С. Мандельбройт

Квазианалитические классы функций

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

С. Мандельбройт

С11 Квазианалитические классы функций / С. Мандельбройт – М.: Книга по Требованию, 2013. – 110 с.

ISBN 978-5-458-26178-4

Настоящая книга представляет собою изложение лекций, читанных известным французским математиком С. Мандельброй профессор университета в Clermont Ferrand в Научно-исследовательским институте математики и механики при Ленинградском государственном университете в апреле 1936 года. В ней излагается созданная за последние два десятилетия теория квазистатических классов функций.

ISBN 978-5-458-26178-4

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

PRÉFACE DE L'AUTEUR

Qu'il me soit permis tout d'abord de remercier l'Institut Mathématique de l'Université de Léningrad pour le double honneur qu'il m'a fait, en m'invitant à faire un cours dans ses murs et en publiant ce cours. Dois-je avouer que le plaisir que j'ai éprouvé d'y exposer quelques recherches modernes sur les classes quasi-analytiques des fonctions était d'autant plus vif, que parmi ceux qui voulaient bien m'écouter se trouvait un des grands Maîtres de cette branche d'Analyse, l'Académicien S. Bernstein, à qui vont mon admiration et ma reconnaissance.

Le premier qui a posé des problèmes se rattachant à la théorie qui nous intéresse fut Borel, créateur des fonctions monogènes (bien qu'il les appelle, lui-même, fonctions monogènes de Cauchy!). Sa manière de prolonger les fonctions analytiques à travers une coupure fournit les premières fonctions appartenant aux classes possédant la propriété de quasi-analyticité, telle que nous la concevons dans ce livre.

Hadamard a posé, en 1912, la question précise que voici: quelle doitêtre la suite $\{m_n\}$, pour qu'une fonction, vérifiant dans un intervalle les inégalités $|f^{(n)}(x)| < K^n m_n$ et s'annulant, ainsi que ses dérivées, en un point de cet intervalle, soit identiquement nulle? Le problème de la quasi-analyticité (D) fut ainsi posé.

Serge Bernstein, par contre, a été le premier à introduire des classes quasi-analytiques (I), c'est à dire, des classes, telles qu'une fonction de cette classe est identiquement nulle, dès qu'elle s'annule dans un intervalle arbitrairement petit. Les classes de S. Bernstein sont caractérisées par les propriétés portant sur la meilleure approximation.

Denjoy fut le premier à donner une réponse à la question d'Hadamard. La grande idée de Denjoy fut de ramener l'étude des fonctions indéfiniment dérivables à celles des fonctions holomorphes dans un demi-plan, et ceci, par l'intermédiaire de l'intégrale de Laplace.

En améliorant la méthode de Denjoy, Carleman a pu donner une réponse définitive à cette question, donnant ainsi une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe des fonctions soit quasi-analytique (quasi-analytique D). Une démonstration élégante du théorème de Carleman fut donnée par Ostrowski.

S. Bernstein et de la Vallée-Poussin ont montré l'importance des séries de Fourier dans l'étude de la quasi-analyticité. S. Bernstein a pu ainsi donner une nouvelle démonstration du théorème de Carleman.

L'auteur de ces lignes a pu, grace à des considérations portant sur la rectification des suites, donner des conditions sur l'équivalence de deux classes quasi-analytiques (lorsque les fonctions sont périodiques) et des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une classe de fonctions ne contienne que des fonctions analytiques. Ainsi furent résolus quelques problèmes (un partiellement, l'autre complétement) posés par Carleman.

D'autre part, en introduisant les séries de Fourier, il a pu exprimer la condition (nécessaire et suffisante) de quasi-analyticité par des inégalités pourtant sur les séries de Fourier, definir de nouvelles classes quasi-analytiques, et donner également des propriétés des fonctions intégrables, au sens de Lebesgue, et dont les séries de Fourier sont lacunaires. Les méthodes de l'auteur, du moins, l'idée de ces méthodes, semblent bien adaptées au sujet, puisqu'elles fournissent des théorèmes qui, à un certain point de vue, ne peuvent pas être améliorés.

Nous venons d'indiquer les grandes lignes de ce que contient ce livre.

Le Professeur Natanson a bien voulu se charger de la rédaction de ce cours. Il s'est acquit de sa charge avec beaucoup d'élégance, et a mis toute sa conscience à faire ressortir les difficultés des démonstrations. Qu'il me soit permis de le remercier bien cordialement.

J'adresse enfin mes remerciements à l'Union des Editions Scientifiques et Techniques qui a bien voulu se charger de l'édition de ce cours.

