Я.С. Дубнов

Введение в аналитическую геометрию

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Я11

Я.С. Дубнов
Я11 Введение в аналитическую геометрию / Я.С. Дубнов – М.: Книга по Требованию, 2019. – 104 с.

ISBN 978-5-458-56947-7

Эта небольшая книжка ставит себе целью ввести учащегося в новый для него метод геометрического исследования. Прямоугольные координаты точки.Уравнения линий.Прямая линия. Окружность.

ISBN 978-5-458-56947-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2019
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2019

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

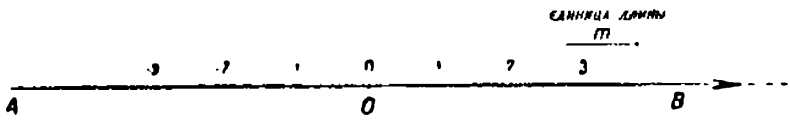
Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

жения физических законов. Если мы, однако, приписываем аналитической геометрии более позднее происхождение, то это потому, что во времена Ореема приложение алгебры к геометрии на основе координатного метода не могло еще широко развернуться из-за несовершенства буквенной символики. Начавшийся в XVI в. подъем науки и техники ознаменовался крупными успехами в области алгебры, опираясь на которые французские математики Ферма и Декарт (XVII в.) смогли заложить основы современной аналитической геометрии. Создание этой дисциплины связывают обычно с именем Декарта („декартова система координат") который опубликовал свою „Геометрию" в 1637 г., между тем как одновременно написанное сочинение Ферма появилось в свет лишь после его смерти — в 1679 г. (лишний пример того, насколько условным является связывание крупного научного события с именем отдельного ученого).

Хотя исторически метод координат был сначала применен к плоскости (два измерения), однако в интересах более систематического изложения мы начнем с понятия о координатах на прямой линии (одно измерение).



Черт. 3.

§ 2. Координата точки на прямой. Подобно тому как дома вдоль улицы отмечаются номерами, точно так же могут быть с помощью чисел („координат") размечены точки вдоль одной прямой линии. Но в то время как для нумерации домов можно ограничиться *целыми* числами, нумерация всех точек, составляющих прямую линию, требует привлечения *всех чисел* — целых, дробных, иррациональных, положительных и отрицательных. Делается это так: желая разметить с помощью чисел все точки бесконечной прямой AB (черт. 3), выбираем:

1) *одно из двух направлений на прямой AB за „положительное"* — отмечаем его стрелкой;

2) *одну из точек* (пусть это будет O) *нашей прямой за — „начало координат"*;

3) *определенный прямолинейный отрезок m* (например отрезок длиной в 1 *см*) — *за единицу длины* („масштаб"), с помощью которой мы будем измерять отрезки на прямой AB.

Теперь мы в состоянии установить соответствие между: всеми точками прямой AB и 2) всеми (вещественными) числами, руководясь следующими правилами: точке O, началу координат, присвоим координату 0 (нуль); точкам луча OB, идущего от O в положительном направлении, будем приписывать положительные координаты, а точкам другого луча OA — отрицательные координаты; за абсолютную же величину координат будем каждый раз брать расстояние рассматриваемой точки от O, измеренное выбранной единицей m. На чертеже 3 точки, лежащие справа от O, имеют положительные координаты, а точки, лежащие слева, — отрицательные координаты.

Прямую, на которой установлены: 1) положительное направление, 2) начало и 3) масштаб, называют *осью координат*, или просто *осью*. Ось чаще всего обозначают двумя буквами, из которых первая относится к началу координат, а вторая — к какой-нибудь точке на положительной полуоси (обычно эта буква ставится около стрелки); например, ось, изображенная на чертеже 4, обозначается OX. Мы можем теперь сказать, что *координатой точки P на оси OX называется расстояние OP* (измеренное принятым масштабом), *взятое со знаком плюс, если направление от O к P совпадает с положительным направлением OX, и со знаком минус, если эти направления противоположны.* Координаты различных точек на оси OX мы будем почти всегда обозначать одной и той же буквой x, но со значками при ней, числовыми (например x_1, x_2, ...) или буквенными (например x_P, x_Q — в этом случае буква непосредственно указывает, к какой точке чертежа относится координата). Таким образом, на чертеже 4

$$x_P = OP; \quad x_Q = -OQ; \quad x_O = 0^{1}).$$

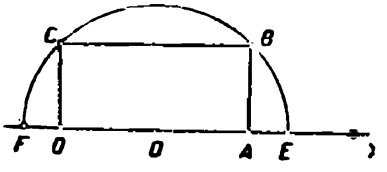
Черт. 4.

