

Д. Пидоу

Геометрия и искусство

В мире науки и техники

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Д11

Д11 **Д. Пидоу**
Геометрия и искусство: В мире науки и техники / Д. Пидоу – М.: Книга
по Требованию, 2014. – 330 с.

ISBN 978-5-458-50560-4

Книга известного математика и педагога Д. Пидоу посвящена использованию аппарата классической геометрии в архитектуре и изобразительном искусстве.

ISBN 978-5-458-50560-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

тельствует о незавершенности, неполноте рассуждения, если не просто об его ошибочности. Напротив, внутреннее совершенство, стройность математического построения почти всегда гарантируют его истинность и важность. Обращаясь не к математике, а к ее родственнице физике, можно вспомнить знаменитого Поля Дирака, который мотивировал физическую содержательность построенной им формально-математической теории частицы с одним магнитным полюсом (так называемого *монополя*) ее завершенностью и стройностью: эта теория настолько красива, считал он, что было бы поистине странно, если бы Природа не воспользовалась подобной возможностью. И хотя до сих пор физики нигде не обнаружили северного магнитного полюса без сопутствующего ему южного, они продолжают искать пресловутый монополю Дирака, ибо то, что красиво, обязательно должно быть верно.

Наконец, *last, not least**, название настоящей книги имеет еще один смысл. Дословный перевод его: «Геометрия и свободные искусства». Мы отказались от этого перевода из опасения, что он может быть не понят, ибо сегодня далеко не каждый знаком со средневековым понятием «семь свободных искусств» (так называемые «тривиум» и «квадривиум» — см. предисловие автора). А между тем, эти «семь искусств», включающие как геометрию, так и начала музыкальной культуры, в течение столетий определяли тот свод знаний, которым считалось необходимым владеть всякому образованному человеку. В наши дни, формально говоря, геометрия по-прежнему считается необходимым элементом общего образования. Однако сегодня человек, едва знакомый с художественной литературой или с изобразительным искусством, вряд ли станет претендовать на звание «образованного», а вот помнить из геометрии лишь пресловутые «пифагоровы штаны» и при этом считать себя интеллигентом вполне принято. И настоящая книга в первую очередь характеризуется стремлением взглянуть на геометрию как на неотъемлемый элемент общей культуры, чему, в частности, способствует попытка в какой-то мере сопоставить геометрию и

* Последнее по счету, но не по важности (англ.).

искусство и затронуть вопрос об их связи и взаимозависимости.

И в заключение несколько слов об авторе этой книги. Дэн Пидоу родился и учился в Англии; много работал он и в других странах, а ныне является профессором Университета Миннесоты (Миннеаполис, США). Советскому читателю профессор Пидоу известен прежде всего как автор трехтомных «Методов алгебраической геометрии», составленных им совместно с выдающимся английским математиком Уильямом Ходжем (русский перевод — М.: ИЛ, 1954). За рубежом хорошо знают и ценят целый ряд других его книг, в том числе один из лучших курсов геометрии для математических отделений университетов. О ярких педагогических способностях и интересах автора свидетельствуют созданные им научно-популярные книги и фильмы геометрического содержания. Одну из этих книг мы выносим на суд наших читателей.

И. Яглом

Предисловие

Геометрию издавна причисляли к семи свободным искусствам, входившим в состав *тривиума* (грамматика, риторика и диалектика) и *квадривиума* (арифметика, геометрия, астрономия и музыка). Краткое изложение этих искусств содержит книга, написанная в VI в. великим Кассиодором как своего рода свод элементарных сведений, необходимых по его мнению монахам для понимания Библии. В средние века эта книга была широко распространена и среди священнослужителей, и среди мирян. Число семь всегда считалось магическим, и Кассиодор, обосновывая свой выбор семи главных предметов, сослался на священное писание (Книга притчей Соломоновых): «*Премудрость построила себе дом, вытесала семь столбов его*». Разумеется, семь свободных искусств со временем менялись. Так, Возрождение стало свидетелем небывалого расцвета квадривиума. Арифметика и геометрия, дополненные алгеброй, превратились в *математику*. Можно с полным основанием утверждать, что вплоть до недавнего времени *геометрия* повсеместно считалась неотъемлемой частью общего образования — образования, не связанного с приобретением определенной профессии.

