

Р. Беллман

**Прикладные задачи динамического
программирования**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 004.42
ББК 32.811
Р11

Р11 **Р. Беллман**
Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман – М.: Книга по Требованию, 2024. – 458 с.

ISBN 978-5-458-29318-1

Данная книга, впервые появляющаяся в русском переводе, существенно отличается как по содержанию, так и по методическим установкам от ранее вышедших. Ее основной целью (и основным достоинством) является демонстрация приемов, позволяющих довести решение прикладных задач до численных результатов. Изложение проблем общего характера сопровождается подробным решением достаточно сложных примеров. При этом приводятся блок-схемы вычислительных планов, необходимые для постановки задач на цифровых вычислительных машинах, даются результаты вычислений, а также оценки требуемого машинного времени и объема памяти.

ISBN 978-5-458-29318-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

46. Последовательные приближения — III	121
47. Коэффициенты связи	124
48. Грубая сетка	125
49. Последовательные приближения в задаче Хичкока — Купманса	126
50. Сходимость	127
51. Пример I — относительный минимум	127
52. Пример II — абсолютный минимум	129
53. Стохастическая итерация	133
54. Выводы	134
55. Задачи о «трудной переправе»	134
56. Общая задача	135
57. Функциональные уравнения	135
58. Обсуждение	136
59. Численное решение	137
Комментарии и библиография	138

Глава III. Одномерные процессы сглаживания и состав- ления расписаний	143
1. Введение	143
2. Процессы сглаживания	144
3. Пример процесса сглаживания	144
4. Математическая постановка задачи	145
5. Функциональные уравнения	146
6. Обсуждение	146
7. Вычислительные аспекты	146
8. Результаты	148
9. Блок-схема	149
10. Несколько графических результатов	149
11. Задачи о ближайшем соседе	149
12. Замена оборудования	156
13. Физический процесс	157
14. Постановка задачи в терминах динамического про- граммирования	157
15. Аналитическое решение	158
16. Технологические усовершенствования	158
17. Формулировка задачи в терминах динамического про- граммирования	160
18. Пример	161
19. Другие постановки задачи	166
20. Задача складирования	169
21. Математическая модель	169
22. Рекуррентные соотношения	170
23. Обсуждение	171
24. Предварительные преобразования	171
25. Аналитическая структура	173
26. Доказательство теоремы	173
27. Обсуждение	175
28. Численный пример	175
29. Выводы	177
30. Задача о поставщике	177

31. Подход с точки зрения динамического программирования — I	178
32. Подход с точки зрения динамического программирования — II	178
33. Аналитическое решение для $q = 1, p = 2$	180
34. Аналитическое решение для $q = k, p = k + 1$	181
35. Аналитическое решение для $q = 1, p = 3$ (I)	181
36. Аналитическое решение для $q = 1, p = 3$ (II)	183
37. Аналитическое решение	184
38. Решение, основанное на здравом смысле	184
39. Задача управления запасами	186
40. Обсуждение	188
41. Дальнейшие упрощения	189
42. Планирование производственной линии	190
43. Математическая постановка задачи	191
44. Подход с точки зрения динамического программирования	192
45. Определение оптимальной перестановки	193
46. Пример	194
47. Заключение	195
Комментарии и библиография	196
Глава IV. Методы оптимального поиска	202
1. Введение	202
2. Унимодальные функции	203
3. Одномерный оптимальный процесс нахождения точки максимума	203
4. Числа Фибоначчи	205
5. Золотое сечение	206
6. Дискретный случай	206
7. Нули функций	207
8. Функциональные уравнения	208
9. Частный случай $n = 1$	212
10. Случай $n = 1, S = 0$	213
11. Описание процесса вычислений	215
12. Численный пример — сравнение с вычислительным методом деления отрезка пополам	216
13. Обсуждение	218
14. Задача о фальшивой монете	219
15. Задача с двумя монетами	220
16. Аналитическая постановка задачи	221
17. Значения функции $p(r; s; t)$	223
18. Основное функциональное уравнение	223
19. Вычислительные процедуры	225
20. Рассмотрение с помощью теории информации	230
Комментарии и библиография	232
Глава V. Динамическое программирование и вариационное исчисление	234
1. Введение	234
2. Функционалы	235