Учащийся должен обратить внимание на разницу между „координатой точки" и ее „расстоянием от начала": первая есть число относительное (положительное или отрицательное), второе всегда рассматривается нами как число абсолютное. В связи с этим координата всегда выражается числом *отвлеченным*, например 5, —3 и т. п.; расстояние же — числом *именованным*, например 5 *см*, 3 *см* (если мы иногда говорим для краткости, что „расстояние... равно 5", то при этом подразумевается „равно 5 единицам длины").

Задачи.

1. Начертить прямую, отметить на ней начало, положительное направление, выбрать масштаб и затем построить точки с координатами 1, —1, 4, $\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{2}$.

2. В полукруг с центром O вписан прямоугольник $ABCD$, у которого $BC = 2AB$ (черт. 5). Принимая на оси OX точку O за начало, отрезок OA за единицу длины, найти координаты точек O, A, E, D, F.



Черт. 5.

§ 3. Сдвиг начала координат.

Всякий раз, как на прямой линии выбраны начало координат, положительное направление и масштаб, говорят, что на этой прямой установлена определенная „система координат". На одной и той же прямой можно установить сколько угодно систем координат. Так, например, при измерении температур пользуются (только

[1]) С большей полнотой можно было бы писать:

$$x_P = \frac{OP}{m}, \quad x_Q = -\frac{OQ}{m}.$$

не на бесконечной прямой, а на ограниченном ее отрезке) четырьмя системами, или, как говорят, четырьмя *шкалами*: 1) Цельсия, 2) Реомюра, 3) Фаренгейта, 4) абсолютной шкалой. Шкалы Реомюра, Цельсия имеют общее начало, но различные масштабы; шкала Фаренгейта отличается от остальных выбором и начала и масштаба.

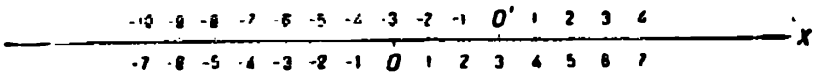
Когда мы переходим от одной системы координат к другой, возникает вопрос, как отразится этот переход на координатах всех точек? Вопрос может быть расчленен на три: какое влияние оказывают в отдельности:

1) сдвиг начала координат,

2) перемена положительного направления на противоположное,

3) изменение масштаба.

Мы займемся подробно только первым из этих вопросов. Итак, пусть начало координат (черт. 6) сдвинуто вдоль прямой из положения O в положение O' (на чертеже этот сдвиг произведен вправо на 3 единицы, причем ни положительное направление, ни масштаб не подвергались



Черт. 6.

изменению. Если говорить сначала о координатах точек, лежащих правее нового начала O', то ясно, что́ с этими координатами произойдет: они уменьшатся на величину сдвига OO', т. е. в нашем случае на 3. Например, точка, имевшая раньше координату 7, получит теперь координату 4 и т. п. (на чертеже 6 старые координаты помечены *ниже* прямой OX, а новые координаты *выше* этой прямой). То же правило подтверждается и при рассмотрении других точек: старая координата $+2$ перейдет в новую -1, а старая -5 в новую -8 в соответствии с равенствами:

$$2-3=-1; \quad -5-3=-8.$$

Покажем, что справедливо следующее *общее правило преобразования координат при сдвиге начала*:

Новая координата всякой точки равна старой ее координате минус координата, которую имеет новое начало в старой системе. Если обозначим через x старую координату (относительно начала O) какой-нибудь точки A, через x' — новую координату (относительно начала O') той же точки и, наконец, через h — координату точки O' в старой системе[1]), то правило это может быть записано формулой:

$$\boxed{x'=x-h.} \tag{1}$$

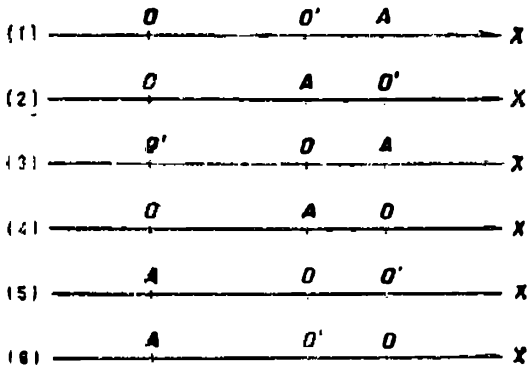
Отсюда

$$\boxed{x=x'+h,} \tag{2}$$

[1]) Координата точки O' в новой системе будет, конечно, нуль.

