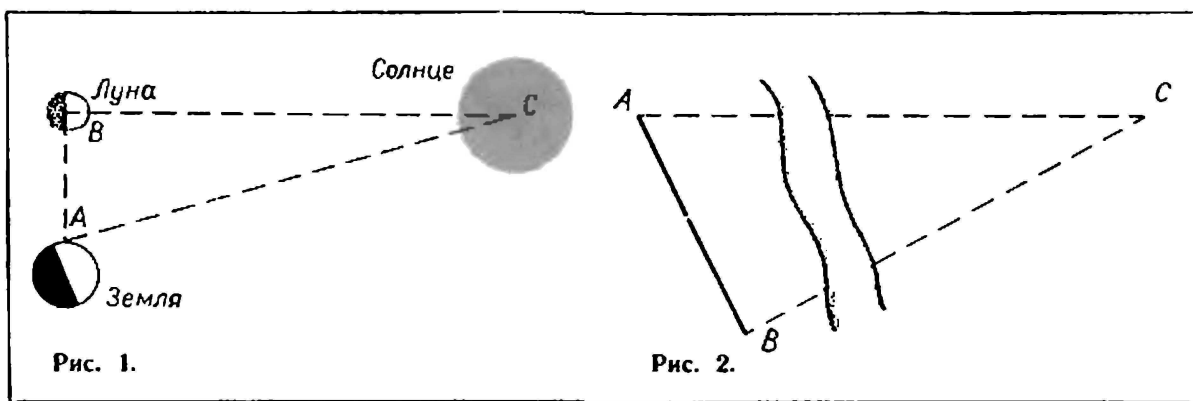
нить между собой и с архивным метром. Точность измерений при сравнении достигает 0,0001 мм, то есть доходит до $1/10\,000\,000$ доли длины.

Американский физик Майкельсон, а затем и другие сравнили длину метра с длиной волны определенных линий оптического спектра и этим закрепили его длину независимо от любых случайностей, которые могут произойти с архивным метром или его копиями.

Такова вкратце история метра, ставшего основной единицей длины для всех измерений в повседневной жизни, науке и технике. Этот же метр лежит в основе измерений расстояний в космосе, но пришлось пройти сложный и длительный путь, прежде чем эту земную меру удалось перенести в космическое пространство, что было сделано в несколько этапов.

Первым и важнейшим этапом было измерение расстояния от Земли до Солнца. Необходимость начинать с этой величины вытекает из третьего закона Кеплера. Он гласит, что квадраты времен обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний от Солнца. Периоды обращения планет известны с очень большой точностью. Следовательно, отношение кубов расстояний планет от Солнца тоже точно известно, а для того, чтобы от отношений перейти к самим расстояниям, нужно найти расстояние до Солнца от какой-либо одной планеты, например, от Земли.

Попытки узнать это расстояние делались давно, еще до открытия законов Кеплера в начале XVII века. Остроумный способ был предложен в III веке до нашей эры греческим астрономом Аристархом Самосским, правда, не для определения расстояния от Земли до Солнца, а для того, чтобы узнать, во сколько раз Солнце от Земли дальше, чем Луна, которая вследствие своего быстрого движения по звездному небу правильно считалась ближайшим к нам небесным телом. Этот способ заключался в



следующем. В первую и последнюю четверти диск Луны виден освещенным ровно наполовину, и линия, отделяющая светлую сторону от темной, представляется диаметром лунного диска (рис. 1). Угол между направлениями Луна — Солнце и Луна — Земля (угол ABC) прямой, как это видно из рисунка 1. Если измерить в это время угол между направлениями Земля — Луна и Земля — Солнце (угол BAC), то можно найти отношение расстояний Земля — Солнце и Земля — Луна (то есть отношение $\frac{AC}{AB}$). Во времена Аристарха Самоского для угла BAC было получено значение 87° . Следовательно, $\frac{AC}{AB} =$

$= \sec 87^\circ \approx 19$. Так что Солнце оказалось в 19 раз дальше Луны. Теперь мы знаем, что этот результат сильно ошибочен и что Солнце почти в 400 раз дальше Луны, так как угол BAC отличается от прямого угла всего лишь на $9'$, а $\sec 89^\circ 51' = 382$. Измерения не могли быть выполнены с достаточной точностью, тем более, что из-за неровностей поверхности Луны нельзя уловить момент, когда освещена ровно половина ее диска.

Лишь с усовершенствованием угломерных инструментов и применением оптических труб можно было попытаться измерить расстояния до ближайших планет, а затем, пользуясь третьим законом Кеплера, вычислить расстояние до Солнца.

