В.В. Голубев

Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
В11

В.В. Голубев

В11 Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев – М.: Книга по Требованию, 2013. – 434 с.

ISBN 978-5-458-27823-2

Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.2-е издание.В настоящей книге изложено с некоторыми дополнениями содержание лекций, читанных в течение ряда лет студентам и аспирантам МГУ.Задачей курса было познакомить слушателей с классическими вопросами теории аналитических функций, выходящими за пределы содержания курсов и учебников по основам теории аналитических функций.Обычное содержание курса по теории аналитических функций ограничивается общими теоремами, их приложениями почти исключительно к однозначным функциям, теоремам существования и простейшими примерами конформного отображения и иногда вопросами, относящимися к теореме Пикара и её различным обобщениям и к теории однолистных функций.В книге отсутствуют страницы: 327, 340, 341, 324.

ISBN 978-5-458-27823-2

© Издание на русском языке, оформление «YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка, «Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ГЛАВА ПЯТАЯ.

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. ПРОБЛЕМА РИМАНА.

ГЛАВА ШЕСТАЯ.

ОТОБРАЖЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ ДУГАМИ ОКРУЖНОСТЕЙ.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ.

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АВТОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ.

АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ФУКСА И КЛЕЙНА.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ.

Второе издание «Лекций» в основном воспроизводит текст вышедшего в 1941 г. первого издания. Внесено несколько незначительных дополнений и исправлены замеченные опечатки.

Моим товарищам по научной и педагогической работе и моим слушателям приношу глубокую благодарность за ряд исправлений и уточнений в тексте, которые были ими указаны.

Вл. Голубев.

31/V 1950 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ.

В настоящей книге изложено с некоторыми дополнениями содержание лекций, читанных в течение ряда лет студентам и аспирантам МГУ.

Задачей курса было познакомить слушателей с классическими вопросами теории аналитических функций, выходящими за пределы содержания курсов и учебников по основам теории аналитических функций.

Обычное содержание курса по теории аналитических функций ограничивается общими теоремами, их приложениями почти исключительно к однозначным функциям, теоремами существования и простейшими примерами конформного отображения и иногда вопросами, относящимися к теореме Пикара и ее различным обобщениям и к теории однолистных функций. При этом совершенно выпадают такие основные вопросы, как теория алгебраических функций, поверхностей Римана, понятие о жанре алгебраической функции, и вообще все вопросы, связанные с многозначными функциями, характером и классификацией их особых точек, и, наконец, основные понятия теории полиэдрических, модулярных и автоморфных функций, то-есть всех функций, связанных с теорией групп движения, с одной стороны, и с важнейшими вопросами конформного отображения,—с другой.

Аналитическая теория дифференциальных уравнений, помимо своих собственных задач и методов, дает чрезвычайно удобный материал для ознакомления с перечисленными выше вопросами.

С этой точки зрения и написана настоящая книга. При ее составлении автор использовал ряд заметок, сделанных на лекциях слушателями. Особенно широко были использованы мною записи лекций, составленные доцентом ВВА РККА В. С. Пугачевым. За разрешение использовать эти записи и за помощь при обработке ряда параграфов книги считаю своим долгом выразить ему глубокую благодарность.

Вл. Голубев.

ВВЕДЕНИЕ.

Задача интегрирования дифференциальных уравнений является классической и важнейшей задачей математического анализа.

Весьма большое число различных задач механики, математической физики, инженерных наук и различных других областей знания приводится к интегрированию дифференциальных уравнений. Математические трудности, которые встречаются при интегрировании этих уравнений, часто задерживают решение прикладных задач. Примером может служить знаменитая задача о трех телах, невозможность полного разрешения которой обусловливается отсутствием методов интеграции уравнений такого типа, какие встречаются в этой задаче, и невозможностью до конца исследовать их интегралы.

Всякий прогресс в изучении интегралов дифференциальных уравнений сейчас же позволяет продвинуть решение ряда прикладных задач. Классическим примером этого может служить случай движения твердого тела, найденный и до конца изученный С. В. Ковалевской. Она нашла этот случай, исходя из попытки найти такие случаи движения твердого тела, когда интегралы соответствующих уравнений обладают некоторым аналитическим свойством.