Геометрия представляет большой исторический интерес, имеет серьезное практическое применение и обладает внутренней красотой. Читатель может рассматривать нашу книгу как экскурс по второстепенным страницам истории, сопровождаемый рассказом о том, сколь важное место занимала геометрия в творчестве таких людей, как Витрувий, Альбрехт Дюрер, Леонардо да Винчи, Томас Гоббс, если ограничиться далеко не полным перечнем действующих лиц нашего повествования. С другой стороны, для тех, кто

хотел бы на себе испытать эстетическую привлекательность геометрии, выполняя несложные построения, придумывая различные узоры, вычерчивая и вышивая кривые и огибающие и, наконец, вступив в увлекательную область *математических доказательств*, в конце каждой главы приведены упражнения.

Предварительное знакомство читателя с геометрией и алгеброй предполагается лишь в весьма скромном объеме, однако в отдельных случаях проверка приводимых утверждений будет доступна только тем, кто имеет некоторую математическую подготовку. Изложение отнюдь не претендует на энциклопедичность, многие темы умышленно обойдены. При отборе литературы, работая над этой книгой, я, естественно, следовал собственным симпатиям и антипатиям и отдавал предпочтение тем аспектам геометрии, которые представлялись мне наиболее важными. В этом отношении предлагаемая вниманию читателя книга носит весьма личный характер.

Глава 1 представляет собой медленно разворачивающееся введение в те аспекты геометрии, которые встречаются у Витрувия; здесь читатель, быть может, впервые в жизни воспользуется с нашей помощью циркулем и линейкой. Глава 2 несет на себе отпечаток того интереса и восторга, который вызвало у меня некогда знакомство с трактатами Альбрехта Дюрера. Надеюсь, что на читателя они произведут не меньшее впечатление. Теория перспектив стимулировала развитие геометрии, и во второй и последующих главах ей уделено немало внимания. Глава 3, посвященная Леонардо да Винчи, завершает весьма подробное исследование творчества трех исторических лиц и их отношения к геометрии.

В главе 4 рассмотрена проблема формы в архитектуре и связанные с нею теории, которые время от времени входят в моду. Глава 5 содержит введение в великие евклидовы «Начала», хотя рассмотрение основано на его работе гораздо меньшего масштаба — на «Оптике». Однако и в этом сочинении содержатся указания на те возможности, которые таит в себе *доказательство* в геометрии. Глава 6 посвящена самим «Началам» Евклида — книге, некогда вместе с

Библией разделившей честь считаться величайшим «бестселлером» мира.

В главе 7 я ввожу аналитическую и проективную геометрию и показываю, как можно использовать некоторые из наиболее важных теорем проективной геометрии для построения перспективных изображений.

В главе 8 рассмотрены изящные кривые, которые геометры не должны скрывать от людей — от конических сечений до логарифмической спирали; и предложено несколько способов построения этих кривых. Подробно разобраны фокальные свойства конических сечений. Даже если приведенные доказательства покажутся читателю сложными, методы построения конических сечений послужат ему достаточным вознаграждением. Именно в этой главе появляется «математическое вышивание».

Заключительная глава посвящена понятию *пространства* и его трактовке с различных точек зрения, а также приключениям в пространстве двух, трех и четырех измерений.

Я с удовольствием трудился над этой книгой и в процессе работы столкнулся со многими заслуживающими внимания геометрическими теоремами, не известными ранее ни мне, ни (я уверен) другим любителям геометрии. Общение с разнообразной аудиторией в различных странах мира показало, что затронутые мной темы представляют интерес для большинства образованных людей и что *принципу удовольствия*, которого я старательно придерживался на страницах этой книги, следует придавать первостепенное значение во всяком образовании и в особенности в образовании математическом.

