

С. О. Шатуновский

**Алгебра как учение о
сравнениях по
функциональным модулям**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С11

С11 **С. О. Шатуновский**
Алгебра как учение о сравнениях по функциональным модулям / С. О. Шатуновский – М.: Книга по Требованию, 2019. – 259 с.

ISBN 978-5-458-56722-0

С. О. Шатуновский. "Алгебра как учение о сравнениях по функциональным модулям"

ISBN 978-5-458-56722-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2019

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2019

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Предложеніемъ же: „ A не есть B “ любой изъ элементовъ класса a исключается изъ B^*), а потому ни одно изъ двухъ предложеній „ A есть B “ и „ A не есть B “ не можетъ быть принято, если въ классѣ a можно указать какъ элементъ, принадлежащій классу B , такъ и элементъ, не принадлежащій этому классу. Если же и въ этомъ случаѣ говорятъ, что элементъ A *либо* принадлежитъ, *либо* не принадлежитъ классу B , то это означаетъ, что, когда переменный терминъ A будетъ дополнительно такъ опредѣленъ, что возможно будетъ установить дизъюнкцію между его принадлежностью и непринадлежностью классу B , то мы будемъ имѣть передъ собою новый элементъ A' такого свойства, что изъ двухъ предложеній: „ A есть B “ и „ A не есть B “, въ которыхъ подъ A разумѣютъ A' , одно будетъ принято.

Въ классѣ натуральныхъ чиселъ элементами являются: натуральное число 1, натуральное число 2 и т. д. Натуральное число, а также натуральное число N или *опредѣленное* натуральное число N *не есть элементъ класса натуральныхъ чиселъ*, а есть переменный терминъ, съ которымъ имѣютъ въ виду ассоціировать элементы (или элементъ) класса натуральныхъ чиселъ; поэтому *натуральное число N не есть четное число и не есть нечетное число*. Однако же, предложеніе: „натуральное число не есть четное число“ означало бы, какъ мы сказали, что въ натуральномъ ряду чиселъ каждый элементъ есть ~~нечетное~~ четное число, что, конечно, невярно, а потому, если терминъ N опредѣленъ только, какъ натуральное число, мы изъ двухъ предложеній: „ N есть четное число“, „ N не есть четное число“ ни одного не при-

*) Предложеніе: „ A не есть B “ можно, конечно, истолковать и въ томъ смыслѣ, что *не каждый* элементъ класса a принадлежитъ классу B . Однако, въ математическихъ предложеніяхъ не придерживаются такого толкованія. Предложеніе: „сумма угловъ треугольника въ геометріи Римапа не равна двумъ прямымъ“ означаетъ, что въ этой геометріи сумма угловъ любого треугольника отлична отъ двухъ прямыхъ. Ни одинъ геометръ не сказалъ бы, что сумма угловъ треугольника въ геометріи Римапа не равна двумъ прямымъ, если бы въ этой геометріи можно было указать такой треугольникъ, въ которомъ сумма угловъ равна двумъ прямымъ, наряду съ такимъ, въ которомъ она не равна двумъ прямымъ.

нимаемъ. Если же мы къ опредѣленію N , какъ натурального числа, прибавимъ новое опредѣленіе, на примѣръ, что въ десятичной системѣ счисления число N оканчивается цифрой 4, то мы будемъ имѣть уже не терминъ N , а новый терминъ N' (натуральное число, оканчивающееся въ десятичной системѣ счисления цифрой 4) и изъ двухъ предложеній: „ N есть четное число“, „ N есть нечетное число“, мы, подразумѣвая подъ N терминъ N' , примемъ первое предложеніе и отвергнемъ второе. Подобнаго рода замѣна термина болѣе опредѣленнымъ подразумѣвается всегда, когда говорить, что A *либо* есть, *либо* не есть B .