Для этой цели применяется геометрический простой метод засечки, которым широко пользуются

геодезисты и топографы при определении расстояния до недоступного или удаленного предмета. Представим себе, что мы находимся в пункте A на берегу реки и нам нужно найти расстояние до пункта C , находящегося на другой стороне реки (рис. 2). Выбираем на «своем» берегу пункт B , расстояние до которого AB легко измерить, и в треугольнике ACB измерим углы CAB и CBA . Теперь по известной стороне AB треугольника, называемой базисом, и двум прилежащим углам можно вычислить расстояние AC . Это все простая геометрия, но для уверенного определения расстояния до пункта C нужно, чтобы угол засечки ACB не был слишком острым, то есть чтобы базис AB не был очень малым по сравнению со сторонами AC и BC .

Применительно к Солнцу этот способ крайне труден, так как самый большой базис, который можно выбрать на Земле, — диаметр земного шара — почти безнадежно мал по сравнению с расстоянием до Солнца. Угол засечки в этом случае составляет всего лишь $17,6''$.

Для пояснения принципа определения расстояния до Солнца представим себе двух наблюдателей на Земле (рис. 3). Одного в точке A , из которой Солнце видно в зените (по тому же направлению, что и из центра Земли O), и другого на экваторе в точке B ; для него Солнце находится на горизонте. Допустим, что каждый наблюдатель каким-нибудь способом определил направление на Солнце — соответственно AC

и BC , которые пересекаются под очень острым углом p . Тогда в прямоугольном треугольнике CBO гипотенуза CO равна

$$CO = OB \cdot \operatorname{cosec} p,$$

где $OB = R$ — радиус земного шара.

Угол p называется параллаксом Солнца. Очевидно, p — угол, под которым из центра Солнца виден экваториальный радиус Земли. Его величина для среднего расстояния до Солнца равна $8,8''$. Считая $R = 6400$ км, получаем

$$CO = 6400 \cdot \operatorname{cosec} 8,8'' \approx 150\,000\,000 \text{ км.}$$

Таково приближенное среднее значение расстояния до Солнца. Это именно среднее значение, так как земная орбита есть эллипс и Солнце находится не в его центре, а в фокусе; поэтому расстояние до Солнца в течение года изменяется примерно на $1,7\%$ = $2\,550\,000$ км в ту и другую сторону.

Мы привели эти рассуждения только для того, чтобы показать принцип определения среднего расстояния между центрами Земли и Солнца. Это рас-

стояние называют астрономической единицей длины или сокращенно а.е. Астрономическая единица является основной мерой для определения всех расстояний в солнечной и в звездной системах.

Трудность в практическом выполнении описанных измерений заключается в определении направлений AC и BC . Действительно, по отношению к чему можно находить эти направления? Если бы днем вокруг Солнца на небе были видны звезды, они дали бы тот далекий фон, по отношению к которому можно определить эти направления. Но этого нет, к тому же и центр Солнца ничем не обозначен, так что визировать его непосредственно нельзя. Вот почему удобнее определять расстояние до планеты, которая видна ночью на фоне звезд. (Есть планеты, которые значительно ближе к Земле, чем Солнце, что облегчает измерения.)

Первоначально для этой цели был выбран Марс, наблюдения которого в 1672 году впервые дали более менее верное значение параллакса Марса; а зная его, как мы уже упомянули, можно было вывести и параллакс Солнца. Когда в начале прошлого века были открыты первые малые планеты, появилась возможность пользоваться ими, так как некоторые из них подходили особенно близко к Земле. Кроме того, они малы по размерам и видны на небе как точки, подобно звездам, что сильно облегчает определение направлений. Одна из таких планет — Эрос — в 1930—31 гг. приближалась до расстояния в $0,15$ а.е., когда ее параллакс достигал $60''$. Тогда наблюдениями ее занимались 26 обсерваторий разных стран. Обработка полученного огромного материала дала наиболее точное значение солнечного параллакса. Тем не менее рассчитанная по нему длина а.е. все же содержала ошибку порядка $50\,000$ км. Эта ошибка может показаться очень большой. Однако нужно учесть, к какому огромному расстоянию она относится и насколько трудно

