С.С. Державин

Элементарная алгебра

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

С.С. Державин
С11 Элементарная алгебра / С.С. Державин – М.: Книга по Требованию, 2020. – 271 с.

ISBN 978-5-458-59043-3

Предлагаемый курс Элементарной Алгебры преследует две цели:1) Сообщить краткие сведения о простейших тождественных преобразованиях применительно к решению уравнений.2) Дать понятие об элементах графической грамотности в связи с изучением простейших функций.

ISBN 978-5-458-59043-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Что касается приемов изложения, то последнему сообщена с помощью графических иллюстраций и задач, взятых из жизни и различных областей знания, возможная наглядность.

В курсе содержится свыше 170 примеров и задач и свыше 50 упражнений.

В заключение заметим, что при пользовании предлагаемым курсом в качестве учебного руководства все напечатанное мелким шрифтом должно быть исключено.

ОТДЕЛ ПЕРВЫЙ.

Законы арифметических действий и основанные на них тождественные преобразования буквенных выражений.

ГЛАВА I.

Наглядное представление чисел.

§ 1. Диаграммы.

Диаграммами называются чертежи, дающие возможность наглядно сравнивать величину разных чисел.

Построения, употребляемые для этой цели, бывают разнообразные. Мы остановим наше внимание на двух способах:

1) на изображении сравнительных размеров величин при помощи отрезков;

2) на изображении сравнительных размеров величин при помощи площадей.

Указанные способы построений выясним на примерах.

Пример 1.

Изобразить при помощи вертикальных отрезков следующую таблицу высот гор в километрах:

Везувий	1,3	килом.
Олимп	3,0	„
Монблан	4,8	„
Эверест	8,8	„

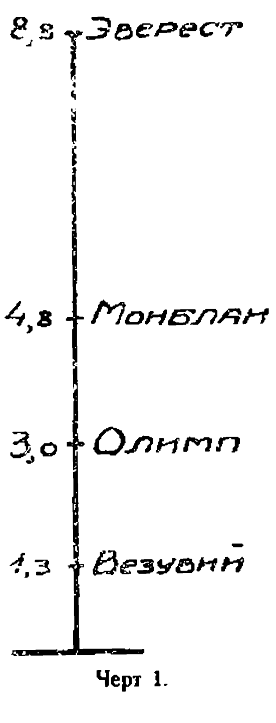
Для решения предложенной задачи нужно выбрать сначала масштаб. Каждый километр натуры условимся при решении настоящей задачи изображать на чертеже отрезком в 1 см. Тогда высоту Везувия нужно изобразить отрезком в 1,3 см.; высоту Олимпа — в 3 см. и т. д. Отрезки, изображающие высоту гор, можно откладывать на отдельных вертикальных прямых (черт. 2), но можно откладывать и на одной прямой (черт. 1).

Пример 2.

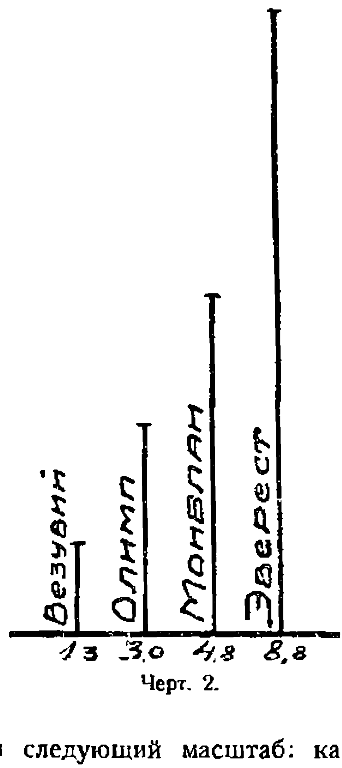
Площади, занимаемые различными частями света, выражаются в квадратных верстах следующими числами:

Южный Полярный материк .	7	милл.	кв.	верст.
Австралия	8	„	„	„
Европа	9	„	„	„
Южная Америка	16	„	„	„
Северная Америка	21	„	„	„
Африка	26	„	„	„
Азия	39	„	„	„

Изобразить эти числа при помощи прямоугольников одинаковой высоты.



Черт 1.