Развитие теории дифференциальных уравнений имеет не меньшее значение и для развития самого математического анализа. Среди бесконечного разнообразия функций, к которым приводят общие методы современной теории функций, конечно, не все представляют одинаковый интерес для исследования. Большей частью особый интерес представляют классы функций, обладающих какими-нибудь особыми функциональными свойствами (например, периодичностью, теоремой сложения и т. п.) или удовлетворяющих дифференциальным уравнениям особенно простых типов. Теория дифференциальных уравнений является источником, питающим математический анализ различными новыми классами функций. К теории эллиптических функций, абелевых функций, автоморфных функций и различных классов так называемых специальных функций (функций Лежандра, Бесселя, Ламе и т. д.) привели задачи теории дифференциальных уравнений.

В первых исследованиях по теории дифференциальных уравнений, естественно, стремились выразить интегралы уравнений через известные функции или свести интегрирование уравнений к взятию интегралов от известных функций. Математиками XVIII столетия — Эйлером, Бернулли, Клеро и другими — были достигнуты в этом направлении основные результаты, которые и излагаются в настоящее время в элементарных курсах по интегрированию дифференциальных уравнений.

Однако в таком направлении задача решается только в случае особенно простых дифференциальных уравнений. В подавляющем же большинстве случаев задача нахождения интегралов не приводится к вычислению интегралов от известных функций, а самые интегралы не выражаются конечными комбинациями известных функций. Это обстоятельство выдвинуло задачу изучения свойств интеграла непосредственно по дифференциальному уравнению. Такое исследование можно вести в различных направлениях.

С одной стороны, исходя, например, из того соображения, что с геометрической точки зрения интеграл уравнения представляет собой некоторую линию — интегральную кривую, можно изучать общие свойства таких интегральных кривых, их особые точки, общее расположение кривых семейства и т. п. С этой точки зрения изучение дифференциальных уравнений ведется в так называемой *качественной теории дифференциальных уравнений*.

Можно исследовать интегралы дифференциальных уравнений и с другой точки зрения. Еще Коши показал, что при весьма широких предположениях относительно характера дифференциального уравнения его интегралы представляют собой *аналитические функции комплексного переменного*. Поэтому интегралы таких уравнений можно изучать обычными методами теории функций комплексного переменного. С этой точки зрения и ведется исследование интегралов дифференциальных уравнений в аналитической теории дифференциальных уравнений. Таким образом аналитическая теория дифференциальных уравнений есть часть общей теории функций комплексного переменного, в которой общие методы прилагаются к изучению интегралов дифференциальных уравнений различных классов и к нахождению классов дифференциальных уравнений, интегралы которых обладают какими-нибудь свойствами, представляющими особый интерес с точки зрения теории функций комплексного переменного (однозначность, характер особых точек и т. п.).

Представляя собой часть общей теории функций комплексного переменного, аналитическая теория дифференциальных уравнений развивалась параллельно с общей теорией. Начало ее развитию было положено в работах Коши [1]), который для широкого класса урав-

[1]) Cauchy A., «C. R.», т. 9, 10, 11, 14, 15 и 23 (1839—1849) (ряд заметок). Oeuvres, т. 4—7 и 10, ч. 1.

нений доказал существование интегралов, представляющих собой некоторые аналитические функции комплексного переменного. Результаты Коши носили локальный характер; поведение интегралов изучалось лишь в области, определяемой начальными данными, а сам метод не давал возможности изучить поведение интеграла как аналитической функции во всей области его существования. В работах Брио и Буке постановка задачи носит более широкий характер. Им принадлежат первые исследования случаев, когда уравнения вида $P(w', w)=0$, где P — многочлен, имеют однозначные интегралы. Им же принадлежит попытка построить, исходя из теории дифференциальных уравнений, общую теорию эллиптических функций [1]).

