

Я. И. Перельман

Занимательная алгебра

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
П27

П27 **Перельман Я.И.**
Занимательная алгебра / Я. И. Перельман – М.: Книга по Требованию, 2021. –
200 с.

ISBN 978-5-458-54603-4

ISBN 978-5-458-54603-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Задача Эйлера	138
Громкоговорители	140
Алгебра лунного перелета	141
«Трудная задача»	145
Какие числа?	147

глава VII. НАИБОЛЬШИЕ И НАИМЕНЬШИЕ ЗНАЧЕНИЯ 148

Два поезда	148
Где устроить полустанок?	150
Как провести шоссе?	153
Когда произведение наибольшее?	154
Когда сумма наименьшая?	158
Брус наибольшего объема	158
Два земельных участка	159
Бумажный змей	160
Постройка дома	161
Дачный участок	163
Желоб наибольшего сечения	164
Воронка наибольшей вместимости	166
Самое яркое освещение	167

глава VIII. ПРОГРЕССИИ 170

Древнейшая прогрессия	170
Алгебра на клетчатой бумаге	171
Поливка огорода	172
Кормление кур	174
Бригада землекопов	175
Яблоки	176
Покупка лошади	177
Вознаграждение война	178

глава IX. СЕДЬМОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ 180

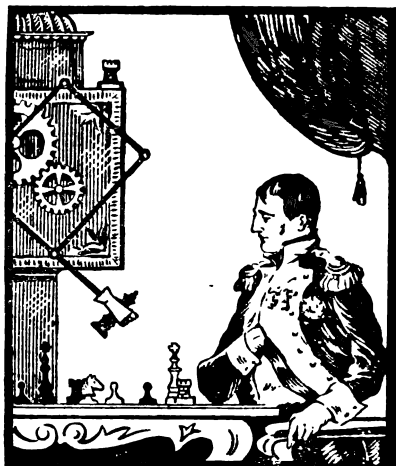
Седьмое действие	180
Соперники логарифмов	181
Эволюция логарифмических таблиц	183
Логарифмические диковинки	184
Логарифмы на эстраде	185
Логарифмы на животноводческой ферме	187
Логарифмы в музыке	188
Звезды, шум и логарифмы	190
Логарифмы в электроосвещении	192
Завещания на сотни лет	193
Непрерывный рост капитала	195
Число « <i>e</i> »	196
Логарифмическая комедия	198
Любое число — тремя двойками	199

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Не следует на эту книгу смотреть, как на легкопонятный учебник алгебры для начинающих. Подобно прочим моим сочинениям той же серии, «Занимательная алгебра» — прежде всего не учебное руководство, а книга для вольного чтения. Читатель, которого она имеет в виду, должен уже обладать некоторыми познаниями в алгебре, хотя бы смутно усвоенными или полузабытыми. «Занимательная алгебра» ставит себе целью уточнить, воскресить и закрепить эти разрозненные и непрочные сведения, но главным образом — воспитать в читателе вкус к занятию алгеброй и возбудить охоту самостоятельно пополнить по учебным книгам пробелы своей подготовки.

Чтобы придать предмету привлекательность и поднять к нему интерес, я пользуюсь в книге разнообразными средствами: задачами с необычными сюжетами, подстрекательскими любопытствами, занимательными экскурсиями в область истории математики, неожиданными применениями алгебры к практической жизни и т. п.

ПЯТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ



Пятое действие

Алгебру называют нередко «арифметикой семи действий», подчеркивая, что к четырем общеизвестным математическим операциям она присоединяет три новых: возведение в степень и два ему обратных действия.

Наши алгебраические беседы начнутся с «пятого действия» — возведения в степень.

Вызвана ли потребность в этом новом действии практической жизнью? Безусловно. Мы очень часто сталкиваемся с ним в реальной действительности. Вспомним о многочисленных случаях вычисления площадей и объемов, где обычно приходится возводить числа во вторую и третью степени. Далее: сила всемирного тяготения, электростатическое и магнитное взаимодействия, свет, звук ослабевают пропорционально второй степени расстояния. Продолжительность обращения планет вокруг Солнца (и спутников вокруг планет) связана с расстояниями от центра обращения также степенной зависимостью: вторые степени времен обращения относятся между собою, как третьи степени расстояний.