т. е. *старая координата всякой точки равна новой ее координате плюс координата нового начала в старой системе.*

Желая проверить общность правил, мы должны рассмотреть все возможные случаи взаимного расположения трех точек O, O' и A. Если условимся перечислять эти точки в порядке их следования в положительном направлении оси, то будем иметь дело с шестью случаями (вспомним, что из трех элементов можно составить только шесть перестановок), изображенными на чертеже 7.



Черт. 7.

Разберем здесь для примера только два из шести случаев, предлагая учащемуся по этому образцу рассмотреть остальные.

Случай 1-й:

$$x = OA, \quad x' = O'A;$$
$$h = OO'.$$

Записывая, что больший из трех отрезков между точками O, O', A равен сумме двух меньших, имеем:

$$OA = OO' + O'A,$$

или, переходя на координаты,

$$x = x' + h; \quad x' = x - h.$$

Случай 4-й:

$$x = -AO; \quad x' = O'A; \quad h = -O'O;$$
$$O'O = O'A + AO;$$
$$-h = x' - x; \quad x = x' + h; \quad x' = x - h.$$

Те же результаты получатся в остальных четырех случаях, после чего утверждение будет доказано [1]).

Задачи.

3. Начало координат перенесено в точку, координата которой равна 5. Каковы будут новые координаты точек, которые в старой системе имели координат 8, 3, 0, −2? Сделать чертеж.

4. Решить задачу, отличающуюся от предыдущей только тем, что координата нового начала равна не 5, а −5.

5. Начало перенесено в точку с координатой 4. Каковы были старые координаты точек, новые координаты которых выражаются числами 2, 0, −6?

6. Куда надо перенести начало, чтобы точка с координатой 5 получила координату 7?

7. Начало координат и масштаб остаются без изменения, но положительное направление оси меняется на противоположное. Каковы будут новые координаты точек, имевших в старой системе координаты 6, 1, 0, −4, −7? Обозначая

[1]) Строго говоря, следует еще рассмотреть особо случаи, когда точка A совпадает с O или с O'.

старую координату какой-нибудь точки через x а новую координату той же точки через x', выразить формулой зависимость между x и x'.

8. Для перехода от температуры t по Цельсию к абсолютной температуре T и обратно служат формулы:

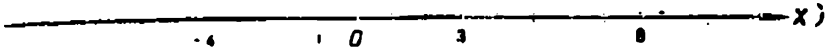
$$T = t + 273, \quad t = T - 273.$$

Сравнить их связь с формулами (1) и (2).

§ 4. Расстояние между двумя точками на прямой. Из самого определения координаты следует, что *расстояние любой точки от начала равно координате этой точки, взятой по абсолютной величине.* Если x есть координата точки A в системе с началом O, то

$$OA = |x|^{1}). \tag{3}$$

Более общей является следующая задача: *по данным координатам x_A и x_B двух точек A и B найти расстояние между этими точками.*



Черт. 8.

В каждом отдельном случае, когда координаты точек A и B даны числами, задача легко решается на основании чертежа. Например, по чертежу 8 легко проверить справедливость результатов, помещенных в последней строке следующей таблицы:

Координата точки A	8	3	— 4	— 4	— 1
Координата точки B	3	— 1	3	— 1	8
Расстояние AB	5	4	7	3	9

Все эти случаи подчиняются общему правилу: *расстояние между двумя точками равно разности их координат, взятой по абсолютной величине:*

$$\boxed{AB = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|.} \tag{4}$$

Для того чтобы доказать общность этого правила при любом расположении точек O, A и B, воспользуемся установленным в предыдущем параграфе правилом преобразования координат при сдвиге начала. Именно, перенесем временно начало координат в одну из данных точек, например в A; тогда новая координата точки A будет нуль, а новую координату точки B обозначим через x'_B. В силу равенства (3) можем написать:

$$AB = |x'_B|;$$

[1]) Абсолютную величину числа принято обозначать, заключая символ этого числа в вертикальные черты: например $|5| = 5$, $|-3| = 3$.

но из равенства (1) § 3 следует, что (независимо от расположения точек O, A и B)

$$x_B = x_B - x_A.$$

Сопоставление двух последних равенств и приводит к формуле (4).