Дальнейший существенный прогресс в этой области был получен в работах Римана [2] (и Фукса [3]), в которых была весьма глубоко изучена теория линейных уравнений. В работах Фукса и Пуанкаре были подробно изучены нелинейные уравнения первого порядка (1884—1885). Наконец, Пуанкаре и Клейн (1878—1890) разработали теорию так называемых автоморфных функций, связанную с исследованиями Фукса по теории линейных дифференциальных уравнений, с теорией одного класса уравнений третьего порядка и с основными вопросами теории конформного отображения. Параллельно в работах Эрмита и Шварца были изучены некоторые частные типы автоморфных функций (модулярные и полиэдрические функции), связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Клейну принадлежит окончательная разработка теории в этом направлении.

Иное направление получили исследования по аналитической теории дифференциальных уравнений в работах С. В. Ковалевской по теории движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Классические исследования С. В. Ковалевской (1889) были существенно дополнены и развиты в работах А. М. Ляпунова, Г. Г. Аппельрот, П. А. Некрасова [4]) и ряда других русских ученых,

---

[1]) Briot C., Bouquet T., Théorie des fonctions elliptiques, 1875. Им принадлежит следующее определение основной задачи аналитической теории дифференциальных уравнений: «Случаи, когда можно проинтегрировать дифференциальное уравнение, чрезвычайно редки и должны быть рассматриваемы как исключение; но можно рассматривать дифференциальное уравнение как определение функций и изучать свойства функций по уравнению» (ч. I, книга V, стр. 325).

[2]) Riemann B., Gesammelte Werke, изд. 2, стр. 379. Фрагменты, относящиеся к 1857 г.

[3]) Fuchs L., «Journ. für die reine und angewandte Mathematik», t. 66 (1866), т. 68 (1868). Gesammelte Werke, т. I, стр. 159 и 205.

[4]) Ковалевская С. В., Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки.

Научные работы С. В. Ковалевской. Изд. АН СССР, 1948, стр. 153—244.

Аппельрот Г. Г., Не вполне симметричные тяжелые гироскопы. Сборник: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Изд. АН СССР, 1940, стр. 61—155. В статье дана подробная литература вопроса.

а также в исследованиях Пикара и Миттаг-Леффлера. Идеи С. В. Ковалевской привели к постановке задачи об изыскании класса уравнений, интегралы которых — однозначные функции. Важные результаты, полученные в этом направлении, тесно связаны с развитием общей теории алгебраических функций.

Крупные результаты в области аналитической теории дифференциальных уравнений были получены Пенлеве. Ему принадлежат существенные дополнения к общей теории дифференциальных уравнений первого порядка и глубокие исследования по теории уравнений второго и высших порядков. В работах Пенлеве (1888—1905) впервые систематически проводится идея исследования интегралов дифференциальных уравнений как аналитических функций во всей области их существования непосредственно по дифференциальному уравнению.

К исследованиям Пенлеве примыкает длинный ряд исследований (Гамбье, Гарнье, Шази и др.), разработавших и распространивших методы Пенлеве на более широкие классы уравнений.

Из других направлений необходимо отметить исследования Мальмквиста (1914), который применил для изучения некоторых специальных вопросов теории дифференциальных уравнений теорию роста функций, затем исследования Гилла[1]) по применению к теории дифференциальных уравнений теории бесконечных определителей и, наконец, исследования Шлезингера (1898—1906)[2]).

В трудах Лаппо-Данилевского (1927—1931) теория линейных дифференциальных уравнений получила замечательное развитие благодаря применению теории матриц, представляющей в известном смысле обобщение теории функций комплексного переменного[3]).

---

[1]) Hill H., «Acta Math.», т. 8, 1887.

[2]) См., например, Schlesinger L., Vorlesungen üder lineare Differentialgleichungen, 1908.

[3]) См. «Труды физ. мат. инст. имени В. А. Стеклова», АН СССР, т. VI, VII.

Краткое изложение: В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, 1939, стр. 520—529.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ. ОСОБЫЕ ТОЧКИ.

§ 1. Существование интегралов дифференциальных уравнений. Определение коэффициентов.