Если классъ, которому принадлежитъ элементъ A , состоитъ, какъ говорятъ, изъ одного только этого элемента, то затрудненія не устраняются. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ, что изъ опредѣленія вещи A не вытекаетъ ни принадлежность ея классу B , ни непринадлежность ея этому классу. Въ силу одной этой неопредѣленности, A становится перемѣннымъ терминомъ, обозначающимъ любой элементъ нѣкотораго класса α , въ которомъ одни элементы могутъ принадлежать, другіе могутъ не принадлежать классу B , а третьи могутъ не быть опредѣлены ни какъ принадлежащіе, ни какъ не принадлежащіе классу B . Такимъ образомъ, A перестаетъ быть индивидуумомъ и становится перемѣннымъ терминомъ. Вообще говоря, понятіе объ единицѣ, объ индивидуумѣ, кажется, въ логикѣ не было, да едва ли могло быть опредѣлено, вслѣдствіе чего и логическій законъ тождества представляется совершенно неяснымъ*). Не входя въ разсмотрѣніе

*) Приведемъ такой примѣръ. Классъ B , элементами котораго служатъ натуральные числа, опредѣленъ слѣдующимъ образомъ: 1) B есть расположенный классъ, т.-е. изъ каждаго двухъ его элементовъ одинъ является предшествующимъ, а другой послѣдующимъ; 2) если n есть элементъ класса B , то $n+2$ есть элементъ, непосредственно слѣдующій за элементомъ n ; 3) первымъ элементомъ класса B служить единица. На вопросъ: имѣется ли въ классѣ B четный элементъ, обыкновенно отвѣчаютъ отрицательно. Этотъ отвѣтъ, а равно и утвердительный отвѣтъ ошибочны, ибо можно указать безчисленное множество классовъ B , изъ коихъ одни содержатъ а другіе не содер-

представляющихся здѣсь трудностей (особенно въ тѣхъ случаяхъ, когда вещь, о которой говорятъ, не дана, а является искомымъ задачи, число рѣшеній которой неизвѣстно), намъ кажется цѣлесообразнымъ опредѣлить *логическую единицу* слѣдующимъ образомъ:

Предметъ *A* называется логической единицей *относительно* сказуемаго или предмета *B*, если эти предметы такъ опредѣлены, что изъ двухъ предложеній: „*A* есть *B*“ и „*A* не есть *B*“ одно принимается.

Такимъ образомъ, логическій законъ исключеннаго третьяго становится опредѣленіемъ логической единицы, и притомъ *относительной*, ибо единица относительно сказуемаго *B* можетъ не быть единицей относительно сказуемаго *C*.

Примѣненіе закона исключеннаго третьяго къ вещамъ *A* и *B* для установленія дизъюнкціи между принадлежностью и непринадлежностью *A* классу *B* требуетъ поѣтому предварительнаго изслѣдованія опредѣленій *A* и *B*, т.-е. въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ необходимо *доказать* право и возможность примѣненія логического закона исключеннаго третьяго. Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

Если подъ *A* будемъ разумѣть прямую *MN*, проведенную параллельно прямой *PQ*, а подъ *B* — единственную прямую, проходящую черезъ точку *M* параллельно прямой *PQ*, то изъ двухъ предложеній: „*A* есть *B*“ и „*A* не есть *B*“ мы не примемъ ни одного, пока не будетъ указано, идетъ ли рѣчь о геометріи Евклида или о геометріи Лобачевского: терминъ „прямая, проходящая черезъ данную точку параллельно данной прямой“, не есть логическая единица по отношенію къ термину „единственная прямая,

жать четныхъ элементовъ. Таковы, напримѣръ, классы:

1; 3; 5; ...

1; 3; 5; ...; 1; 3; 5; ...

1; 3; 5; ...; 2; 4; 6; ...

1; 3; 5; ...; 4; 6; 8; ...

Классъ *B* не есть классъ, а классы.

проходящая через данную точку параллельно данной прямой". Первый терминъ становится логической единицей относительно второго, когда указана та геометрія, въ которой прямая разсматривается.

Изъ двухъ предложеній: „цѣлое число, оканчивающееся двойкой, есть точный квадратъ“ и „цѣлое число, оканчивающееся двойкой, не есть точный квадратъ“ мы принимаемъ второе. Цѣлое число, оканчивающееся двойкой, есть логическая единица въ отношеніи сказуемаго „точный квадратъ“. Цѣлое число, оканчивающееся шестеркой, не есть логическая единица въ отношеніи того же сказуемаго, но цѣлое число, оканчивающееся шестеркой съ предшествующей четной цифрой, есть логическая единица въ отношеніи сказуемаго „точный квадратъ“, ибо такое число не есть точный квадратъ.