S. Mandelbrojt

Professeur à l'Université de Clermont.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Прежде всего я позволю себе выразить благодарность Научно-исследовательскому институту математики и механики при Ленинградском государственном университете за двойную оказанную мне честь: приглашение прочесть курс в его стенах и издание этого курса.

Нужно ли говорить, что удовольствие, испытанное мною при изложении некоторых новейших исследований о квазианалитических классах функций, было тем более живым, что среди лиц, слушавших меня, находился один из творцов этой ветви анализа — академик С. Н. Бернштейн, к которому я питаю чувства восхищения и благодарности.

Первым, кто поставил задачу, связанную с интересующей нас теорией, был Борель, открывший моногенные функции (хотя он сам назвал их функциями моногенными в смысле Коши!). Его способ продолжения аналитических функций через купюры приводит к классам функций, обладающим свойством квазианалитичности, как мы понимаем ее в этой книге.

В 1912 году Адамар поставил следующий вопрос: *какова должна быть последовательность $\{m_n\}$ для того, чтобы всякая функция, удовлетворяющая в некотором промежутке неравенствам*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant K^n m_n$$

и исчезающая вместе со своими производными в некоторой точке этого промежутка, была тождественно равна нулю?

Проблема квазианалитичности (Δ) была, таким образом, поставлена.

С другой стороны, С. Н. Бернштейн был первым, кто ввел классы квазианалитические (I), т. е. такие классы функций, когда всякая функция подобного класса, исчезающая на произвольно малом промежутке, тождественно равна нулю. Классы С. Н. Бернштейна характеризуются свойствами, связанными с наилучшими приближениями.

Ответ на вопрос Адамара был дан впервые Данжуа. Важная идея Данжуа состояла в сведéнии изучения бесконечно дифференцируемых функций к изучению функций, голоморфных на полуплоскости. Это было достигнуто с помощью трансформации Лапласа.

Усовершенствовав метод Данжуа, Карлеман смог дать окончательное решение этого вопроса. Им было дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы класс функций был квазианалитическим [квазианалитический (Δ)]. Элегантное доказательство теоремы Карлемана было дано Островским.

С. Н. Бернштейн и де ла Валле-Пуссен выяснили важную роль рядов Фурье в изучении квазианалитичности. С их помощью С. Н. Бернштейн дал новое доказательство теоремы Карлемана.

Автор этих строк, пользуясь понятием „исправленной последовательности“, дал условия эквивалентности двух квазианалитических классов (для случая периодических функций) и условие, необходимое и достаточное для того, чтобы данный класс состоял лишь из аналитических функций. Таким образом были решены две задачи (одна частично, другая полностью), поставленные Карлеманом.

С другой стороны, рассматривая ряды Фурье, автор установил необходимое и достаточное условие квазианалитичности, выразив его с помощью неравенств, относящихся к коэфициентам Фурье, определил новые квазианалитические классы и вместе с тем изучил свойства суммируемых функций с лакунарными рядами Фурье. Методы автора, во всяком случае идеи этих методов, кажутся весьма отвечающими существу вопроса, поскольку они приводят к теоремам, в некотором смысле не могущим быть улучшенными.

Мы указали основные вопросы, рассматриваемые в настоящей книге.

Проф. И. П. Натансон любезно согласился взять на себя редактирование этого курса. Он выполнил эту работу весьма искусно, приложив все усилия к тому, чтобы выявить с полной отчетливостью все детали доказательств. Позволю себе сердечно поблагодарить его.

В заключение я благодарю Ленинградское отделение Объединенного научно-технического издательства, которое взяло на себя труд издания этого курса.

С. Мандельбройт

профессор Клермонского университета.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ПРОБЛЕМА ВАТСОНА. ТЕОРЕМЫ КАРЛЕМАНА

§ 1. Основные понятия

1. В теории аналитических функций комплексной переменной весьма важными являются следующие две теоремы Мерэ-Вейерштрасса:

I. *Аналитическая функция однозначно определяется теми значениями, которые она и ее производные имеют в произвольной регулярной точке.*

II. *Аналитическая функция однозначно определяется своими значениями в точках последовательности $z_1, z_2, \ldots$, сходящейся к предельной регулярной точке z_0.*

Теорема II может быть установлена как следствие теоремы I. В самом деле, если

$$\lim z_k = z_0$$

и точка z_0 регулярна, то вблизи этой точки будет

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

откуда

$$a_k = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - \sum\limits_{n=0}^{k-1} a_n (z - z_0)^n}{(z - z_0)^k}.$$

Так как приближение z к z_0 можно осуществлять, заставляя z пробегать точки $z_1, z_2, \ldots$, то значения $f(z_1), f(z_2), \ldots$ определяют коэфициенты a_k. В силу того, что $a_k = k! f^{(k)}(z_0)$, дело приводится к теореме I.