Не надо думать, что практика сталкивает нас только со вторыми и третьими степенями, а более высокие показатели существуют только в упражнениях алгебраических задачников. Инженер, производя

расчеты на прочность, сплошь и рядом имеет дело с четвертыми степенями, а при других вычислениях (например, диаметра паропровода) — даже с шестой степенью. Исследуя силу, с какой текучая вода увлекает камни, гидротехник наталкивается на зависимость также шестой степени: если скорость течения в одной реке вчетверо больше, чем в другой, то быстрая река способна перекачивать по своему ложу камни в 4^6 , т. е. в 4096 раз более тяжелые, чем медленная ¹⁾.

С еще более высокими степенями встречаемся мы, изучая зависимость яркости раскаленного тела — например, нити накала в электрической лампочке от температуры. Общая яркость растет при белом калении с двенадцатой степенью температуры, а при красном — с тридцатой степенью температуры («абсолютной», т. е. считаемой от минус 273°). Это означает, что тело, нагретое, например, от 2000° до 4000° (абсолютных), т. е. в два раза сильнее, становится ярче в 2^{12} , иначе говоря, более чем в 4000 раз. О том, какое значение имеет эта своеобразная зависимость в технике изготовления электрических лампочек, мы еще будем говорить в другом месте.

Астрономические числа

Никто, пожалуй, не пользуется так широко пятым математическим действием, как астрономы. Исследователям вселенной на каждом шагу приходится встречаться с огромными числами, состоящими из одной-двух значащих цифр и длинного ряда нулей. Изображение обычным образом подобных числовых исполнов, справедливо называемых «астрономическими числами», неизбежно вело бы к большим неудобствам, особенно при вычислениях. Расстояние, например, до туманности Андромеды, написанное обычным порядком, представляется таким числом километров:

95 000 000 000 000 000 000.

При выполнении астрономических расчетов приходится к тому же выражать зачастую небесные рас-

¹⁾ Подробнее об этом см. в моей книге «Защипательная механика», гл. IX.

стояния не в километрах или более крупных единицах, а в сантиметрах. Рассмотренное расстояние изобразится в этом случае числом, имеющим на пять нулей больше:

$$9\ 500\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000.$$

Массы звезд выражаются еще большими числами, особенно если их выражать, как требуется для многих расчетов, в граммах. Масса нашего Солнца в граммах равна

$$1\ 983\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000.$$

Легко представить себе, как затруднительно было бы производить вычисления с такими громоздкими числами и как легко было бы при этом ошибиться. А ведь здесь приведены далеко еще не самые большие астрономические числа.

Пятое математическое действие дает вычислителям простой выход из этого затруднения. Единица, сопровождаемая рядом нулей, представляет собой определенную степень десяти:

$$100 = 10^2, 1000 = 10^3, 10\ 000 = 10^4 \text{ и т. д.}$$

Приведенные раньше числовые великаны могут быть поэтому представлены в таком виде:

$$\begin{array}{ll} \text{первый} & \dots \dots \dots 950 \cdot 10^{22}, \\ \text{второй} & \dots \dots \dots 1983 \cdot 10^{30}. \end{array}$$

Делается это не только для сбережения места, но и для облегчения расчетов. Если бы потребовалось, например, оба эти числа перемножить, то достаточно было бы найти произведение $950 \cdot 1983 = 1\ 883\ 850$ и поставить его впереди множителя $10^{21+30} = 10^{51}$:

$$950 \cdot 10^{21} \cdot 1983 \cdot 10^{30} = 1\ 883\ 850 \cdot 10^{52}.$$

Это, конечно, гораздо удобнее, чем выписывать сначала число с 21 нулем, затем с 30 и, наконец, с 52 нулями, — не только удобнее, но и надежнее, так как при писании десятков нулей можно проглядеть один-два нуля и получить неверный результат. -

Сколько весит весь воздух?

Чтобы убедиться, насколько облегчаются практические вычисления при пользовании степенным изображением больших чисел, выполним такой расчет: определим, во сколько раз масса земного шара больше массы всего окружающего его воздуха.