Пусть α и β будутъ два ирраціональныхъ вещественныхъ числа, опредѣляемыхъ Дедекиндовыми сѣченіями системы раціональныхъ чиселъ. Положимъ, что A и A_1 суть нижніе классы этихъ сѣченій. Тогда, по опредѣленію, $\alpha = \beta$ въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда классы A и A_1 тождественны. Нельзя, однако, сказать, что α есть логическая единица относительно сказуемаго „равно β “ всякій разъ, когда числа α и β даны, т.е. нельзя указать такого конечнаго ряда умозаключеній, который необходимо приводилъ бы отъ логическихъ посылокъ: „ A есть нижній классъ Дедекиндова сѣченія“ и „ A_1 есть нижній классъ Дедекиндова сѣченія“ къ одному изъ двухъ выводовъ: „классъ A тождественъ классу A_1 “, „классъ A не тождественъ классу A_1 “.

Въ частныхъ случаяхъ устанавливаются, конечно, дизъюнкціи между равенствомъ и неравенствомъ двухъ вещественныхъ чиселъ α и β , но эти дизъюнкціи опираются не на законъ исключеннаго третьяго, а на спеціальныя свойства чиселъ α и β , указанныя въ ихъ опредѣленіяхъ.

Упомянемъ еще о теоремѣ, которою устанавливается, что переменная величина x , монотонно измѣняющаяся въ конечномъ интервалѣ и принимающая въ немъ неограниченное число значеній, имѣетъ предѣлъ въ этомъ интервалѣ. Мы не примемъ этой теоремы, потому что изъ указаннаго въ текстѣ

теоремы опредѣленія переменной x не вытекаетъ, что x есть логическая единица относительно сказуемаго „имѣть предѣлъ“. Доказательство теоремы, которое ей обыкновенно дается, опирается на извѣстный методъ дѣленія промежутка, при чемъ строится неограниченный рядъ интерваловъ (p, q) , длины которыхъ безпредѣльно убываютъ, и принимается, что переменная x опредѣлена такимъ образомъ, что относительно каждаго изъ этихъ интерваловъ принимается одно изъ двухъ предложеній: „существуютъ значенія x , лежащія въ этомъ интервалѣ“, „нѣтъ значеній x , лежащихъ въ этомъ интервалѣ“. Можно было бы поэтому принять такое предложеніе: Переменная x , монотонно измѣняющаяся въ конечномъ интервалѣ (a, b) и принимающая въ немъ неограниченное число значеній, имѣетъ предѣлъ въ этомъ интервалѣ, если она такъ опредѣлена, что при раздѣленіи интервала (напримѣръ) на 2^n равныхъ частей ($n = 1, 2, 3, \dots$) можно относительно каждой изъ нихъ указать существуютъ или не существуютъ въ ней значенія переменной x^*).

Отказываясь отъ этого и подобныхъ ему предложеній необходимо признать недостаточными всѣ доказательства существованія корня алгебраическаго уравненія n , вообще, всѣ доказательства существованія или несуществованія (Existenz- und Unmöglichkeitbeweise), основанныя на логическомъ законѣ исключеннаго третьяго, если предварительно не доказано, что предметы, къ которымъ этотъ законъ примѣняется, суть логическія единицы въ отношеніи сказуемыхъ, съ которыми они сопоставляются, или если доказательство самой возможности примѣненія закона исключен-

*) I. Molk (Acta Mathematica, 6, p. 8) говорятъ: «*Опредѣленія должны быть алгебраическими, а не только логическими*. Недостаточно сказать: „вещь есть или ея нѣтъ“. Нужно показать, что значить быть или не быть въ частной области, въ которой мы движемся. Только тогда мы дѣлаемъ шагъ впередъ». Далѣе: «Un raisonnement comme celui-ci: „Si des quantités données, en nombre infini, sont comprises entre des limites finies, il existe nécessairement une limite inférieure de ces quantités“ est parfaitement logique. Il n'est point algébrique». Мы не можемъ согласиться съ Molk'омъ въ томъ, что такое рассужденіе совершенно логично, ибо оно основано на недозволительномъ способѣ примѣненія логическаго закона исключеннаго третьяго.