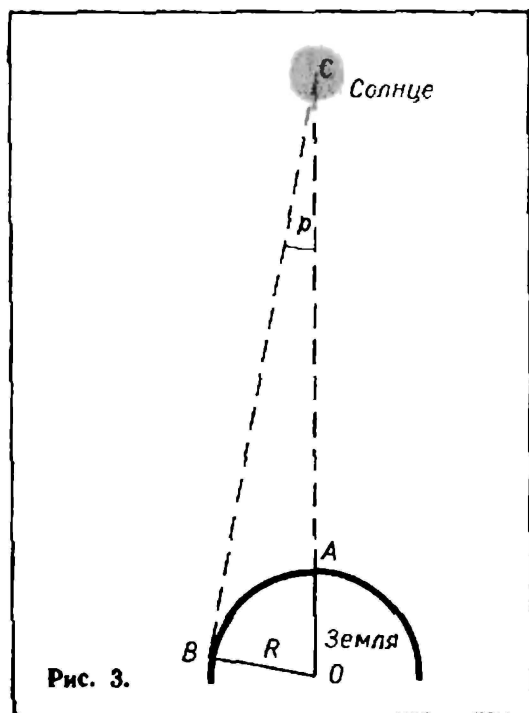


Рис. 3.

измерять параллакс. Такую ошибку можно проиллюстрировать следующим образом. Представьте себе, что вы измеряете ширину комнаты и находите, что она равна 3 м. Нелегко вам будет получить при этом ошибку, не превосходящую 1 мм. Но именно такую относительную величину представляет ошибка 50 000 км по сравнению с а. е. в 150 000 000 км.

Для большинства случаев в астрономии такая точность в определении длины а. е. была достаточной. Но с началом космического века потребовалась значительно большая точность. Действительно, космические ракеты запускались к Венере и к Марсу. Диаметры этих планет соответственно равны 12 400 км и 6800 км. Поэтому для корректировки полета ракеты так, чтобы она попала в заданное место планеты, нужно знать а. е. с точностью по крайней мере в десять раз большей. Здесь на помощь пришла радиолокация. Регистрация отраженного планетой сильного импульса радиоволн и определение времени прохождения сигналом расстояния туда и обратно позволили вычислить расстояние до планеты, а вместе с тем и а. е. с точностью до нескольких сотен километров, то есть повысить точность в сотни раз. Такие наблюдения были проведены в СССР и США и дали очень согласные результаты. С небольшим округлением а. е. теперь принята равной 149 600 000 км.

Это и есть основная единица длины, которой измеряются расстояния во вселенной, как в солнечной системе, так и за ее пределами. Однако для выражения расстояния до звезд эта единица все же слишком мала, и здесь употребляется другая, гораздо большая мера (ведь не станем же мы мерить расстояние между городами миллиметрами). Такая укрупненная мера равна 206 265 а. е., или $3,0857 \cdot 10^{13}$ км, и называется парсеком. Выбор такого странного соотношения между а. е. и парсеком будет понятен из следующего.

Расстояния до звезд, по крайней мере ближайших к нам, измеряются

тем же геометрическим способом засечки, что и расстояния до ближайших планет. Но вследствие чрезвычайной удаленности звезд находящийся в пределах земного шара базис, едва достаточный для измерения расстояний до планет, исчезающе мал по сравнению с расстоянием до звезд. Здесь нужен базис во много раз более длинный. И такой базис нашли.

Через каждые полгода Земля, переходя на противоположную точку своей орбиты, смещается почти на две а. е., то есть 300 000 000 км от первоначального положения. Такое смещение должно вызвать изменение направления, по которому с Земли видна та или иная звезда, причем чем ближе звезда, тем больше должно быть это изменение. Звезды должны казаться смещающимися и качаться из стороны в сторону, что является отражением орбитального движения Земли вокруг Солнца. Угол, на который смещается звезда при перемещении Земли на одну а. е., называется годичным параллаксом звезды.

Существование такого видимого покачивания звезд с годичным периодом было впервые теоретически предсказано Коперником в XVI веке и должно было служить наиболее веским доказательством движения Земли. Однако наблюдения того времени не обнаруживали ничего подобного. Но Коперник, убежденный в правильности своей теории, утверждал, что звезды слишком далеки, чтобы их параллаксы можно было измерить. Тихо Браге в конце XVI века тоже не мог обнаружить параллактических смещений звезд, хотя его наблюдения превосходили по точности все предыдущие и были на пределе возможностей для невооруженного глаза.

Изобретение зрительной трубы в десятки раз повысило точность измерений. Тем не менее, параллаксы звезд оставались незаметными. Лишь в 1837—38 гг. три выдающихся астронома: В. Я. Струве в Дерпте (ныне Тарту в Эстонии), Ф. Бессель в

Кенигсберге (ныне Калининграде) и Т. Гендерсон в обсерватории Мыса Доброй Надежды обнаружили и измерили параллаксы трех звезд: яркой Веги в созвездии Лиры, довольно слабой, но обладающей большим собственным движением 61-й звезды созвездия Лебедя и яркой звезды южного неба, невидимой в наших широтах — альфа Центавра. Параллаксы всех этих звезд оказались меньше $1''$.