3. Формальный аппарат вариационного исчисления . . .	236
4. Необходимые условия	240
5. Естественные граничные условия	240
6. Изопериметрические задачи	241
7. Недостатки вариационного исчисления	241
8. Двухточечные краевые задачи	244
9. Ограничения	245
10. Линейность	247
11. Формальный аппарат динамического программирования	247
12. Основное нелинейное уравнение в частных производных	248
13. Уравнение Эйлера	249
14. Условие Лежандра	250
15. Условие Вейерштрасса	250
16. Случай нескольких зависимых переменных	251
17. Изопериметрическая задача	252
18. Множитель Лагранжа	253
19. Естественные граничные условия	254
20. Условие трансверсальности	254
21. Угловые условия Эрдманна	255
22. Неявные вариационные задачи	255
23. Ограничения в виде неравенств	257
24. Уравнение Гамильтона—Якоби	258
25. Дискретные приближения	260
26. Обсуждение	262
27. Двухточечные краевые задачи	262
28. Двойственность	264
29. Заключение	264
Комментарии и библиография	265
Глава VI. Оптимальные траектории	269
1. Введение	269
2. Упрощенная задача о выборе траектории	270
3. Двойственная задача	272
4. Задача о наборе высоты за минимальное время	272
5. Формулировка в терминах динамического программирования	273
6. Аналитическое решение	274
7. Вычислительная процедура	275
8. Образец расчета	276
9. Обобщенная задача о наборе высоты	281
10. Задача о траектории спутника	282
11. Упрощенная задача	283
12. Математическая формулировка	283
13. Аналитическое решение	285
14. Решение с помощью динамического программирования—I	285
15. Решение с помощью динамического программирования—II	286
16. Вычислительные результаты	287

17. Численные результаты	289
18. Блок-схема	290
19. Новое понятие управления	292
20. Многоступенчатые ракеты	292
21. Задача об оптимальном разделении	293
22. Формулировка	293
23. Задачи более высокой размерности	294
24. Задача о путешествиях	295
25. Вычислительные аспекты	296
26. n -й по краткости путь	297
27. Заключение	298
Комментарии и библиография	298
Глава VII. Многошаговые производственные процессы, использующие промышленные комплексы	302
1. Введение	302
2. Двухотраслевой экономический комплекс	303
3. Математическая модель	304
4. Обсуждение	305
5. Использование динамического программирования	306
6. Исследование вершин	307
7. Уменьшение размерности и диапазона изменения величин	308
8. Техника вычислений	310
9. Стационарный рост	313
Комментарии и библиография	314
Глава VIII. Процессы регулирования с обратной связью	316
1. Введение	316
2. Классическая задача регулирования	317
3. Детерминированные задачи регулирования с обратной связью	318
4. Временное запаздывание	320
5. Формулировка вариационных задач	320
6. Аналитические аспекты	321
7. Дискретный вариант	321
8. Функциональные уравнения	322
9. Задача о релейном управлении	322
10. Выключение ядерного реактора	324
11. Максимальное отклонение	326
12. Максимальная дальность	327
13. Минимум максимального отклонения	328
14. Понижение размерности	329
15. Обсуждение	331
16. Стохастические процессы регулирования	332
17. В чем состоит оптимальная политика?	333
18. Функциональные уравнения	335
19. Вычислительные аспекты	336
20. Корреляция	336
21. Пример (по Аоки)	337
22. Игры против природы	338