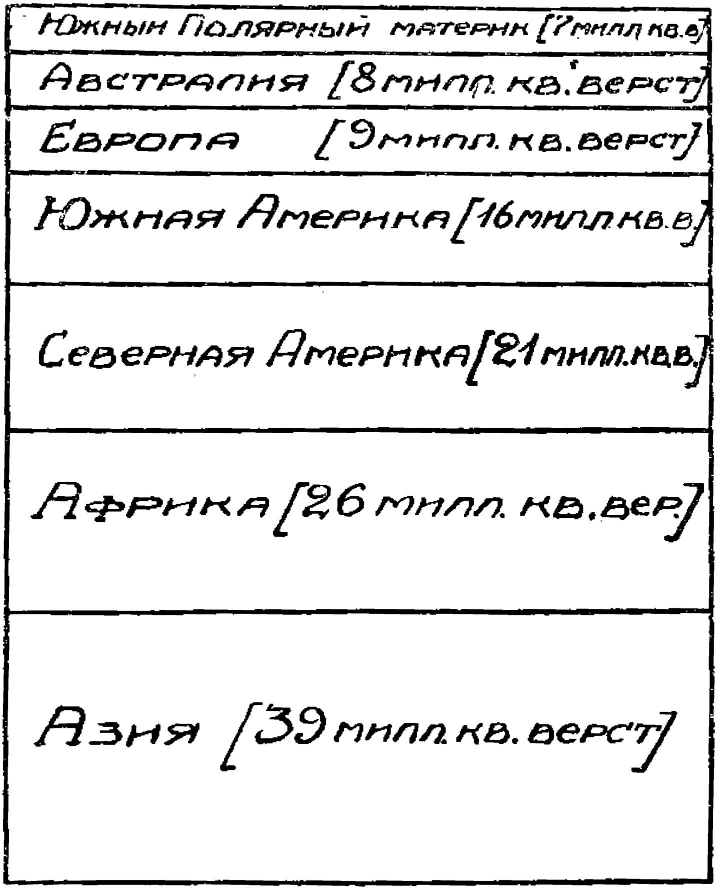


Черт. 2.

Для построения выберем следующий масштаб: каждый 1 милл. квадр. верст изобразим на нашем чертеже площадью в 1 кв. см. Тогда площадь Южного Полярного Материка должна быть представлена 7 кв. см., площадь Австралии — 8 кв. см., площадь Европы — 9 кв. см. и т. д.

Высота прямоугольников может быть выбрана произвольно. Для удобства вычислений и построений возьмем ее равной 10 см.

Чтобы определить размеры оснований прямоугольников, нужно числа, выражающие их площади, разделить на высоту, т.-е. на 10.



Черт. 3.

Таким образом, основание прямоугольника, изображающего площадь Южного Полярного Материка, должно равняться 0,7 см.; основание прямоугольника, изображающего площадь Австралии, должно равняться 0,8 см., и т. д.

Требуемое построение выполнено на черт. 3.

§ 2. — Ряд натуральных чисел; наглядное представле ние чисел.

Ряд чисел: 1, 2, 3 и т. д. называется рядом *натуральны чисел.* Таким образом, каждый член этого ряда отличаетс от предыдущего или следующего члена того же ряда на еди ницу. Не трудно убедиться, что ряд натуральных чисе, бесконечен. В самом деле, как бы велико ни было последне число в этом ряду, к нему всегда можно прибавить ещ единицу и, таким образом, ряд продолжить. Переход от меньшего числа к большему, мы перемещаемся по число вому ряду *вправо.*

Числа натурального ряда могут быть представлены на глядно с помощью отрезков.

С этой целью на прямой XX, называемой *числовой пря мою* или *осью,* отмечают некоторую точку O (черт. 4 и откладывают *вправо* от нее

Черт. 4.

произвольно выбранную единицу длины (KL) столько ра: сколько единиц заключается в данном натуральном числе Получится ряд точек: A, B, C и т. д., соответствующи числам натурального ряда. В самом деле, в результате изме рения отрезка OA выбранной единицей длины получи: число 1; от измерения отрезка OB получим число 2; от изме рения отрезка OC получим число 3 и т. д.