Основной вопрос, возникающий в теории дифференциальных уравнений, состоит в том, имеет ли решение данное дифференциальное уравнение.

В простейшем случае одного дифференциального уравнения дело идет, таким образом, о существовании решения дифференциального уравнения вида

$$y' = f(y, x). \tag{1}$$

В аналитической теории дифференциальных уравнений мы будем рассматривать случаи, когда дифференциальное уравнение имеет интегралами аналитическую функцию комплексного переменного. Поэтому мы будем рассматривать случаи, когда функция f есть аналитическая функция входящих в нее комплексных аргументов. Рассматривая независимое переменное и функцию как комплексные числа, мы возьмем в простейшем случае уравнение в виде

$$w' = f(w, z), \tag{1'}$$

где $w = u + iv$, $z = x + iy$ и f — аналитическая функция переменных w и z. Мы будем искать интеграл этого уравнения, принимающий при значении $z = z_0$ начальное значение $w = w_0$, где z_0 и w_0 — два произвольно выбранных комплексных числа. Простейшим случаем, очевидно, будет тот, когда функция $f(w, z)$ голоморфна в области значений w_0 и z_0 и, следовательно, разлагается в области этих значений в сходящийся степенной ряд. Так как мы имеем аналитическую функцию $w(z)$ и обычным средством изображения аналитической функции является степенной ряд, то дело сводится к нахождению ряда, расположенного по степеням $(z - z_0)$, сходящегося в некоторой области и, следовательно, представляющего в ней аналитическую функцию z и удовлетворяющего дифференциальному уравнению (1′). Задача, естественно, разбивается на две:

1) определение по дифференциальному уравнению (1′) коэффициентов ряда, изображающего интеграл, и 2) доказательство сходимости полученного таким образом ряда.

Метод решения этой задачи был дан Коши. Изложим этот метод. Предварительно упростим несколько задачу. Сделав замену $w-w_0=W$ и $z-z_0=Z$, мы, очевидно, сведем дело к нахождению интеграла уравнения, принимающего при $Z_0=0$ начальное значение $W_0=0$. Таким образом, мы можем предполагать с самого начала, что начальные значения W и Z равны нулю и $f(W, Z)$ голоморфна в области начальных значений, равных нулю, то-есть, имеет место разложение вида

$$f(W, Z)=\sum_{k,l} a_{k,l}W^kZ^l, \tag{2}$$

сходящееся внутри некоторых окружностей с радиусами ρ и r

$$|W|=\rho \text{ и } |Z|=r \tag{3}$$

на плоскостях W и Z.

Если искать интеграл уравнения

$$W'=f(W, Z) \tag{1''}$$

в виде ряда

$$W=\sum_m A_mZ^m, \tag{4}$$

то легко определить все коэффициенты A_m через известные коэффициенты $a_{k,l}$. Действительно, если ряд (4) сходится внутри некоторой окружности $|Z|=R$, то ряд (4) есть ряд Тэйлора и, следовательно,

$$A_m=\frac{W_0^{(m)}}{m!}\,. \tag{5}$$

Все $W_0^{(m)}$ легко найти по дифференциальному уравнению (1″). Действительно, из (1″) имеем при $Z=0$:

$$W_0'=f(0, 0)=a_{0,0}\,. \tag{6}$$

Далее, дифференцируя уравнение (1″), получим:

$$\left.\begin{aligned}
W''&=\frac{\partial f}{\partial Z}+\frac{\partial f}{\partial W}W',\\
W'''&=\frac{\partial^2 f}{\partial Z^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial Z\,\partial W}W'+\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}W'^2+\frac{\partial f}{\partial W}W'',\\
W^{\mathrm{IV}}&=\frac{\partial^3 f}{\partial Z^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial Z^2\,\partial W}W'+3\frac{\partial^3 f}{\partial Z\,\partial W^2}W'^2+\\
&\quad+3\frac{\partial^2 f}{\partial Z\,\partial W}W''+\frac{\partial^3 f}{\partial W^3}W'^3+3\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}W'W''+\frac{\partial f}{\partial W}W''',\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$