Примечание. При определении расстояния между двумя точками нас интересует только *абсолютная величина* разности координат. В других вопросах может пригодиться и знак этой разности. Легко видеть, что разность $x_B - x_A$ будет положительной или отрицательной, смотря по тому, совпадает или нет направление, идущее от A к B, с положительным направлением оси.

Задачи.

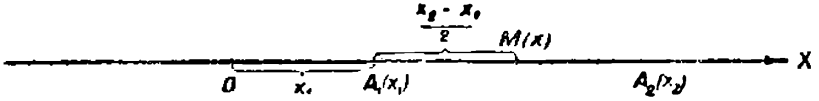
9[1]. Даны точки A (10), B (— 2), C (— 6), D (— 4). Найти вычислением и проверить по чертежу взаимные расстояния между ними.

10. Дана точка A (4); расстояние $AB = 6$. Найти координату точки B.

11. Даны точки A (— 4), B (1), C (— 8), D (10), E (6). Сначала вычислением, а затем по чертежу определить, какие из этих точек наиболее удалены друг от друга и насколько.

12. При данных предыдущей задачи определить, какие из следующих направлений: 1) от A к B, 2) от B к C, 3) от C к D, 4) от D к E совпадают с положительным направлением оси, а какие ему противоположны.

§ 5. Деление отрезка в данном отношении. Задача 1. *На оси даны две точки $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$. Зная координаты концов отрезка A_1A_2, найти координату его середины M.*



Черт. 9.

1-е решение. Допустим сначала, что точки A_1 и A_2 лежат на положительной полуоси, причем $x_1 < x_2$. Обозначая искомую координату точки M через x, имеем (черт. 9):

$$x = OM = OA_1 + A_1M = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Хотя мы исходили из особого расположения точек A_1 и A_2 на оси, но полученный результат, как увидим, верен при любом их расположении.

В дальнейшем, при выводе формул аналитической геометрии, мы не раз будем облегчать себе работу тем, что чертеж будем делать наиболее удобный для решения задачи. Конечно, при этом у нас не будет уверенности в том, что полученный результат справедлив для любого другого чертежа. В таких случаях *доказательство общности* найденной формулы будет даваться либо непосредственно вслед за первым ее выводом, либо в отдельном приложении, помещенном в конце книги.

---

[1]) Здесь и в дальнейшем, вместо того чтобы писать, например, „точка A с координатой 5", мы будем пользоваться сокращенным обозначением: „точка $A(5)$".

В интересующей нас сейчас задаче общность результата может быть легко проверена; с этой целью рассмотрим:

2-е решение, в котором точки A_1 и A_2 предполагаются расположенными как угодно (и даже рассуждение можно проводить без чертежа). Запишем в координатах условие $A_1M = MA_2$. Так как $A_1M = |x - x_1|$ и $MA_2 = |x_2 - x|$, то имеем:

$$|x - x_1| = |x_2 - x|. \tag{5}$$

Но так как точка M лежит между A_1 и A_2, то разности $x - x_1$ и $x_2 - x$ либо обе положительны, либо обе отрицательны. Поэтому в последнем равенстве можно отбросить вертикальные черточки, поставленные для обозначения абсолютных величин, и написать просто:

$$x - x_1 = x_2 - x.$$

Решая это уравнение относительно неизвестного, снова найдем:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2},} \tag{6}$$

т. е. *координата середины отрезка равна полусумме координат его концов* (иначе — равна среднему арифметическому координат его концов).

В только что решенной задаче отрезок A_1A_2 был разделен пополам. Поставим теперь перед собой более общую задачу, в которой отрезок A_1A_2 будет разделен на части, вообще говоря, неравные, но находящиеся между собой в определенном, известном нам отношении.

Черт. 10.