В частности аналитическая функция полностью определяется своими значениями на сколь угодно малой дуге кривой, лежащей в области существования функции.

Весьма естественный вопрос о том, в какой мере теоремы I и II характерны для класса аналитических функций, рассматривался в диссертации Э. Бореля, где был введен более широкий класс — класс моногенных функций со сходными свойствами. В дальнейшем мы, однако, оставим эти исследования в стороне, ограничиваясь рассмотрением лишь вещественных функций вещественной переменной.

2. Определение. *Вещественная функция $f(x)$, заданная на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, называется аналитической, если существует функция комплексной переменной $f(z)$, голоморфная в некоторой области (D), внутри* [1] *которой расположен отрезок (a, b), и совпадающая с $f(x)$ в точках (a, b).*

Замечание. Можно дать определение аналитической функции и в чисто вещественных терминах. Именно, *функция $f(x)$, — аналитическая на замкнутом отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, если вокруг каждой точки его x_0 она разлагается в ряд Тэйлора:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Эквивалентность обоих определений легко установить. Действительно, то обстоятельство, что функция, аналитическая в первом смысле, будет такою и во втором, вполне тривиально. Обратно, если имеет место разложимость в ряд Тэйлора около каждой точки отрезка (a, b), то каждую точку его x_0 можно окружить кругом (C_{x_0}), в котором ряд Тэйлора сходится, и функция $f(z)$, определенная как сумма этого ряда, голоморфна. На основании известной теоремы Бореля-Лебега о покрытии можно указать конечное число кругов (C_x), покрывающих отрезок (a, b). В своей совокупности эти круги составляют область (D), в которой функция $f(z)$ голоморфна.

3. Теорема. *Если функция $f(x)$ аналитическая на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, то существует постоянная K такого рода, что при любом x из $a \leqslant x \leqslant b$ будет*

$$|f^{(n)}(x)| < K^n n! \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Доказательство. Обозначим через (C) произвольный спрямляемый контур, лежащий целиком *внутри* области (D)

---

[1]) Так что расстояния точек (a, b) от границы (D) имеют *положительный* минимум.

и охватывающий отрезок (a, b). В силу интегральной формулы Коши

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{(C)} \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}\, dz.$$

Если длина контура (C) есть l, $\max |f(z)|$ на (C) есть M и минимум расстояний точек отрезка (a, b) от точек контура (C) есть δ, то

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{Ml}{2\pi} \cdot \frac{n!}{\delta^{n+1}}.$$

Если через K обозначить любое число, большее чем $\frac{1}{\delta}$ и чем $\frac{Ml}{2\pi\delta^2}$, то будем иметь

$$\frac{Ml}{2\pi\delta^{n+1}} < K^n,$$

откуда следует справедливость теоремы.

Обратная теорема. *Если функция $f(x)$ задана для $a \leqslant x \leqslant b$, имеет в каждой точке этого отрезка все производные и если существует число K такое, что при всех x из $a \leqslant x \leqslant b$ будет*

$$|f^{(n)}(x)| < K^n n!, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то функция $f(x)$ — аналитическая.

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка промежутка $a \leqslant x \leqslant b$. Если x — любая другая точка из (a, b), подчиненная условию

$$|x - x_0| < \frac{1}{K},$$

то, на основании формулы Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа, будет

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Пользуясь оценкой для производной, найдем

$$\left| \frac{f^{(n)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big)}{n!}(x-x_0)^n \right| < \frac{K^n n!}{n!}|x-x_0|^n = \big(K|x-x_0|\big)^n.$$

В силу выбора точки x правая часть неравенства бесконечно мала вместе с $\frac{1}{n}$, так что функция $f(x)$ разлагается в яд Тэйлора около любой точки x_0 отрезка (a, b). Значит, $f(x)$ — аналитическая функция.

4. Доказанные теоремы, естественно, приводят к следующему определению.

Определение. *Будем называть классом $C_{\{m_n\}}$, отвечающим последовательности чисел $m_1, m_2, \ldots$, множество всех функций $f(x)$, заданных на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, имеющих все производные и для каждой из которых существует постоянная K, такая, что при всех x из (a, b) будет*

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant K^n m_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Соображения n° 3 устанавливают, что класс $C_{\{n!\}}$ совпадает с классом аналитических функций.

5. Проблема Адамара. В 1912 году Ж. Адамаром был поставлен следующий вопрос: *каковы должны быть числа $\{m_n\}$, чтобы для всяких двух функций класса $C_{\{m_n\}}$ $f(x)$ и $\varphi(x)$, для которых в некоторой точке x_0 будет*

$$f^{(n)}(x_0) = \varphi^{(n)}(x_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

было также

$$f(x) \equiv \varphi(x)? \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{2}$$

Согласно сказанному выше, это во всяком случае так, если

$$m_n \leqslant n!$$

Но вопрос состоит в установлении общего критерия для $\{m_n\}$.