23. Процессы с адаптацией	338
24. Адаптивное регулирование с обратной связью	340
25. Вычислительные аспекты	340
26. Теория связи и информации	342
27. Полезность как функция использования	343
28. Формулировка в терминах динамического программирования	343
29. Процесс с адаптацией	344
30. Формулировка в терминах динамического программирования	345
31. Степенной закон	345
32. Логарифмический закон	346
33. Дальнейшие упрощения и численные результаты	346
Комментарии и библиография	349
Глава IX. Численные результаты для процессов регулирования с обратной связью	354
1. Введение	354
2. Дискретный стохастический процесс	354
3. Рекуррентные соотношения	355
4. Выбор параметров	356
5. Обсуждение результатов	357
6. Задача о конечных значениях	358
7. Стохастический вариант	362
8. Процесс с адаптацией	362
Комментарии и библиография	364
Глава X. Линейные уравнения и квадратичные критерии	365
1. Введение	365
2. Задача сглаживания	366
3. Обсуждение	367
4. Более сложная задача сглаживания	368
5. Слабо связанные системы	369
6. Характеристические числа	370
7. Стохастическое сглаживание	372
8. Линейные процессы управления с квадратичными критериями — детерминированный случай	372
9. Стохастический случай	373
10. Понижение размерности	374
11. Линейная теория предсказания	375
12. Детерминированный случай	376
13. Стохастический случай	377
14. Корреляция	377
15. Теория предсказания с адаптацией	378
Комментарии и библиография	379
Глава XI. Марковские процессы решения	381
1. Введение	381
2. Марковские процессы	382
3. Марковский процесс решения	383

4. Пример — задача о такси	384
5. Аналитическая формулировка	386
6. Вычислительные аспекты	386
7. Асимптотическое поведение	387
8. Обсуждение	388
9. Метод Ховарда итерации в пространстве политик	389
10. Операция определения переходных значений	390
11. Процедура улучшения политики	390
12. Решение задачи о такси	391
13. Более общая задача	396
14. Общее решение	397
15. Задачи о замене оборудования в пересмотренной по- становке	398
16. Задача о производстве шин	398
17. Формулировка в терминах динамического программи- рования	399
18. Числовой пример	400
19. Другой пример	401
20. Задача о замене автомашины	402
21. Метод имитирования	410
22. Связь с линейным программированием	410
23. Резюме	410
Комментарии и библиография	411
 Глава XII. Численный анализ	 413
1. Введение	413
2. Трудности, связанные с размерностью	413
3. Полиномиальная аппроксимация	414
4. Ортогональные полиномы	415
5. Гауссовы квадратуры	416
6. Численный пример	417
7. Использование математического анализа	419
8. Устойчивость	420
9. Задача о брахистохроне	420
10. Математическая формулировка	421
11. Вариационное решение	421
12. Постановка задачи в терминах динамического про- граммирования	422
13. Вычислительная процедура	423
14. Численные результаты	424
15. Одна задача с ограничениями	425
16. Аналитическое решение	425
17. Постановка в терминах динамического программиро- вания	426
18. Вычислительная процедура	427
19. Численные результаты	428
20. Аппроксимация кусочно-линейными функциями	428
21. Основное рекуррентное соотношение	429
22. Обобщения	429
Комментарии и библиография	430

Приложение I. Трансцендентная кривая. О. Гросс	431
1. Число точек перегиба	431
2. Необходимое и достаточное условие выпуклости . . .	433
Приложение II. Новый подход к теории двойственности математического программирования С. Дрейфус и М. Фреймер	435
1. Введение	435
2. Двойственная задача линейного программирования . .	435
3. Уравнения Куна—Таккера: квадратичный случай . . .	441
4. Уравнения Куна—Таккера: общий случай	443
Библиография	444
Приложение III. Вычислительный метод, основанный на последовательных приближениях в пространстве политик. С. Дрейфус	445
1. Введение	445
2. Задача	446
3. Рекуррентные уравнения	447
4. Способы улучшения	449
Библиография	452
Приложение IV. О новом функциональном преобразовании в анализе: преобразование максимума. Р. Беллман и В. Каруш	453
1. Введение	453
2. Преобразование максимума	454
3. Обратный оператор	455
4. Применение	456
Библиография	457
Приложение V. Счетная машина RAND-Джонниак. С. Дрейфус	458

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Еще два десятилетия тому назад технические и тем более экономические науки носили описательный характер. Проектирование машин, планирование производства велось путем рассмотрения немногих отдельных вариантов, выбираемых из множества объективно возможных на основе технической или экономической интуиции, т. е. в конечном счете на основе прошлого опыта. Некоторые из этих вариантов оказывались практически удачными, другие отпадали.