наго третьяго требуетъ безконечнаго числа испытаній или умозаключеній. Придется поэтому совершенно удалить изъ области нашихъ изслѣдованій ирраціональныя числа, поскольку ихъ общая теорія построена на логическомъ законѣ исключеннаго третьяго и требуетъ безконечныхъ процессовъ.

Вмѣстѣ съ этимъ необходимо соблюдать особенную осторожность въ примѣненіи метода доказательства отъ противнаго, такъ какъ этотъ методъ цѣликомъ опирается на логическій законъ исключеннаго третьяго. Это замѣчаніе слѣдуетъ имѣть въ виду въ „доказательствахъ невозможности“ (Unmöglichkeitbeweise), которыя по существу суть доказательства отъ противнаго. Пусть, напримѣръ, α будетъ классъ, содержащій неограниченное число элементовъ, и m данный произвольный элементъ этого класса. Если нужно показать, что въ нѣкоторомъ классѣ β нѣтъ ни одного элемента, принадлежащаго классу α , то недостаточно доказать, что предположеніе „ m принадлежитъ классу β “ отвергается; необходимо еще доказать, что m есть единица относительно сказуемаго „принадлежитъ классу β “. Ниже мы часто будемъ встрѣчать этого рода примѣры.

2. Введеніе функціональнаго модуля.

Отвергая общую теорію ирраціональныхъ чиселъ поскольку, поскольку она построена на логическомъ законѣ исключеннаго третьяго, можно, однако, не опираясь на этотъ законъ, развитъ вполне строгую теорію отдѣльныхъ классовъ ирраціональныхъ чиселъ, и, въ частности, можно развитъ теорію алгебраическихъ ирраціональныхъ (вещественныхъ и комплексныхъ) чиселъ, слѣдуя въ Алгебрѣ методу, указанному Cauchy въ его знаменитомъ „Mémoire sur la théorie des équivalences algébriques substituée à la théorie des imaginaires“. (Exercices d'Analyse, t. IV, p. 87).

Въ этомъ мемуарѣ Cauchy посчастливилось (j'ai été assez heureux pour réussir, p. 88) показать, что разсмотрѣніе комплексныхъ величинъ, сводится къ разсмотрѣнію вещественныхъ функцій отъ вещественнаго буквеннаго количе-

ства i^*), а именно: Cauchy показали, что въ каждомъ равенствѣ вида $\varphi(i)=0$, гдѣ $i=\sqrt{-1}$, а φ есть цѣлая алгебраическая вещественная функція, можно подѣ i разумѣть неопредѣленное вещественное число, если только при этомъ подѣ знакомъ равенства ($=$) разумѣть знакъ сравненія ($\equiv$) по модулю i^2+1 (въ этомъ случаѣ Cauchy вмѣсто знака „ $\equiv$ “ употребляетъ нѣсколько иной знакъ), такъ что равенство $\varphi(i)=0$ эквивалентно тождественному относительно i сравненію $\varphi(i)\equiv 0 \pmod{i^2+1}$, гдѣ i произвольное количество.

Дѣйствительно, разумѣя подѣ i произвольное количество и обозначая черезъ $q(i)$ и черезъ $ai+b$ соответственно частное и остатокъ отъ дѣленія полинома $\varphi(i)$, расположеннаго по убывающимъ степенямъ i , на i^2+1 , найдемъ, что

$$\varphi(i) = q(i) \cdot (i^2 + 1) + ai + b; \quad (1)$$

поэтому

$$\varphi(i) \equiv ai + b \pmod{i^2 + 1}. \quad (2)$$

Въ частномъ случаѣ, когда $i=\sqrt{-1}$, равенство (1) обращается въ $\varphi(i)=ai+b$, и если притомъ $\varphi(i)=0$, то $a=0$ и $b=0$; слѣдовательно, сравненіе (2), въ которомъ i есть произвольное количество, обращается въ

$$\varphi(i) \equiv 0 \pmod{i^2 + 1}, \quad (3)$$

когда, при $i=\sqrt{-1}$,

$$\varphi(i) = 0. \quad (4)$$

Обратно, если сравненіе (3) выполняется тождественно относительно i при неопредѣленномъ i , то остатокъ отъ дѣленія $\varphi(i)$ на i^2+1 тождественно равенъ нулю; слѣдовательно, $a=b=0$, а въ такомъ случаѣ равенство (1), при

*) Разсматриваемыя въ алгебрѣ буквенныя количества (произвольныя переменныя величины, неопредѣленныя величины, индетерминаты Гаусса) суть совершенно произвольные элементы, теорія которыхъ не зависитъ отъ того, ассоціируется ли или не ассоціируется съ ними понятіе о числѣ. Опредѣленію этихъ элементовъ и дѣйствій надъ ними посвящена первая глава настоящаго сочиненія. См. также I. Kőnig — „Einführung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen“.

