

А. Давидов

Элементарная геометрия
В объеме гимназического курса

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А11 **А. Давидов**
Элементарная геометрия: В объеме гимназического курса / А. Давидов – М.:
Книга по Требованию, 2023. – 348 с.

ISBN 978-5-458-27773-0

ISBN 978-5-458-27773-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

такая поверхность называется плоскою или просто плоскостью; всякая же поверхность, не состоящая изъ плоскостей, называется кривою.

Геометрія дѣлится на геометрію на плоскости, называемую планиметриєю, и геометрію въ пространствѣ, называемую стереометрією; въ первой разсматриваются протяженія, которые могутъ быть представлены на плоскости; во второй разсматриваются протяженія, которые не могутъ быть представлены на плоскости; въ этой же части изучаются по преимуществу свойства геометрическихъ тѣлъ.

Планиметрия вмѣстѣ со стереометрією называется элементарною геометрією, въ отличіе отъ высшей геометріи, изслѣдующей преимущественно свойства кривыхъ линій и поверхностей.

Всѣ геометрическія заключенія выводятся изъ нѣкоторыхъ истинъ, самихъ собою очевидныхъ; такія истины называются аксіомами. Такія истины суть, напр., предложенія: цѣлое равно суммѣ всѣхъ своихъ частей; цѣлое больше каждой изъ своихъ частей; двѣ величины, равныя порознь третьей, равны между собою; если отъ равныхъ величинъ отнимемъ поровну или къ нимъ прибавимъ поровну, то получатся величины равныя, и т. д.

Теоремою или предложеніемъ называется истина, которая становится очевидною только послѣ нѣкотораго ряда разсужденій. Эти разсужденія, обнаруживающія справедливость теоремы, называются доказательствомъ.

Проблемою или задачею называется вопросъ, отвѣтъ на который основывается на доказанныхъ предложеніяхъ.

Леммою называется теорема, которая не имѣетъ непосредственной связи съ предыдущими теоремами, но

вводится для доказательства другой болѣе важной теоремы или для рѣшенія задачи.

Всякая теорема состоитъ изъ двухъ частей: изъ *предположенія* и *заключенія*, изъ него выводимаго. Теорема называется *обратною* въ отношеніи другой, когда заключеніе ставится предположеніемъ и предположеніе — заключеніемъ. Не всѣ обратныя предложенія справедливы.

ЧАСТЬ I.

ПЛАНИМЕТРИЯ.

ГЛАВА I.

О прямыхъ линіяхъ и углахъ.

§ 1. *Аксиома. Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.*

Это предложеніе слѣдуетъ прямо изъ понятія, которое мы имѣемъ о прямой линіи.

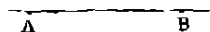
Такъ какъ больше одного кратчайшаго разстоянія между двумя точками не можетъ быть, то очевидно, что между двумя точками можно вообразить только одну прямую линію.

Изъ этого основнаго свойства прямой линіи слѣдуетъ:

1. Двѣ точки вполне опредѣляютъ положеніе прямой, чрезъ нихъ проходящей.

2. Двѣ прямыя, пересѣкающіяся въ одной точкѣ, въ другой точкѣ болѣе встрѣтиться не могутъ, потому что иначе чрезъ тѣ же двѣ точки проходили бы двѣ различныя прямыя, между тѣмъ какъ между двумя точками можно вообразить только одну прямую.

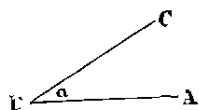
Приложивъ къ двумъ точкамъ *A* и *B* (черт. 1) линейку и проведя по ней черту, получимъ изображеніе прямой. Это изображеніе называется также прямою линіей, хотя между изображеніемъ и самой линіей есть существенное различіе: прямая линія можетъ быть проведена только мысленно и доступна только



Черт. 1.

воображенію, между тѣмъ какъ изображеніе ея представляетъ тѣло, имѣющее весьма малую ширину и высоту *). Прямая линія обозначается двумя буквами, поставленными въ двухъ какихъ-нибудь точкахъ ея, и эти двѣ буквы составляютъ названіе линіи; такъ, напр., прямая линія въ чертежѣ 1 называется линіею *AB*.

§ 2 Уголъ называется неопредѣленная часть плоскости, заключенная между двумя прямыми, выходящими изъ одной точки.



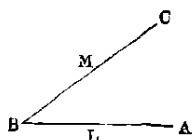
Черт. 2.