Дадим теперь определение годичного параллакса звезды (рис. 4): это есть угол p , под которым со звезды A был бы виден радиус земной орбиты $R = BC$ (если считать орбиту окружностью).

Из прямоугольного треугольника ABC найдем расстояние $D = BA$ от Земли до Звезды (радиус Земной орбиты в среднем равен 1 а. е.):

$$D = BA = \frac{R}{\sin p} = \frac{1}{\sin p} \text{ а. е.}$$

Если выражать p секундами дуги, то так как этот угол очень мал, можно считать, что

$$\sin p \approx p \text{ (в долях радиана).}$$

В окружности единичного радиуса,

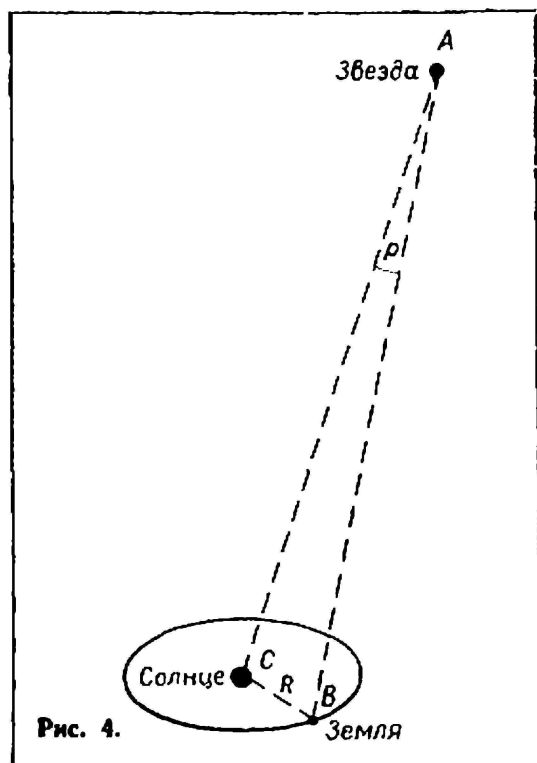


Рис. 4.

длина которой 2π , содержится $360 \cdot 60 \cdot 60 = 1\,296\,000$ секунд, откуда

$$1'' = \frac{2\pi}{1\,296\,000} \approx \frac{1}{206\,265} \text{ доли радиана.}$$

$$\text{Тогда } D \approx \frac{206\,265}{p''} \text{ а. е.}$$

Вот откуда взялось это странное на первый взгляд число. 206 265 а. е. и является новой единицей длины для измерения звездных расстояний. Очевидно, это есть расстояние до воображаемой звезды, параллакс которой равен одной секунде, откуда и произошло само название парсек (сокращенно $пс$), составленное из первых слогов слов «параллакс» и «секунда». Расстояние же до звезды с параллаксом в p'' выражается теперь очень просто:

$$D = \frac{1}{p''} пс.$$

Звезд с параллаксом, равным $1''$, мы не знаем. Все звезды находятся дальше, так что p всегда есть правильная дробь. Ближайшая известная звезда — альфа Центавра — имеет параллакс $0,75''$, и расстояние до нее равно $\frac{1}{0,75''} = 1,33 пс$. Наиболее яркая звезда неба Сириус находится в два раза дальше.

Выразим расстояние в один парсек в километрах:

$$1 пс = 1 \text{ а. е.} \cdot 206\,265 \approx 3,0857 \cdot 10^{13} \text{ км.}$$

Следовательно, расстояние до ближайшей к нам звезды альфа Центавра равно примерно $4 \cdot 10^{13}$ км.

Звезд с параллаксом больше $0,1''$, то есть находящихся на расстояниях, меньших 10 $пс$, очень мало, всего несколько десятков. Огромное большинство звезд гораздо дальше, они отстоят от нас на сотни и тысячи парсеков. Для таких расстояний употребляется единица длины килопарсек, в тысячу раз большая парсека.

Итак, мы рассказали о длинном пути от земной единицы длины — метра — до парсека, которым измеряются расстояния до звезд других

звездных систем. В популярной литературе часто употребляется другая единица — световой год, то есть расстояние, которое луч света в вакууме проходит в течение одного года. По наиболее точным определениям скорость света равна 299 792 км/с; число секунд в календарном году (365,25 суток) есть $365,25 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 31\,557\,600$. Перемножив эти числа, мы получим, что световой год равен $9,46 \cdot 10^{12}$ км. Это огромное число все же меньше одного парсека: 1 пс — 3,26 световых лет. Ближайшая к нам звезда альфа Центавра находится на рас-

стоянии 4,35 световых лет, а от ближайшей внегалактической туманности в созвездии Андромеды свет идет примерно 1 500 000 лет, и расстояние до нее оценивается в 460 000 парсек, или 460 килопарсек.