Список литературы которую я использовал при написании этой книги, приведен на стр. 331. Поскольку во многих случаях обращение к первоисточнику оказалось невозможным, мне приходилось довольно часто обращаться к материалам, помещенным в некоторых из перечисленных в списке работ, отмечая заимствования надлежащими ссылками. Тем не менее интерпретация геометрических утверждений принадлежит мне и в ряде случаев может отличаться от интерпретации признанных авторитетов. Исторические

факты, приводимые в тексте, могут быть не точны в отдельных деталях, но все даты в тех случаях, когда они приводятся, безусловно соответствуют действительности.

Будучи связан с Кембриджским и Принстонским университетами, я хотел бы выразить благодарность их издательствам (Cambridge University Press и Princeton University Press) за разрешение использовать и цитировать ранее опубликованные материалы. Я хотел бы также выразить свою признательность Центру по усовершенствованию учебных программ университета Миннесоты за предоставленную мне возможность приступить к работе над книгой летом 1971 г. Наконец, я хочу поблагодарить своих издателей за то, что они выпустили (хотя и после продолжительной задержки) весьма изящно оформленную книгу.

Дэн Пидоу

Витрувий

Слово *геометрия* греческого происхождения и означает *землемерие*. О возникновении геометрии в часто цитируемом отрывке из сочинения древнегреческого историка Геродота (485—425 гг. до н. э.) говорится следующее:

«Этот царь [Сесострис], как передавали жрецы, также разделил землю между всеми жителями и дал каждому по квадратному участку равной величины. От этого царь стал получать доходы, повелев взимать ежегодно поземельную подать. Если река отрывала у кого-нибудь часть его участка, то владелец мог прийти и объявить царю о случившемся. А царь посылал людей удостовериться в этом и измерить, насколько уменьшился участок, для того чтобы владелец уплачивал подать соразмерно величине оставшегося надела. Мне думается, что при этом-то и было изобретено землемерное искусство и затем перенесено в Элладу» *.

Такое объяснение причин возникновения геометрии достаточно правдоподобно, чтобы его можно было принять, тем более, что другими объяснениями ее происхождения мы не располагаем. Дело в том, что, если исключить сравнительно недавнее прошлое — период, охватывающий, грубо говоря, последние семь веков, — все дошедшие до нас сведения о событиях прошлых времен почерпнуты в основном из переводов, выполненных европейскими учеными с арабских переводов древнегреческих и индийских рукописей. В наших познаниях имеются огромные пробелы, вызванные

* Геродот. История. В девяти книгах. — Л.: Наука, 1972, стр. 112.

тем, что многие манускрипты погибли, а те, которые сохранились, после перевода и исправлений зачастую имели лишь отдаленное сходство с оригиналами. Подобная трансформация источников привела к тому, что нередко остается лишь строить догадки относительно первоначального значения слов и выражений, встречающихся в сочинениях древнегреческих и римских авторов. С этим нам еще предстоит неоднократно встретиться в дальнейшем. Пока же нам достаточно того, что удастся как-то объяснить возникновение геометрии и то значение, которое она имела для хозяйственной жизни на начальных этапах своего развития.

Практической геометрией занимались все древние народы. Чтобы построить хижину, вырыть пещеру, раскинуть шатер, необходимы основательные, хотя и интуитивные, познания в геометрии. Измерение расстояний в выбранных единицах длины, понятие прямого угла, определение площади треугольника — все это также геометрия, но уже более абстрактная. Древние греки далеко превосходили пределы того, что было необходимо для установления правил практической геометрии, и тем самым наложили неизгладимый отпечаток на развитие всей европейской цивилизации в том виде, в каком она известна нам ныне.

Не придерживаясь хронологической последовательности, я начну свой рассказ с римского архитектора Витрувия, жившего несколько веков спустя после Евклида, по-видимому, в раннехристианскую эпоху (точные даты рождения и смерти Витрувия неизвестны). Своему сочинению «Об архитектуре» * он предпослал высокопарное посвящение правившему императору (предполагают, что это был Август). Десять книг «Об архитектуре» написаны для того, чтобы император мог почерпнуть из них советы по возведению зданий и по другим вопросам зодчества.