Точка *B* (черт. 2), изъ которой выходятъ линіи, называется *вершиною*; самыя же линіи *BA* и *BC*, составляющія уголъ, — *сторонами* его. Уголъ обозначается тремя буквами *ABC*, такъ

что буква, стоящая у вершины, ставится между двумя другими буквами.

Уголъ обозначается иногда и одною буквою *B*, стоящею у вершины, или буквою *α*, поставленною внутри его.

Вмѣсто слова уголъ употребляется также знакъ $\angle$.



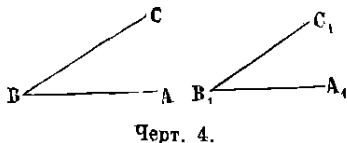
Черт. 3.

При представленіи угла не принимаемъ въ соображеніе длину его сторонъ; такъ, напримѣръ, *ABC* и *LBM* (черт. 3) означаютъ одинъ и тотъ же уголъ.

*) Замѣчаніе. Если разстояніе двухъ точекъ слишкомъ значительно, чтобы провести чрезъ нихъ прямую линію съ помощью линейки, въ такомъ случаѣ натягиваютъ между этими точками веревку, предварительно покрытую слоемъ какого-нибудь окрашивающаго вещества; приводя натянутаю веревку въ сотрясеніе, получаемъ на поверхности окрашенный слѣдъ ея, который изображаетъ прямую линію.

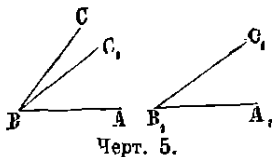
Когда требуется провести на поверхности земли прямую линію весьма значительной длины, въ такомъ случаѣ отмѣчаютъ только концы этой линіи и нѣкоторыя точки между ними съ помощью знаменъ, называемыхъ *вѣхами*.

§ 3. Два угла ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 4) называются равными, независимо отъ длины ихъ сторонъ, когда, наложивъ вершину B_1 на вершину B , а сторону B_1A_1 на сторону BA , найдемъ, что другая сторона B_1C_1 сольется со стороною BC .



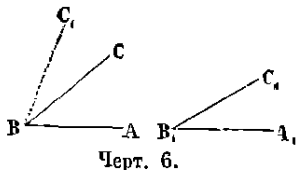
Черт. 4.

Когда же при наложении вершины B_1 угла $A_1B_1C_1$ (черт. 5) на вершину B угла ABC и стороны B_1A_1 на сторону BA найдемъ, что сторона B_1C_1 направлена по линіи BC_1 , лежащей внутри угла ABC , то говорить, что уголъ $A_1B_1C_1$ меньше угла ABC , или уголъ ABC больше угла $A_1B_1C_1$.



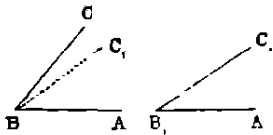
Черт. 5.

Если же уголъ $A_1B_1C_1$ (черт. 6) приложимъ къ углу ABC такъ, чтобы вершина B_1 совпала съ вершиною B , сторона B_1A_1 слилась со стороною BC , и сторона B_1C_1 была направлена по линіи BC_1 , лежащей внѣ угла ABC , то составится уголъ ABC_1 , который называется суммою двухъ угловъ ABC и $A_1B_1C_1$.



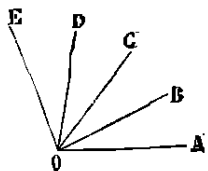
Черт. 6.

Если положимъ, что уголъ $A_1B_1C_1$ (черт. 7) меньше угла ABC , и наложимъ первый уголъ на второй такъ, чтобы вершина B_1 совпала съ вершиною B , сторона B_1A_1 слилась со стороною BA , и сторона B_1C_1 была направлена по линіи BC_1 , лежащей внутри угла ABC , то составится уголъ C_1BC , который называется разностью двухъ угловъ ABC и $A_1B_1C_1$.



Черт. 7.

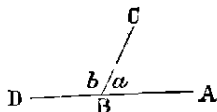
Если изъ точки O (черт. 8) выходить нѣсколько линій OA , OB , OC , OD и OE , образующихъ равные углы AOB , BOC , COD , DOE , то уголъ AOC равенъ углу AOB , два раза взятому, уголъ AOD равенъ углу AOB , три раза взятому, и уголъ AOE равенъ углу AOB , четыре раза взятому. Наоборотъ, уголъ AOB есть половина угла AOC , третья часть угла AOD и четвертая часть угла AOE .