Для определения таких больших расстояний геометрический способ засечки совершенно непригоден. Поэтому были найдены другие, астрофизические способы, основанные на определении светимости звезд.

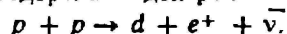
Иногда большие числа называют астрономическими.

Приведенные примеры оправдывают это название.

НОВОСТИ НАУКИ

Частицы из солнечных недр

Единственный источник энергии, который может поддерживать деятельность Солнца, — это ядерные реакции, протекающие в его недрах. Так думают современные физики и астрономы. Эта гипотеза может быть проверена наблюдениями. Цепочка ядерных реакций, которые протекают на Солнце, начинается со столкновения двух протонов, которые при этом излучают позитрон (e^+) и антинейтрино и превращаются в ядро тяжелого водорода — дейтрон:



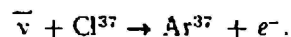
Как бы глубоко в недрах Солнца ни происходила такая реакция, антинейтрино должны вылетать из Солнца, так как они очень слабо взаимодействуют с веществом и поэтому лишь очень малая часть этих частиц поглотится внутри Солнца.

В течение многих лет физики готовились к тому, чтобы зарегистрировать на Земле антинейтрино, летящие от Солнца. Это оказалось очень трудным делом, и в последнее время даже появились сомнения в самом существовании потока солнечных антинейтрино. По крайней мере сообщалось, что их во всяком случае, существенно меньше, чем это требовалось теорией для обеспечения всего потока энергии, рождающегося в недрах Солнца.

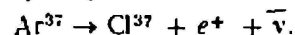
Наконец, прошлым летом усилия физиков увенчались успехом. Американский физик Дэвис, много лет работавший над методами регистрации таких частиц, сообщил

о том, что ему удалось зарегистрировать антинейтрино, летящие от Солнца.

Они регистрировались с помощью счетчика, наполненного изотопом хлора — хлор-37. (На самом деле в счетчике было примерно 500 000 литров жидкого четыреххлористого углерода CCl_4 .) Ядра хлора превращались в ядра аргона-37 в результате реакции



В опытах измерялось количество образовавшегося аргона по его радиоактивному распаду, идущему по схеме



Такой метод был много лет назад предложен академиком Б. М. Понтекорво.

В своей огромной установке Дэвис регистрировал всего по одному распаду Ar^{37} в два дня. Однако именно столько их и должно быть, если учесть, что, как и в Солнце, большинство антинейтрино пролетают всю установку насквозь.

Исходя из своих расчетов, физики ожидали, что число антинейтрино будет раз в 6 больше, однако теория не настолько точна, чтобы подобное расхождение вызвало серьезное беспокойство. Как бы то ни было, антинейтрино, которые свидетельствуют о термоядерных реакциях, снабжающих Солнце (а значит и нашу Землю) энергией, наконец зарегистрированы.

Я. А. Смородинский



Вычисление объемов с помощью принципа Кавальери

В. Л. Рабинович

Что такое объем? Как вычислить объем конкретного тела? Уже для ответа на первый из этих вопросов даже для такого «простого» случая, как прямоугольный параллелепипед, хотя бы одно из измерений которого не соизмеримо с фиксированной единицей длины, приходится пользоваться рассуждением, связанным в той или иной форме с переходом к пределу бесконечной последовательности. При переходе к более сложным вопросам — об определении и вычислении объема произвольного параллелепипеда, затем произвольной призмы, потом (очень важный шаг!) пирамиды, наконец, «круглых» тел: цилиндров, шара и шаровых сегментов — приходится использовать все новые и новые переходы к пределам, буквально нагромождая их друг на друга.

Рассуждения эти, с одной стороны, таят немало тонкостей и трудностей, с другой — представляются (внешне) довольно-таки «стандартными». И непосильность учета всех этих тонкостей и оговорок в школьном курсе математики, и обманчивая «похожесть» всех этих рассуждений о пределах в равной степени приводят к тому, что на них (на рассуждения) начинают смотреть зачастую как на неизбежные ритуальные заклинания, не вдумываясь и не пытаясь постичь их подлинный смысл и цель. Просто пропускать их — тоже как-то «неудобно», «неприлично»: все-таки математика! . . .