На каждый кв. сантиметр земной поверхности воздух давит, мы знаем, с силой около килограмма. Это означает, что вес того столба атмосферы, который опирается на 1 кв. см, равен 1 кг. Атмосферная оболочка Земли как бы составлена вся из таких воздушных столбов; их столько, сколько кв. сантиметров содержит поверхность нашей планеты; столько же килограммов весит вся атмосфера. Заглянув в справочник, узнаем, что величина поверхности земного шара равна 510 млн. кв. км, т. е. $51 \cdot 10^7$ кв. км.

Рассчитаем, сколько квадратных сантиметров в квадратном километре. Линейный километр содержит 1000 м, по 100 см в каждом, т. е. равен 10^5 см, а кв. километр содержит $(10^5)^2 = 10^{10}$ кв. сантиметров. Во всей поверхности земного шара заключается поэтому

$$51 \cdot 10^7 \cdot 10^{10} = 51 \cdot 10^{17}$$

кв. сантиметров. Столько же килограммов весит и атмосфера Земли. Переведя в тонны, получим:

$$51 \cdot 10^{17} : 1000 = 51 \cdot 10^{17} : 10^3 = 51 \cdot 10^{17-3} = 51 \cdot 10^{14}.$$

Масса же земного шара выражается числом

$$6 \cdot 10^{24} \text{ тонн.}$$

Чтобы определить, во сколько раз наша планета тяжелее ее воздушной оболочки, производим деление:

$$6 \cdot 10^{24} : 51 \cdot 10^{14} \approx 10^8,$$

т. е. масса атмосферы составляет примерно миллионную долю массы земного шара¹⁾).

¹⁾ Знак $\approx$ означает приближенное равенство.

Горение без пламени и жара

Если вы спросите у химика, почему дрова или уголь горят только при высокой температуре, он скажет вам, что соединение углерода с кислородом происходит, строго говоря, при всякой температуре, но при низких температурах процесс этот протекает чрезвычайно медленно (т. е. в реакцию вступает весьма незначительное число молекул) и потому ускользает от нашего наблюдения. Закон, определяющий скорость химических реакций, гласит, что с понижением температуры на 10° скорость реакции (число участвующих в ней молекул) уменьшается в два раза.

Применим сказанное к реакции соединения древесины с кислородом, т. е. к процессу горения дров. Пусть при температуре пламени 600° сгорает каждую секунду 1 грамм древесины. Во сколько времени сгорит 1 грамм дерева при 20° ? Мы уже знаем, что при температуре, которая на $580 = 58 \cdot 10$ градусов ниже, скорость реакции меньше в

2^{58} раз,

т. е. 1 грамм дерева сгорит в 2^{58} секунд.

Скольким годам равен такой промежуток времени? Мы можем приблизительно подсчитать это, не производя 57 повторных умножений на два и обходясь без логарифмических таблиц. Воспользуемся тем, что

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3.$$

Следовательно,

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \frac{1}{4} \cdot 2^{60} = \frac{1}{4} \cdot (2^{10})^6 \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{18},$$

т. е. около четверти триллиона секунд. В году около 30 млн., т. е. $3 \cdot 10^7$, секунд; поэтому

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 10^{18}\right) : (3 \cdot 10^7) = \frac{1}{12} \cdot 10^{11} \approx 10^{10}.$$

Десять миллиардов лет! Вот во сколько примерно времени сгорел бы грамм дерева без пламени и жара.

Итак, дерево, уголь горят и при обычной температуре, не будучи вовсе подожжены. Изобретение орудий добывания огня ускорило этот страшно медленный процесс в миллиарды раз.

Разнообразие погоды

ЗАДАЧА

Будем характеризовать погоду только по одному признаку, — покрыто ли небо облаками или нет, т. е. станем различать лишь дни ясные и пасмурные. Как вы думаете, много ли при таком условии возможно недель с различным чередованием погоды?

Казалось бы, немного: пройдет месяца два, и все комбинации ясных и пасмурных дней в неделе будут исчерпаны; тогда неизбежно повторится одна из тех комбинаций, которые уже наблюдались прежде.

Попробуем, однако, точно подсчитать, сколько различных комбинаций возможно при таких условиях. Это — одна из задач, неожиданно приводящих к пятому математическому действию.

Итак: сколькими различными способами могут на одной неделе чередоваться ясные и пасмурные дни?

РЕШЕНИЕ

Первый день недели может быть либо ясный, либо пасмурный; имеем, значит, пока две «комбинации».