Задача 2. *Отрезок, заключенный между точками $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$, разделен точкой N на две части, длины которых относятся, как $n_1 : n_2$ (именно: $A_1N : NA_2 = n_1 : n_2$). Найти координату делящей точки N.*

1-е решение. Обозначая через x искомую координату точки N, имеем (черт. 10):

$$x = ON = OA_1 + A_1N$$

Но $OA_1 = x_1$, а отрезок A_1N составляет часть отрезка A_1A_2, выражаемую дробью $\frac{n_1}{n_1 + n_2}$, т. е.

$$A_1N = \frac{n_1}{n_1 + n_2} A_1A_2 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}(x_2 - x_1).$$

Таким образом,

$$x = x_1 + \frac{n_1(x_2 - x_1)}{n_1 + n_2} = \frac{n_2x_1 + n_1x_2}{n_1 + n_2}.$$

2-е решение. Как бы ни были расположены точки A_1 и A_2 на оси, имеем $A_1N = |x - x_1|$, $NA_2 = |x_2 - x|$. Поэтому пропорция $A_1N : NA_2 = n_1 : n_2$ может быть записана сначала в виде

$$\frac{|x - x_1|}{|x_2 - x|} = \frac{n_1}{n_2},$$

а затем (по соображениям, примененным во втором решении предыдущей задачи) в более простом виде:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Решая это уравнение относительно неизвестного x, снова придем (но на этот раз уже с гарантией общности) к формуле:

$$\boxed{x = \frac{n_2 x_1 + n_1 x_2}{n_1 + n_2}.} \qquad (7)$$

Примечание 1. Формула (6), разумеется, должна содержаться в формуле (7) как частный случай. Действительно, если точка N делит отрезок A_1A_2 пополам, то можно считать $n_1 = n_2 = 1$, и тогда уравнение (7) превращается в уравнение (6).

Примечание 2. Рассматривая числитель дроби в формуле (7), учащийся, конечно, обратит внимание на сочетание индексов при буквах n и x. Для того чтобы легче выразить результат этого наблюдения словами, представим себе на время, что числа n_1 и n_2 — целые (хотя условие задачи этого вовсе не предполагает). Тогда можно считать, что отрезок A_1A_2 разделен на $(n_1 + n_2)$ равных частей, из коих n_1 частей содержится в отрезке A_1N и n_2 частей — в отрезке NA_2. В этом предположении содержание равенства (7) может быть выражено в следующей легко запоминаемой форме: координата делящей точки равна координате левого конца, умноженной на число частей в правом отрезке, плюс координата правого конца, умноженная на число частей в левом отрезке, — все это деленное на сумму частей, заключенных в обоих отрезках.

Задачи.

13. Найти координату середины отрезка, заключенного между точками $A(3)$ и $B(10)$.

14. На оси даны точки $A(-6)$, $B(-1)$, $C(6)$. Найти координаты середин отрезков AB, BC, AC.

15. Середина отрезка AB находится в точке $C(2)$. Зная, что $x_B = 9$, найти x_A.

16. Можно ли равенство (5) писать в виде $|x_1 - x| = |x_2 - x|$? Можно ли и здесь отбросить вертикальные черты, как мы это делали по отношению к равенству (5)?

17. Отрезок AB разделен точкой C так, что $AC : CB = 2:5$. Зная, что $x_A = 3$, $x_B = 17$, найти x_C.

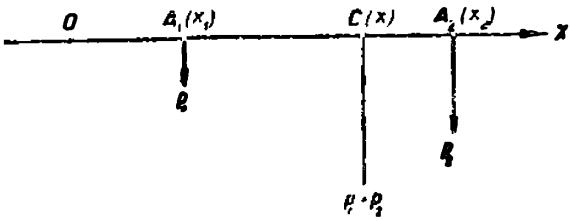
18. Точки M и N делят отрезок, заключенный между точками $A(-5)$ и $B(\ )$, на три части так, что $AM : MN : NB = 3:6:1$. Найти координаты точек M и N.

19. Отрезок между точками $A(-8)$ и $B(7)$ разделен на 5 равных частей. Найти координаты точек деления.

20. Точка $C(3)$ делит отрезок между точками $A(x)$ и $B(9)$ в отношении $5:2$. Найти x.

§ 6. Центр параллельных сил. Полученный в предыдущем параграфе результат мы приложим сейчас к решению важной для механики

(статики) задачи. Известно, что если в точках A и B твердого тела приложены две параллельные и направленные в одну сторону силы, то равнодействующая (равная сумме этих сил и направленная в ту же сторону) делит отрезок AB на части, обратно пропорциональные силам, приложенным в A и B. Та точка, в которой направление равнодействующей пересекает отрезок AB, называется *центром двух параллельных сил*, приложенных в A и B (напомним еще, что положение этого центра не зависит от общего направления составляющих сил, т. е. центр останется на месте, если обе силы повернуть на один и тот же угол, сохраняя их параллельность и одинаковую направленность).