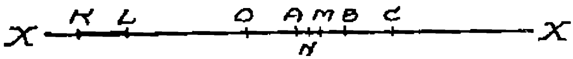
Не трудно видеть, что между каждыми двумя последс вательными числами натурального ряда заключается беско нечное множество дробных чисел. Возьмем, например, числ 1 и 2. Между этими числами заключается, например, $1\frac{1}{2}$ Между числами 1 и $1\frac{1}{2}$ заключается, например, $1\frac{1}{4}$, а межд числами $1\frac{1}{2}$ и 2 заключается, например, $1\frac{3}{4}$. Между числам 1 и $1\frac{1}{4}$ заключается $1\frac{1}{8}$ и т. д.

1;								2;	Табл. 1.
1;				$1\frac{1}{2}$;				2;	
1;		$1\frac{1}{4}$		$1\frac{1}{2}$;		$1\frac{3}{4}$		2;	
1;	$1\frac{1}{8}$;	$1\frac{1}{4}$;	$1\frac{3}{8}$;	$1\frac{1}{2}$;	$1\frac{5}{8}$;	$1\frac{3}{4}$;	$1\frac{7}{8}$;	2;	
				и т. д.					

Таким образом, между числами 1 и 2 можно помещать все новые и новые числа и такому помещению не предвидится конца.

Если требуется изобразить наглядно на числовой прямой дробное число, то сначала делят выбранную единицу длины на столько равных частей, сколько единиц заключается в знаменателе данной дроби, а затем полученную часть единицы длины откладывают на числовой прямой столько раз, сколько единиц заключается в числителе данной дроби. Полученная точка соответствует данному дробному числу. Так, числу $1\frac{1}{2}$ будет соответствовать точка M, числу $1\frac{1}{4}$ — точка N (черт. 5) и т. д.

Но числа натурального ряда и помещающиеся *между ними* дробные числа еще не исчерпывают собою всех арифметических чисел. Так среди упомянутых чисел мы не видели *правильных дробей*. Легко видеть, что чисел, меньших единицы, тоже бесконечное множество, и все они изображаются



Черт. 5.

отрезками, имеющими начало в точке O и расположенными между точками O и A. Отрезок, равный половине единицы длины, изображает число $\frac{1}{2}$; отрезок, равный $\frac{1}{3}$ единицы длины, изображает число $\frac{1}{3}$ и т. д.

Таким образом, *каждому числу (как целому, так и дробному) соответствует определенная точка на числовой прямой.*

Впоследствии же мы увидим, что и, наоборот, *каждой точке числовой прямой соответствует вполне определенное число.*

Если числитель правильной дроби оставлять все время равным единице, а знаменатель увеличивать, то дробь будет уменьшаться, приближаясь к нулю; соответствующие же получаемым дробям точки на числовой прямой будут приближаться к точке O. Отсюда заключаем, что точка O соответствует *нулю.*

§ 3. Буквенное обозначение чисел.

Если рассуждения о каких-либо величинах ведутся не только для *данных* числовых значений этих величин, но для *любых* значений этих величин, то говорят, что рассуждения носят *общий характер*, отличаются *общностью*. Так, указывая на то, что между числами 1 и 2 заключается множество дробных чисел, мы вместе с тем видели, что утверждение это справедливо для любых двух последовательных чисел натурального ряда. Таким образом, рассуждение о числовом промежутке от 1 до 2 применимо ко всякой другой паре последовательных натуральных чисел и, следовательно, имеет общий характер.

В интересах общности обыкновенно числа обозначают *буквами*. Так, рассуждая о двух последовательных числах натурального ряда, мы могли бы обозначить меньшее из них через n, большее — через $n+1$. Таблица I предыдущего § приняла бы следующий вид:

Табл. II.

n;								$n+1$;
n;				$n+\frac{1}{2}$;				$n+1$;
n;		$n+\frac{1}{4}$;		$n+\frac{1}{2}$;		$n+\frac{3}{4}$;		$n+1$;
n;	$n+\frac{1}{8}$;	$n+\frac{1}{4}$;	$n+\frac{3}{8}$;	$n+\frac{1}{2}$;	$n+\frac{5}{8}$;	$n+\frac{3}{4}$;	$n+\frac{7}{8}$;	$n+1$

и т. д.

В табл. II n может иметь значения: 0, 1, 2, 3 и т. д.