Так нельзя ли хотя бы до лучших времен одним махом разделаться со всеми этими неприятными разговорами о пределах? Оказывается, очень

даже можно. Для этого достаточно принять в качестве постулата (аксиомы) так называемый принцип Кавальери *). Именно принять, а не доказывать. Это, конечно, не означает, что принцип этот вообще нельзя доказывать и обосновывать. Больше того, рассуждения о «неделимых», с помощью которых сам Кавальери пришел к его формулировке (во многом, кстати, поразительно предвосхищенные еще Архимедом с его «методом исчерпывания»), были уже довольно близки к методам интегрального исчисления Ньютона и Лейбница, посредством которых в наше время и определяются объемы «со всей строгостью». Но раз уж нашей целью как раз и было на этом этапе избавиться от всяческих пределов, неделимых, бесконечно малых и т. п., то разумнее и честнее будет не пользоваться никакими суррогатами. В конце концов, мы же знаем, что геометрия строится на базе аксиом. Так вот — будет еще одна аксиома. (По ходу дела мы увидим, что фактически придется воспользоваться еще парой аксиом, которые, впрочем, можно воспринимать и как определения.)

Итак, формулируем принцип Кавальери:

*Если при пересечении двух тел **) F и F_1 (см. рис. 1) плоскостями, параллельными одной и той же плоскости α , в сечении всегда получают фигуры, площади которых находятся*

*) Бонавентура Кавальери (1598—1647) — итальянский математик, ученик Галилея.

**) Под «телом» мы всюду понимаем «нечто имеющее объем», не пытаясь точнее определить заключенные в кавычках слова.

в постоянном отношении $\lambda (\lambda > 0)$:

$$S = \lambda S_1,$$

то объемы этих тел находятся в том же отношении:

$$V(F) = \lambda (V(F_1) *).$$

Слово «объем» здесь впервые появляется не в «наводящих» рассуждениях, а в составе строго формулируемого предложения; поэтому нашу аксиому мы можем понимать и как определение объема — конечно, лишь для таких тел F , что для них найдутся соответствующие F_1 , для которых понятие объема уже определено предварительно (см. ниже).

Применим теперь принцип Кавальери для вывода формул объемов некоторых тел. Предварительно нам, однако, придется напомнить, что объем куба, ребро которого равно единице длины, принимается равным единице (такой куб называется *единичным***).

*) Обычно в литературе принципом Кавальери называют предложение, являющееся частным случаем приведенного, когда отношение площадей сечений, о котором говорится в предложении, равно единице. Однако у самого Кавальери принцип приводится и используется и в указанной более общей форме.

**) Это первое из упомянутых выше дополнительных условий, которое можно понимать или как аксиому об объеме единичного куба, или как определение этого объема.

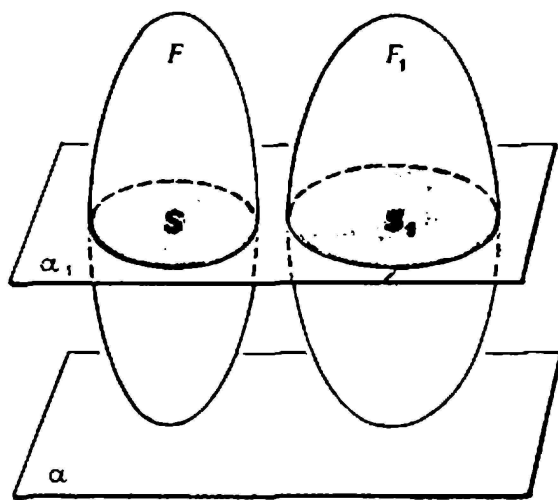


Рис. 1.

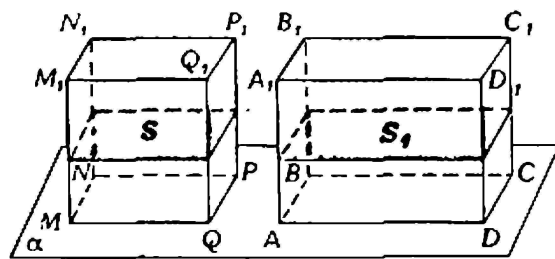


Рис. 2.

а) *Произвольные призма и цилиндр.* Сначала рассмотрим *прямоугольный параллелепипед* с измерениями, равными 1, 1 и h (h может быть как рациональным, так и иррациональным числом). Пусть (рис. 2) в параллелепипеде AC_1 $AB = AA_1 = 1$, $AD = h$. Рассмотрим *единичный куб* MP_1 , основание которого расположено на той же плоскости α , на которой находится основание $ABCD$ параллелепипеда. Легко видеть, что площади сечений S_1 и S параллелепипеда и куба любой плоскостью, параллельной плоскости α , находятся в постоянном отношении h , то есть $S_1 = h \cdot S$. Следовательно, по принципу Кавальери

$$V(AC_1) = h \cdot V(MP_1) = h \cdot 1 = h *).$$

Пусть теперь дана *произвольная призма* (или *цилиндр*) F (рис. 3) с площадью основания S и высотой h . Расположим параллелепипед AC_1 с измерениями 1, 1, h так, чтобы его грань ABB_1A_1 ($AB = 1, AA_1 = 1$) находилась в той же плоскости α , что и основание данной призмы F . Поскольку $AD = h$, то и верхние основания данной призмы и параллелепипеда AC_1 лежат в одной плоскости. Тогда в сечении призмы F любой плоскостью, параллельной α и пересекающей призму, получится фигура, равная основанию призмы. Площадь этой фигуры поэтому равна S . Та же плоскость в сечении с