В течение двухдневного периода возможны следующие чередования ясных и пасмурных дней:

ясный и ясный
ясный и пасмурный
пасмурный и ясный
пасмурный и пасмурный.

Итого в течение двух дней 2^2 различного рода чередований. В трехдневный промежуток каждая из четырех комбинаций первых двух дней сочетается с двумя комбинациями третьего дня; всех родов чередований будет

$$2^2 \cdot 2 = 2^3.$$

В течение четырех дней число чередований достигнет

$$2^3 \cdot 2 = 2^4.$$

За пять дней возможно 2^5 , за шесть дней 2^6 и, наконец, за неделю $2^7 = 128$ различного рода чередований.

Отсюда следует, что недель с различным порядком следования ясных и пасмурных дней имеется 128. Спустя $128 \cdot 7 = 896$ дней необходимо должно повториться одно из прежде бывших сочетаний; повторение, конечно, может случиться и раньше, но 896 дней — срок, по истечении которого такое повторение неизбежно. И обратно: может пройти целых два года, даже больше (2 года и 166 дней), в течение которых ни одна неделя по погоде не будет похожа на другую.

Замок с секретом

ЗАДАЧА

В одном советском учреждении обнаружен был несгораемый шкаф, сохранившийся с дореволюционных лет. Отыскался и ключ к нему, но чтобы им воспользоваться, нужно было знать секрет замка; дверь шкафа открывалась лишь тогда, когда имевшиеся на двери 5 кружков с алфавитом на их ободах (36 букв) устанавливались на определенное слово. Так как никто этого слова не знал, то, чтобы не взламывать шкафа, решено было перепробовать все комбинации букв в кружках. На составление одной комбинации требовалось 3 секунды времени.

Можно ли надеяться, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней?

РЕШЕНИЕ

Подсчитаем, сколько всех буквенных комбинаций надо было перепробовать.

Каждая из 36 букв первого кружка может сопоставляться с каждой из 36 букв второго кружка. Значит, двухбуквенных комбинаций возможно

$$36 \cdot 36 = 36^2.$$

К каждой из этих комбинаций можно присоединить любую из 36 букв третьего кружка. Поэтому трехбуквенных комбинаций возможно

$$36^2 \cdot 36 = 36^3.$$

Таким же образом определяем, что четырехбуквенных комбинаций может быть 36^4 , а пятибуквенных 36^5

или 60 466 176. Чтобы составить эти 60 с лишним миллионов комбинаций, потребовалось бы времени, считая по 3 секунды на каждую,

$$3 \cdot 60\,466\,176 = 181\,398\,528$$

секунд. Это составляет более 50 000 часов, или почти 6300 восьмичасовых рабочих дней — более 20 лет.

Значит, шансов на то, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней, имеется 10 на 6300, или один из 630. Это очень малая вероятность.

Суеверный велосипедист

ЗАДАЧА

До недавнего времени каждому велосипеду присваивался номер подобно тому, как это делается для автомашин. Эти номера были шестизначные.

Некто купил себе велосипед, желая выучиться ездить на нем. Владелец велосипеда оказался на редкость суеверным человеком. Узнав о существовании повреждения велосипеда, именуемого «восьмеркой», он решил, что удачи ему не будет, если ему достанется велосипедный номер, в котором будет хоть одна цифра 8. Однако, идя за получением номера, он утешал себя следующим рассуждением. В написании каждого числа могут участвовать 10 цифр: 0, 1, ..., 9. Из них «несчастливой» является только цифра 8. Поэтому имеется лишь один шанс из десяти за то, что номер окажется «несчастливым».

Правильно ли было это рассуждение?

РЕШЕНИЕ

Всего имелось 999 999 номеров: от 000 001, 000 002 и т. д. до 999 999. Подсчитаем, сколько существует «счастливых» номеров. На первом месте может стоять любая из девяти «счастливых» цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. На втором — также любая из этих девяти цифр. Поэтому существует $9 \cdot 9 = 9^2$ «счастливых» двухзначных комбинаций. К каждой из этих комбинаций можно приписать (на третьем месте) любую из девяти цифр, так что «счастливых» трехзначных комбинаций возможно $9^2 \cdot 9 = 9^3$.