З а м е ч а н и е. Классы $C_{\{m_n\}}$ — *аддитивны.* Иначе говоря, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ принадлежат к $C_{\{m_n\}}$, то и сумма и разность их принадлежат этому классу. В силу этого проблема Адамара может быть сформулирована и в такой форме:

Каковы должны быть числа $\{m_n\}$, чтобы всякая функция $f(x)$ из класса $C_{\{m_n\}}$, для которой в некоторой точке x_0 будет

$$f^{(n)}(x_0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

тождественно равнялась нулю:

$$f(x) \equiv 0 \qquad (a \leqslant x \leqslant b)? \tag{4}$$

Определение 1. Класс $C_{\{m_n\}}$ называется *квазианалитическим* Δ, если из (1) вытекает (2) для всякой пары функций этого класса.

Это определение относится к классам бесконечно дифференцируемых функций. Сходное определение можно дать и для случая произвольных функций.

Определение 2. Класс функций C, заданных на промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, называется *квазианалитическим I*, если всякие две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ этого класса, совпадающие в некоторой части (α, β) промежутка (a, b)

$$f(x)=\varphi(x), \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$$

необходимо совпадают и во всем промежутке (a, b).

(Классы, квазианалитические I, были введены впервые академиком С. Н. Бернштейном с помощью теории наилучшего приближения.)

Очевидно, всякий класс функций, квазианалитический Δ, будет в то же время и квазианалитическим I. Обратное, однако, не имеет места.

Заметим еще, что интерес представляют именно квазианалитические *классы* функций, а никак не отдельные, входящие в них функции. Это замечание становится особенно ясным, если отметить, что для всякой функции $f(x)$ можно указать содержащий ее квазианалитический класс. Рассмотрим, например, наряду с функций $f(x)$ класс функций вида

$$f(x)+Ke^{x},$$

где K — произвольная постоянная. Функция $f(x)$ входит в этот класс при $K=0$. Если две функции этого класса совпадают хоть в одной точке, то они тождественны.

С помощью понятия квазианалитичности проблема Адамара формулируется так: *каковы должны быть числа* $\{m_n\}$, *чтобы класс* $C_{\{m_n\}}$ *был квазианалитический* Δ?

Проблемой Адамара впервые занимался А. Данжуа.[1]) Он установил квазианалитичность класса $C_{\{m_n\}}$ для случаев:

$$m_n=n!\,(\ln n)^n; \quad m_n=n!\,(\ln n)^n(\ln\ln n)^n; \ldots$$

и доказал вообще, что это так всякий раз, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{m_n}}=\infty,$$

---

[1]) Denjoy, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, t. 173 (1921) p. 1329.

если только последовательность $\{m_n\}$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям.

Результаты Данжуа были обобщены Т. Карлеманом, [1]) который установил также и точные необходимые и достаточные условия квазианалитичности Δ.

§ 2. Проблема Ватсона. Теорема Карлемана

6. Проблема Адамара тесно связана с проблемой теории аналитических функций, известной под названием проблемы Ватсона.

Проблема Ватсона. *Пусть C есть круг $|z-1|<1$. Какие условия нужно наложить на последовательность чисел m_1, $m_2, \ldots$, чтобы всякая функция $f(z)$, голоморфная внутри круга (C) и подчиненная условию*

$$|f(z)| \leqslant m_n |z|^n \qquad (n=1,\ 2, \ldots), \tag{5}$$

была необходимо тождественно равной нулю:

$$f(z) \equiv 0 \qquad (|z-1|<1)? \tag{6}$$

Всякое условие, наложенное на последовательность $\{m_n\}$, будет *достаточным*, если для *любой* голоморфной функции $f(z)$ из (5) следует (6). Условие *необходимо*, если при невыполнении его существует *хоть одна* функция $f(z)$, подчиненная неравенствам (5) и неравная тождественно нулю.

7. Ответ на проблему Ватсона дается теоремой Карлемана. Для ее формулировки введем следующую функцию $\mathrm{T}(r)$, определенную для $r>0$:

$$\mathrm{T}(r) = \overline{\text{borne}}_{(n \geqslant 1)} \frac{r^n}{m_n}.$$

(возможно, что $\mathrm{T}(r)=\infty$.) С помощью этой функции упомянутая теорема формулируется следующим образом.

Теорема Карлемана. *Для того, чтобы из (5) следовало (6), необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln \mathrm{T}(r)}{r^2}\, dr = \infty. \tag{7}$$

[1]) Carleman, *Les fonctions quasi-analytiques*, Paris (1926).