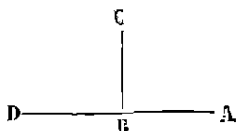
Черт. 8.

Изъ сказаннаго въ этомъ § заключаемъ, что углы могутъ быть разсматриваемы какъ величины, надъ которыми, какъ надъ всѣми величинами, можно производить четыре арифметическія дѣйствія: сложение, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе.

§ 4 Два угла ABC и DBC (черт. 9), имѣющіе общую вершину B , одну общую сторону BC и двѣ другія стороны BA и BD на одной прямой, называются *смежными углами*.



Черт. 9.



Черт. 10.

Когда два смежные угла ABC и DBC (черт. 10) равны, то каждый изъ нихъ называется *прямымъ угломъ*; слѣдов. *прямой уголъ есть одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ угловъ*. Линія BC (черт. 10), составляющая съ линіей AD *прямой уголъ*, называется *линіей перпендикулярной* или просто *перпендикуляромъ*, а точка пересѣченія B перпендикуляра CB съ линією AD —*основаніемъ* перпендикуляра.

Перпендикулярность двухъ линій AD и BC означается иногда такъ: $BC \perp AD$.

Всякая линія, не перпендикулярная къ другой, называется относительно послѣдней *наклонною линіей*.

Углы въ отношеніи къ прямому углу раздѣляются на углы *острые*

и тупые; острымъ угломъ называется уголъ меньшій прямого, а тупымъ—большій прямого.

§ 5. Теорема. *Всѣ прямые углы равны между собою.*

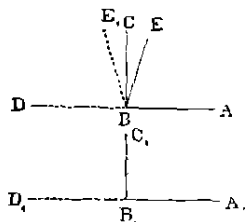
Пусть будутъ ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 11) два прямыхъ угла; требуется доказать, что они равны между собою.

Доказ. Замѣтимъ, что одинъ изъ способовъ обнаруживать справедливость какого-нибудь предложенія состоятъ въ томъ, что доказывається невозможность противнаго предложенія; такъ, напр., вмѣсто того, чтобы доказать, что прямые углы равны, можно доказать, что прямые углы не могутъ быть различны между собою. Этотъ способъ обнаруживать справедливость предложенія называется *доказательствомъ отъ противнаго*.

Приложимъ этотъ способъ къ обнаруженію равенства прямыхъ угловъ.

Пусть будутъ, если это возможно, ABC и $A_1B_1C_1$ (черт. 11) два прямыхъ угла, не равныхъ между собою, положимъ, что уголъ $A_1B_1C_1$ меньше угла ABC .

Продолживъ стороны AB и A_1B_1 и замѣтивъ, что прямой уголъ есть одинъ изъ двухъ равныхъ смежныхъ угловъ (§ 4), заключаемъ, что прямой уголъ ABC равенъ своему смежному углу DBC , и равнымъ образомъ прямой уголъ $A_1B_1C_1$ равенъ своему смежному углу $D_1B_1C_1$. Предполо-



Черт. 11.

живъ же, что уголъ $A_1B_1C_1$ меньше угла ABC , мы, вслѣдствіе сказаннаго равенства угловъ, должны очевидно допустить, что и уголъ $D_1B_1C_1$ меньше угла DBC . Когда же наложимъ линію A_1D_1 на линію AD такъ, чтобы точка B_1 совпала съ точкою B , то вслѣдствіе сдѣланнаго предположенія, что уголъ $A_1B_1C_1$ меньше угла ABC , сторона B_1C_1 будетъ направлена по линіи BE , лежащей внутри угла ABC ; а такъ какъ изъ того же

предположенія слѣдуетъ, что и уголъ $D_1B_1C_1$ меньше угла DBC , то сторона B_1C_1 въ то же время должна быть направлена по линіи BE_1 , лежащей внутри угла DBC ; это очевидно невозможно.

Итакъ предположеніе, что два прямыхъ угла не равны между собой, приводитъ къ нелѣпому заключенію, что прямая линія должна имѣть въ одно и то же время два различныхъ положенія. Изъ этого мы заключаемъ, что все прямые углы должны быть равны между собою.

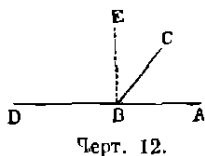
Прямой уголъ обозначается иногда буквою d , и съ нимъ, какъ съ величиною постоянною, сравниваютъ другіе углы.

Изъ предложенія, въ этомъ § доказаннаго, слѣдуетъ, что изъ точки, лежащей на прямой, можно къ ней провести только одинъ перпендикуляръ; всякая другая линія, проведенная черезъ эту точку, составитъ съ этою прямою или уголъ острый или уголъ тупой.