$i = \sqrt{-1}$, обращается въ равенство (4). Можно поэтому утверждать, что въ алгебрѣ всякій выводъ вида $\varphi(i) = 0$ или вида $\varphi(i) = \psi(i)$, гдѣ φ и ψ суть цѣлыя вещественныя функціи, а i есть мнимая единица, можно получить, не прибѣгая къ разсмотрѣнію мнимыхъ величинъ, если только подъ знакомъ „ $\equiv$ “ разумѣть „ $\equiv$ по модулю $i^2 + 1$ “, гдѣ $i^2 + 1$, какъ функція отъ произвольнаго количества i , есть *функціональный модуль*.

Идея Cauchy можетъ быть обобщена*) распространеніемъ ея на любой корень любого алгебраическаго уравненія $f(x) = 0$, гдѣ f цѣлая алгебраическая функція. Если x_1 есть корень этого уравненія, то формально *число* x_1 отличается отъ произвольнаго буквеннаго количества x_1 только тѣмъ, что всякое выраженіе типа $\varphi.f(x_1)$, гдѣ φ есть цѣлая функція отъ x_1 , считается равнымъ нулю, т.-е., равными нулю считаются всѣ тѣ и только тѣ цѣлыя функціи отъ x_1 , которыя при произвольномъ неопредѣленномъ x_1 *сравнимы съ нулемъ по функціональному модулю* $f(x_1)$, а потому введеніе въ разсмотрѣніе корня x_1 алгебраическаго уравненія $f(x) = 0$ эквивалентно введенію въ разсмотрѣніе произвольнаго элемента x_1 и *функціональнаго модуля* $f(x_1)$.

Замѣняя въ равенствахъ (1), (4) и сравненіяхъ (2), (3) количество i на x_1 , $i^2 + 1$ на $f(x_1)$ и $ai + b$ остаткомъ $r(x_1)$ отъ дѣленія $\varphi(x_1)$ на $f(x_1)$, мы найдемъ, что равенство

$$\varphi(x_1) = 0,$$

гдѣ x_1 есть корень уравненія $f(x) = 0$, эквивалентно равенству $\varphi(x_1) = 0$, гдѣ x_1 есть произвольный элементъ, а знакъ „ $\equiv$ “ означаетъ „сравнимо по модулю $f(x_1)$ “. Чтобы указать этотъ смыслъ знака „ $\equiv$ “, мы (при неопредѣленномъ x_1) будемъ писать:

$$\varphi(x_1) = 0 \pmod{f} \quad \text{или} \quad \varphi(x_1) = 0 \pmod{f(x_1)}.$$

Слѣдуетъ замѣтить, что равенство

$$\varphi(x_1) = \psi(x_1) \pmod{f}$$

*) L. Kronecker. Grundzüge einer arithmet. Theorie etc., Werke, II, S. 236.

обращается относительно x_1 въ обыкновенное тождественное равенство

$$\varphi(x_1) = \psi(x_1),$$

когда относительно x_1 степени функций φ и ψ ниже степени функции f , ибо въ этомъ случаѣ φ и ψ соответственно суть остатки отъ дѣленія φ и ψ на f , а равенство $\varphi = \psi \pmod{f}$ именно означаетъ тождественность этихъ остатковъ относительно x_1 . Въ частности, когда функции φ и ψ не зависятъ отъ x_1 , равенство $\varphi = \psi \pmod{f}$ обращается въ обыкновенное равенство двухъ независимыхъ отъ x_1 элементовъ. Именно въ этомъ фактѣ лежитъ основаніе возможности доказывать теоремы, относящіяся къ рациональнымъ числамъ, вводя въ область изслѣдованія вспомогательные иррациональные, вещественные или комплексные корни алгебраическихъ функций. Такова, напримеръ, известная теорема о результатахъ R двухъ цѣлыхъ функций $\varphi(x)$ и $f(x)$, въ силу которой равенство $R = 0$ есть условіе необходимое и достаточное для того, чтобы функции φ и f имѣли общаго зависящаго отъ x дѣлителя, при чемъ R есть рациональная функция коэффициентовъ функций φ и f^*).