*) Если принять в качестве постулата упомянутый выше частный случай принципа Кавальери при $\lambda = 1$, то вместо только что приведенной «аксиомы единичного куба» (см. предыдущее примечание) придется взять это соотношение в качестве «аксиомы прямоугольного параллелепипеда».

параллелепипедом дает квадрат площади 1.

Условия принципа Кавальери выполнены. Значит,

$$V(F) = SV(AC_1).$$

Но мы нашли, что $V(AC_1) = h$. Итак,

$$V(F) = Sh.$$

б) *Произвольные пирамида и конус.* Сначала рассмотрим частный случай. Куб AC_1 с ребром, равным h (рис. 4), может быть расчленен на три четырехугольные пирамиды A_1ABCD , $A_1BCC_1B_1$ и $A_1DCC_1D_1$. Эти пирамиды равны между собой. Действительно, первые две пирамиды могут быть совмещены так, чтобы их основания (равные квадраты $ABCD$ и B_1C_1CB) и равные ребра AA_1 и B_1A_1 совпали. Тогда и пирамиды совместятся. Аналогично показывается равенство последних двух пирамид *). Значит, объем каждой из пирамид вдвое меньше объема куба AC_1 :

$$V(A_1ABCD) = \frac{1}{3}h^3 **).$$

Пусть теперь дана произвольная пирамида F (или конус) с площадью

*) Необходимые совмещения любой пары из этих трех пирамид могут быть реализованы, например, при вращении одной из пирамид около оси A_1C на угол 120° .

**) Здесь мы используем последнее из дополнительных определений (аксиом): *объем совокупности нескольких тел (в данном случае куба) равен сумме объемов этих тел (пирамид).* Равенство же объемов равных тел (пирамид) легко следует из принципа Кавальери.

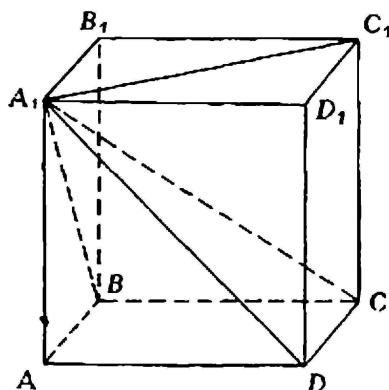


Рис. 3.

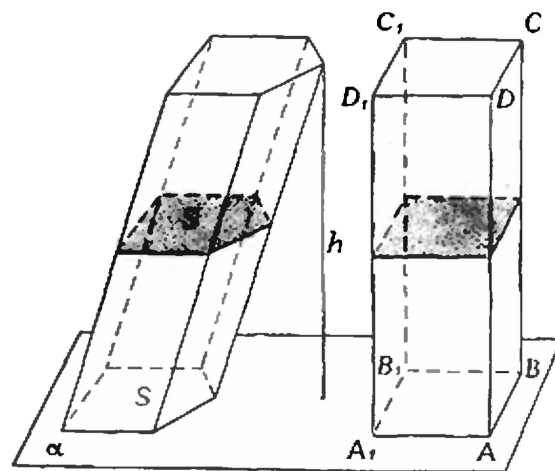


Рис. 4.

основания S и высотой h . Расположим эту пирамиду так, чтобы ее основание находилось в той же плоскости α , в которой находится основание рассмотренной только что четырехугольной пирамиды A_1ABCD (ее будем обозначать для краткости F_1). Можно считать, что вершины этих пирамид находятся по одну сторону от плоскости α . Тогда, используя теорему о сечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию, легко получить, что площади сечений обоих тел плоскостью, параллельной плоскости α , будут относиться как площади их оснований. Поэтому может быть применен принцип Кавальери:

$$V(F) = V(F_1) \cdot \frac{S}{h^2} = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{3}Sh.$$