Подобная процедура «проб и ошибок» и в настоящее время широко распространена. Однако с развитием техники, усложнением структуры производства, усложнением и удорожанием самих проектируемых конструкций начало складываться убеждение в необходимости замены процедуры «проб и ошибок» более эффективной методикой аналитического проектирования и планирования, основанного на выборе наилучшего, оптимального варианта в процессе предварительного математического исследования.

В настоящее время эта проблема оптимизации стала одной из основных проблем в технических и экономических науках. Необходимый для ее решения математический аппарат, казалось бы, имелся в готовом виде — это классический анализ и вариационное исчисление. Однако непосредственное применение известного аппарата столкнулось с значительными трудностями. Реальные задачи оптимизации не укладывались непосредственно в классические схемы, что вызвало к жизни

появление за последние годы целого ряда новых математических исследований.

Среди них важное место занимают работы Р. Беллмана и его сотрудников, результатом которых явилось создание метода динамического программирования.

Предложенный Р. Беллманом аппарат функциональных уравнений значительно расширяет возможности решения реальных проблем оптимизации. Его главным достоинством является хорошая «приспособленность» к использованию современной вычислительной техники.

Изложению метода динамического программирования и его приложений были посвящены уже известные советскому читателю книги: Р. Беллман, Динамическое программирование, ИЛ, 1960; Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс, Некоторые вопросы математической теории управления, ИЛ, 1962; Р. Беллман, Процессы регулирования с адаптацией, Изд-во «Наука», 1964.

Данная книга, впервые появляющаяся в русском переводе, существенно отличается как по содержанию, так и по методическим установкам от ранее вышедших. Ее основной целью (и основным достоинством) является демонстрация приемов, позволяющих довести решение прикладных задач до численных результатов.

Изложение проблем общего характера сопровождается подробным решением достаточно сложных примеров. При этом приводятся блок-схемы вычислительных планов, необходимые для постановки задач на цифровых вычислительных машинах, даются результаты вычислений, а также оценки требуемого машинного времени и объема памяти.

В теоретическом отношении наибольший интерес представляют два момента. Если в предыдущих работах Р. Беллмана динамическое программирование выступало совершенно оторванным от других методов оптимизации, то здесь изложение сопровождается сопоставлением с результатами современного

вариационного исчисления, основанного на использовании не только уравнений Эйлера, но и более сильных и тонких условий (например, условия Вейерштрасса или близкого к нему принципа максимума Понтрягина). Значительное внимание уделяется связи линейного и динамического программирования. Другим важным моментом является подробная разработка в данной книге идеи последовательного приближения в пространстве политик (управлений), позволяющей в значительной мере преодолеть главные практические трудности в применении динамического программирования.

Вместе с тем надо отметить несколько апологетический характер изложения, в ходе которого авторы постоянно настаивают на решительном превосходстве метода динамического программирования над всеми другими методами оптимизации. Читателям, практически работавшим в этой области, конечно известно, насколько эффективным в ряде реальных задач является применение и иных идей, например принципа максимума.

К другим недостаткам книги относятся некоторая небрежность формулировок и нередко встречающиеся неточности в изложении, которые, по-видимому, лишь частично удалось исправить при переводе.

Однако можно быть уверенным, что, несмотря на указанные недостатки, данная книга будет весьма интересной, а главное, полезной для широкого круга читателей.

Перевод книги выполнили: О. В. Шалаевский (гл. I), А. П. Хусу (гл. II, X—XII и приложения), Н. М. Митрофанова (гл. III—V) и А. А. Первозванский (гл. VI—IX). К большинству глав редактором были сделаны дополнительные библиографические указания.

А. Первозванский