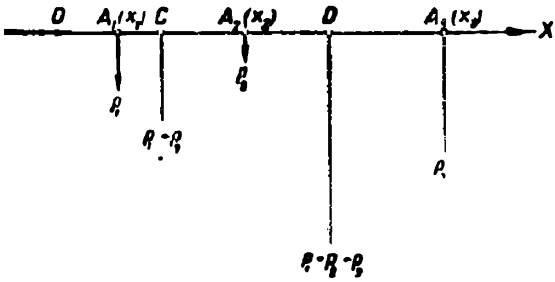
Черт. 11.

Задача 1. *В точках $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$ приложены две параллельные одинаково направленные силы, величины которых соответственно p_1 и p_2. Найти центр этих двух сил* (черт. 11).

Решение. Если $C(x)$ — искомый центр, то согласно упомянутому закону статики $A_1C:CA_2=p_2:p_1$.

Но в таком случае формула (7) (см. также примечание 2, § 5) сразу дает:

$$x=\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}; \qquad (8)$$



Черт. 12.

обратить внимание на сочетание индексов при буквах p и x в числителе дроби; сравнить с сочетанием индексов при буквах n и x в формуле (7).

Теперь мы в состоянии перейти к решению более сложной задачи — к нахождению центра *трех* (а в дальнейшем и большего числа) параллельных сил. Как известно, центр трех параллельных и одинаково направленных сил может быть найден следующим построением: заменяем две из данных силы их равнодействующей, приложенной в центре этих двух сил; затем строим центр для этой равнодействующей и третьей силы.

Задача 2. *В точках $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$, $A_3(x_3)$ приложены силы p_1, p_2, p_3, параллельные и одинаково направленные. Найти координату центра системы, составленной из этих трех сил* (черт. 12).

Решение. Равнодействующая сил p_1 и p_2 имеет величину p_1+p_2 и направление, одинаковое с направлением всех трех сил; за точку

приложения этой равнодействующей возьмем центр сил p_1 и p_2, т. е точку C с координатой [см. уравнение (8)]

$$x_C = \frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2}.$$

Найдем теперь равнодействующую двух сил $(p_1 + p_2)$ и p_3; центр D этих сил (который и будет центром всей системы) должен делить отрезок CA_3 в отношении $p_3 : (p_1 + p_2)$:

$$CD : DA_3 = p_3 : (p_1 + p_2).$$

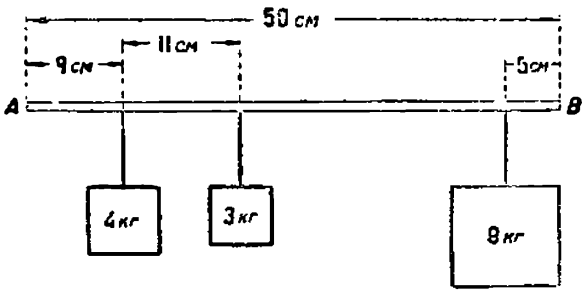
Применяя снова формулу (7), получим

$$x_D = \frac{(p_1 + p_2)\, x_C + p_3x_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

Остается подставить сюда ранее полученное выражение для x_C, чтобы прийти к окончательному результату:

$$x_D = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3}{p_1 + p_2 + p_3}, \qquad (9)$$

т. е. координата центра трех параллельных, одинаково направленных сил получится, если величину каждой силы умножим на координату точки ее приложения и сумму полученных произведений разделим на сумму величин всех трех сил (т. е. на величину равнодействующей). Формулы (8) и (9) (в особенности — их обобщение, см. ниже задачу 24) имеют важное значение в статике твердого тела.



Черт. 13.

Задачи.

21. Найти координату центра двух параллельных и одинаково направленных сил, величины которых суть 5 и 3, а точки приложения соответственно $A(-2)$ и $B(7)$.

22. Из двух параллельных одинаково направленных сил одна, равная 4, приложена в начале координат, другая, равная 5, приложена в точке $A(5)$. Найти координату центра.

23. К прямоугольному стержню AB (черт. 13) подвешены 3 груза, размеры которых и точки приложения показаны на чертеже. За какую точку надо подвесить стержень для того, чтобы система находилась в равновесии (весом стержня пренебрегаем)?

24. В обобщение формул (8) и (9) найти координату центра системы, состоящей из n параллельных одинаково направленных сил $p_1, p_2, \ldots, p_n$, приложенных соответственно в точках $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$, ..., $A_n(x_n)$.

Указание. Применить рассуждение „от n к $n+1$".