в) *Шар, шаровой сегмент.* Рассмотрим полушар с центром в O и радиусом R . Продолжим плоскость α ограничивающего этот полушар большого круга и поместим на эту плоскость основанием куб с ребрами, равными R (рис. 5). Если мы отделим от этого куба четырехугольную пирамиду $BA_1B_1C_1D_1$, имеющую вершиной вершину B куба, а основанием — верхнее основание последнего, то получим некоторое тело, которое будем обозначать через F_1 . Пересечем оба тела некоторой плоскостью α' , параллельной плоскости α

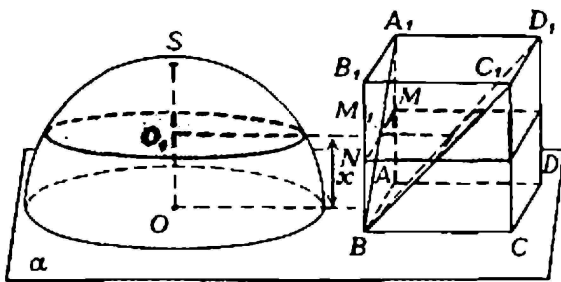


Рис. 5.

и отстоящей от α на расстояние x ($x < R$). В сечении с полушаром эта плоскость дает круг, площадь которого равна $(R^2 - x^2)\pi$. В сечении же тела F_1 той же плоскостью получится фигура, площадь которой равна $R^2 - x^2$ (ибо $M_1N = NB = x$). Отсюда ясно, что условия принципа Кавальери выполнены. Следовательно:

$$V_{\text{полушара}} = \pi V(F_1) = \pi (V_{\text{куба}} - V_{\text{пир}}) = \pi \left(R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Объем шара вдвое больше.

Найдем теперь объем шарового сегмента F' с высотой $SO_1 = h$ (см. тот же рис. 5). Заметим, что приведенное выше для полушара рассуждение показывает, что к сегменту F' и телу F'_1 , полученному после изъятия из прямоугольного параллелепипеда MC_1 усеченной пирамиды M_1C_1 , также применим принцип Кавальери. Поэтому (учитывая, что $BN = M_1N = R - h$):

$$V(F') = \pi V(F'_1) = \pi [V(MC_1) - V(M_1C_1)] = \pi \left[R^2 h - \frac{1}{3} R^3 + \frac{1}{3} (R - h)^3 \right],$$

откуда

$$V_{\text{шар. сегм.}} = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right).$$

г) *Тор*. Тором, как известно, называется тело, полученное вращением круга около оси, расположенной в плоскости круга и не пересекающей последнего. (Форму тора имеет, например, надутая камера

автомобильной шины; в просторечии тор часто именуют «баранкой».)

Для вывода формулы объема тора представим себе, что тор F «лежит» на плоскости α , касаясь ее по некоторой окружности. Обозначим радиус круга, при вращении которого получен тор, через R , а радиус окружности, которую описывает центр круга O_1 , через a . Представим себе, что на плоскости α «лежит» цилиндр F' радиуса R и высоты a , касающийся плоскости α по образующей S_1S_2 . На рисунке 6 оба тела изображены в прямоугольной проекции на плоскость, параллельную оси вращения тора. При этом цилиндр расположен так, что его образующая не параллельна плоскости проекции (xy — ось вращения тора). Пересечем оба тела плоскостью, параллельной плоскости α и отстоящей от O_1 на расстоянии r ($LO_1 = SS_1 = R$, $OO_1 = AD = BC = S_1S_2 = a$; см. рис. 6). Эта плоскость в сечении с тором дает кольцо, площадь которого равна, как нетрудно подсчитать, $4\pi a \sqrt{R^2 - r^2}$. В сечении же цилиндра получится прямоугольник площади $2a \sqrt{R^2 - r^2}$. По принципу Кавальери

$$V(F) = 2\pi V(F_1) = 2\pi^2 a R^2.$$

д) Теперь мы легко выходим за пределы так называемой «элементарной геометрии»; рассмотрим, например, *сегмент параболоида вращения*. Парабола $y = kx^2$ вращается около оси Oy (см. рис. 7), образуя некоторую поверхность вращения. Определим объем тела F , ограниченного

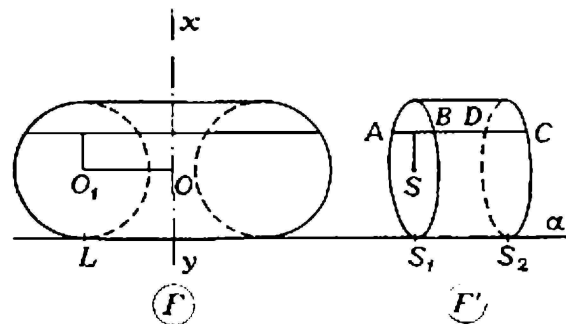


Рис. 6.