§ 6. Теорема. *Всякая пара смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.*

Положимъ, что ABC и CBD (черт. 12) суть смежные углы, требуется доказать, что

$$ABC + DBC = 2d.$$



Доказ. Вообразивъ линію BE , перпендикулярную къ линіи AD , находимъ

$$ABC + CBE = d; \quad DBE = d.$$

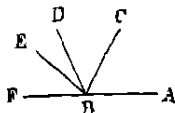
Сложивъ почленно эти два равенства и замѣтивъ при этомъ, что углы CBE и DBE вмѣстѣ составляютъ уголъ DBC , находимъ:

$$ABC + DBC = 2d.$$

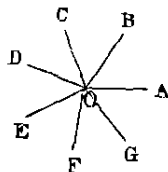
Изъ этого предложенія слѣдуетъ:

1. Одна пара смежныхъ угловъ равна другой парѣ.
2. Если одинъ изъ двухъ смежныхъ угловъ острый, то другой будетъ тупой, и наоборотъ.

3. Сумма углов ABC , CBD , DBE , EBF (черт. 13), лежащих по одной стороне прямой AF , равна двум прямым, потому что вместе они составляют одну пару смежных углов, напр. пару смежных углов ABC и CBF .



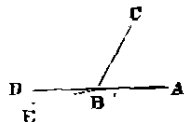
Черт. 13.



Черт. 14.

4. Сумма углов AOB , BOC , COD , DOE , EOF , FOG в GOA (черт. 14), лежащих около одной точки, равна четырём прямым.

Обратная теорема. Если два угла ABC и DBC (черт. 15) имеют общую вершину B , одну общую сторону BC и вместе равны двум прямым, то две другие стороны BA и BD лежат на одной прямой линии и образуют поэтому углы смежные



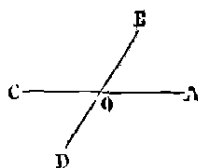
Черт. 15.

Доказ. Положимъ, что DBA не прямая, а ломаная линия, и пусть будетъ BE продолжение стороны AB , такъ что ABC и EBC будутъ углы смежные. Такъ какъ по предыдущей теоремѣ сумма смежныхъ угловъ ABC и EBC равна 2α , то

$$ABC + EBC = ABC + DBC.$$

Отнявъ по углу ABC , находимъ, что углы EBC и DBC равны между собою, что очевидно невозможно, потому что уголъ DBC есть только часть угла EBC .

Слѣдов., предположеніе, что DBA не есть прямая линия, приводитъ къ недѣльному заключенію, что часть равна своему цѣлому.



Черт. 16.

§ 7. Углы AOB и COD , равно и углы BOC и AOD (черт. 16), составленные двумя пересекающимися линиями AC и BD , называются углами *вертикальными* или *противоположными*.

Теорема *Вертикальные углы равны между собою.*

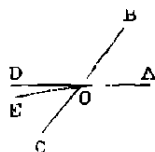
Пусть будут AOB и COD (черт. 16) вертикальные углы; требуется доказать, что $\angle AOB = \angle COD$.

Доказ. Замѣтивъ, что углы AOB и AOD составляютъ пару смежныхъ угловъ, а также углы AOD и DOC , и что по § 6 слѣдств. 1, одна пара смежныхъ угловъ равна другой парѣ, находимъ:

$$AOB + AOD = AOD + DOC.$$

Отнявъ по равному углу AOD , находимъ $AOB = DOC$. Подобнымъ же образомъ доказывается, что $BOC = AOD$.

Обратная теорема. Если два равныхъ угла AOB и COD (черт. 17) имѣютъ общую вершину O и две стороны OB и OC на одной прямой линіи, то и две другія стороны AO и OD составляютъ одну прямую линію, и поэтому углы AOB и COD *противоположные*.



Черт. 17.

Доказ. Положимъ, что AOD не прямая, но ломаная линія, и пусть будетъ OE продолженіемъ стороны AO ; тогда углы AOB и COE будутъ углы *противоположные* и по доказанному равны между собою. Но по положенію уголъ DOC равенъ углу AOB ; слѣдовательно уголъ EOC долженъ равняться углу COD , что очевидно невозможно, потому что COE есть только часть угла COD . Итакъ предположеніе, что AOD не прямая линія, приводитъ къ нелѣпому заключенію, что часть равна своему цѣлому.