По утверждению Витрувия, архитектор должен уметь письменно излагать свои мысли, искусно чертить и рисовать, изучить геометрию, быть сведущим в

* Марк Витрувий Поллион. Об архитектуре. Десять книг. — Л.: Соэжгиз, 1936. В дальнейшем все ссылки даются по этому изданию. — *Прим. перев.*

истории, со вниманием прослушать курс у философов, разбираться в музыке, кое-что понимать в медицине, следить за тем, какие толкования законов предлагают юристы, и обладать познаниями в астрономии и в теории движения небесных светил. Собственные познания во всех этих областях Витрувий подробно излагает в своем сочинении, попутно поясняя, почему он считает их столь важными для архитектора.

Знание истории, по мнению Витрувия, необходимо для того, чтобы зодчий мог обосновать свой замысел перед теми, кто потребует у него отчета. Так, если архитектор использует в качестве украшений кариатиды (на вклейке 1 воспроизведена иллюстрация к первому французскому изданию Витрувия 1684 г., на которой изображены кариатиды), он должен знать связанную с ними легенду. Витрувий сообщает, что слово «кариатиды» происходит от названия одной несчастной общины. Кария была пелопонесским государством, выступившим в греко-персидской войне на стороне персов. Одержав победу, греки захватили город (многие греческие государства в то время состояли из одного-единственного города), перебили все мужское население, сравняли город с землей, а всех женщин увели в рабство, не позволив им снять ни длинных одежд, ни других знаков достоинства замужних женщин. Пленниц не только заставили в полном наряде пройти в торжественном шествии по случаю победы. Во искупление вины их государства самый облик жительниц Карики должен был навсегда стать олицетворением рабынь, склонившихся под бременем позора. Архитекторы того времени украшали общественные здания статуями карийских женщин, согбенных под тяжестью порталов, чтобы преступление народа Карики и постигшая его кара стали известны в назидание грядущим поколениям...

Изучение философии (включавшей в то время и то, что ныне мы называем *физикой*), по мнению Витрувия, воспитывает в архитекторе возвышенный характер, скромность, справедливость и добросовестность без своекорыстия... Доводы, которыми Витрувий обосновывает необходимость для архитектора разбираться в музыке, носят более практический характер.

Так, архитектор должен уметь проектировать и строить боевые машины, подобные баллистам и катапультам. Сила, с которой они мечут снаряды, зависит от натяжения струи, а траектория полета снарядов — от их настройки. Чтобы струны были настроены в унисон, следует убедиться в том, что все они имеют равную длину и одинаковую плотность, в силу чего их натяжение также было бы одинаковым, однако эти детали Витрувий опускает.

Другого рода взаимосвязь архитектора с музыкой возникает при строительстве театров. Чтобы увеличить силу актерского голоса, в специальных нишах под сиденьями помещали бронзовые сосуды. В обязанности архитектора входило так подобрать размеры и форму сосудов, чтобы они, резонируя, позволяли достигать желаемого эффекта. Архитектор должен был также уметь строить римские водяные органы, имевшие довольно сложное устройство, — а это требовало изрядных познаний в музыке.

Необходимость для архитектора кое-что понимать в медицине, следить за тем, как юристы толкуют законы, и обладать познаниями в астрономии и в теории движения небесных тел станет понятной, если рассмотреть взгляды Витрувия на архитектуру в целом.

По Витрувию, собственно архитектура состоит из *ординации* (проектирования), *диспозиции* (планировки), соблюдения *эвритмии*, *декорума*, *симметрии* и *дистрибуции* (экономического расчета). В этом перечне встречаются слова, имеющие ныне совершенно иное значение. Ординация, поясняет Витрувий, придает надлежащую меру отдельным частям, в то время как симметрия устанавливает соразмерность количественных пропорций между частями и целым. «Симметрия, — развивает свою мысль Витрувий, — есть гармоничность, состоящая из членений самого здания и соответствующая ему в целом; это есть идущий от всех отдельных его частей к облику целостной его фигуры отклик соизмеримости со взятой за стандарт его некоей частью» *. Эвритмия — это привлекательность внешнего вида и гармоничность сочетания

* Об архитектуре, — Стр. 27.