*) Въ качествѣ простого примѣра приведемъ доказательство предложенія, по которому произведеніе двухъ биномовъ типа $p^2 - 2q^2$, гдѣ p и q суть рациональныя числа, есть биномъ того же типа. Обозначая черезъ x_1 произвольный элементъ, имѣемъ:

$$x_1^2 - 2 = 0 \pmod{x_1^2 - 2} \quad \text{и} \quad x_1^2 = 2 \pmod{x_1^2 - 2}.$$

Поэтому, разумѣя подъ знакомъ „ $\equiv$ “ сравнимость по модулю $x_1^2 - 2$, а подъ a, b, c, d — рациональныя числа и замѣняя постоянно x_1^2 на 2, имѣемъ:

$$a^2 - 2b^2 = (a + bx_1)(a - bx_1); \quad c^2 - 2d^2 = (c + dx_1)(c - dx_1),$$

откуда

$$\begin{aligned} (a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) &= [(a + bx_1)(c + dx_1)][(a - bx_1)(c - dx_1)] = \\ &= [(ac + 2bd) + (ad + bc)x_1][(ac + 2bd) - (ad + bc)x_1] = \\ &= (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2. \end{aligned}$$

Сравненіе $(a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) \equiv (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2 \pmod{x_1^2 - 2}$

Можно, такимъ образомъ, сказать, что каждая алгебраическая ирраціональность маскируетъ собою нѣкоторый модуль сравненія и что ученіе о корняхъ алгебраическихъ уравненій есть ученіе о сравненіяхъ по модулямъ, которые суть функціи отъ произвольныхъ буквенныхъ количествъ. Ученіе о сравненіяхъ по функціональнымъ модулямъ можно построить, не опираясь на логическій законъ исключеннаго третьяго и не прибѣгая къ безконечнымъ процессамъ. При этомъ введенію въ разсмотрѣніе n корней $x_1, x_2, \dots, x_n$ алгебраическаго уравненія $f(x) = 0$ соотвѣтствуетъ введеніе системы n произвольныхъ количествъ $x_1, x_2, \dots, x_n$ и системы n модулей. Во избѣжаніе повтореній мы сначала рассматриваемъ нѣсколько общихъ предложеній, относящихся къ системѣ n модулей, извѣстнымъ образомъ построенныхъ. Мы переходимъ затѣмъ къ разсмотрѣнію системы n модулей $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, которую мы называемъ системою модулей f . Эта система не эквивалентна введенію n корней функціи $f(x)$, и потому мы рассматриваемъ еще другую, болѣе совершенную систему n модулей, которые мы называемъ модулями Cauchy. Эта система также не эквивалентна системѣ n корней функціи $f(x)$, и мы устанавливаемъ признаки, которыми вполне характеризуется алгебраическая теорема, могущая быть доказанной при помощи той или другой изъ этихъ двухъ системъ модулей. Переходя затѣмъ къ систематическому изложенію предмета, мы устанавливаемъ систему n модулей (*натуральныхъ* модулей функціи), эквивалентную системѣ n корней функціи $f(x)$, и даемъ, такимъ образомъ, твердую базу теоріи алгебраическихъ ирраціональностей. Сдѣлавъ нѣкоторыя примѣненія этой системы къ теоріи алгебраическаго рѣшенія уравненій, мы переходимъ къ установленію понятій о большемъ и меньшемъ, вещественномъ и мнимомъ въ области алгебраическихъ чи-

обращается, очевидно, въ обыкновенное тождество

$$(a^2 - 2b^2)(c^2 - 2d^2) = (ac + 2bd)^2 - 2(ad + bc)^2.$$

Всѣ написанныя здѣсь въ видѣ равенствъ сравненія будутъ обыкновенными равенствами при $x_1 = \sqrt{2}$.