Разные числа следует обозначать разными буквами. Если в одной и той же задаче одна и та же буква встречается несколько раз, то она стоит вместо одного и того же числа.

Когда числа, входящие в задачу, обозначены буквами, то задача считается решенной, если обозначены те действия, которые следует произвести, чтобы получить ответ.

Иногда удобно бывает обозначение чисел производить одной какой-нибудь буквой, с разными значками вверху или внизу с правой стороны, например, a_1, a_2, a_3, . . . или a', a'', a''', . . . Понятно, одна и та же буква, взятая с различными значками, обозначает различные числа.

Значки, поставленные при букве, носят название *индексов*.

Пример 1.

Смешано два сорта товара: m килограммов по a рублей за килограмм и n килограммов по b рублей за килограмм. Определить стоимость одного килограмма смеси.

Так как стоимость одного килограмма товара первого сорта a руб., то стоимость m килограммов выразится произведением $a \cdot m$.

Так как стоимость одного килограмма товара второго сорта b руб., то стоимость n килограммов выразится произведением $b \cdot n$.

Чтобы определить стоимость всего количества товара, нужно первое произведение сложить со вторым:

$$a \cdot m + b \cdot n$$

Товара было смешано $m+n$ килограммов.

Следовательно, деля сумму произведений $a \cdot m$ и $b \cdot n$ на сумму чисел m и n, мы определим стоимость 1 килограмма смеси:

$$\frac{a \cdot m + b \cdot n}{m+n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Таким образом, в ответе мы получили совокупность чисел, выраженных буквами и соединенных между собою знаками действий.

Такая совокупность называется *буквенным выражением*.

Пример 2.

m рабочих окончили некоторую работу в 10 дней. Определить, во сколько дней могли бы окончить ту же работу n рабочих.

Так как m рабочих исполнили работу в 10 дней, то для одного рабочего потребовалось бы дней для исполнения работы в m раз больше, т.-е. $10m$.

Зная время, необходимое для исполнения работы одним рабочим, мы можем определить, сколько дней потребуется для n рабочих; очевидно, число дней, необходимое для n рабочих, выразится частным от деления произведения $10m$ на число n:

$$\frac{10 \cdot m}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Таким образом, в ответе мы получили совокупность чисел (из которых некоторые обозначены цифрами, а другие буквами), соединенных знаками действий.

Такая совокупность называется *буквенным выражением*.

Итак, *совокупность чисел, из которых некоторые обозначены цифрами, а другие буквами, соединенных между собою знаками действий, называется буквенным выражением*.

Подставив в выражение вместо букв арифметические числа и произведя указанные в выражении действия, мы получим численный ответ (числовое значение выражения).

Таким образом, *числовым значением выражения называется то число, которое получится, если буквы заменить данными числами (значениями этих букв) и произвести над ними действия, указанные знаками*.

Пример 3.

Какую скорость может развить данная моторная лодка, идя по течению реки, если известно, что при той же работе мотора ее скорость в стоячей воде равна n километров в час, а скорость течения реки a километров в час?

Очевидно, фактическая скорость моторной лодки, движущейся по течению реки, складывается из той скорости, какую она имеет в стоячей воде, и из скорости течения реки.

Поэтому искомая скорость лодки выразится так:

$$n+a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Числа, данные в условиях решенных выше задач, выражены с помощью букв. Поэтому, результаты решения рассмотренных задач отличают *общностью*. Решение какой-нибудь новой задачи, отличающейся от рассмотренных лишь числовыми данными, приводится к простой подстановке этих числовых данных в соответствующее из выражений (1), (2) или (3).

Пример 4.

Найти числовое значение выражения:

$$\frac{a\cdot x+m}{a+m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

для следующих значений букв:

1) $a=3$, $x=1$, $m=2$;
2) $a=1$, $x=3$, $m=5$;
3) $a=7$, $x=2$, $m=2$.

Решение.

1) Найдем числовое значение выражения (4) при $a=3$, $x=1$ и $m=2$:

$$a\cdot x=3\cdot 1=3;$$
$$a\cdot x+m=3+2=5;$$
$$a+m=3+2=5;$$
$$\frac{a\cdot x+m}{a+m}=\frac{5}{5}=1.$$

Числовое значение данного выражения при $a=3$, $x=1$ и $m=2$ равно 1.