

Л.Клейнрок

**Теория массового
обслуживания**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 004
ББК 32.81
Л11

Л11 **Л.Клейнрок**
Теория массового обслуживания / Л.Клейнрок – М.: Книга по Требованию,
2022. – 429 с.

ISBN 978-5-458-35576-6

Книга посвящена вопросам проектирования систем массового обслуживания и повышению эффективности их работы. В ней рассмотрены теоретические вопросы анализа математических моделей систем ожидания. Книга предназначена для научных работников, и инженеров которые занимаются вопросами теории массового обслуживания и ее практическим применением..

ISBN 978-5-458-35576-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2022

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2022

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Введение

Сколько времени на этой неделе Вы провели в очередях? По-видимому, нам не удастся избежать частых задержек, и в этом отношении положение непрерывно ухудшается. В предлагаемой книге изучаются явления простоев, ожиданий и обслуживания, которые составляют предмет *теории массового обслуживания*.

Любую систему, в которой поток требований встречает ограниченные средства их удовлетворения, можно рассматривать как систему массового обслуживания (СМО). В частности, если моменты поступления требований или продолжительность их обслуживания не регламентируются, то при пользовании системой возникают конфликты, и образуется очередь. Длина этой очереди зависит от двух характеристик потока требований: во-первых, она зависит от *интенсивности* поступления требований и, во-вторых, от *статистических флуктуаций* этой интенсивности. Конечно, если интенсивность поступления требований *превышает* пропускную способность системы, то система не справляется с потоком этих требований, и начинает расти очередь неограниченной длины. Однако, даже если интенсивность поступления требований меньше пропускной способности системы, очередь может образоваться из-за статистических флуктуаций и внезапного накопления требований (которое может случиться); влияние таких колебаний в большой степени увеличивается, если средняя нагрузка приближается к пропускной способности системы (но обязательно достигает ее). Простота таких СМО

обманчива, и при их исследованиях приходится прибегать к глубоким аналитическим выкладкам. К счастью, исследование СМО может быть выполнено на основе одного хорошо известного фундаментального закона науки. Это — закон сохранения потока, состоящий в том, что интенсивность роста числа требований в системе определяется разностью интенсивностей входящего и исходящего потоков. Этот факт позволяет сравнительно легко составить основную систему уравнений для СМО достаточно сложной структуры.

Целью настоящей книги является изложение теории массового обслуживания для аспирантов первого года обучения. Предполагается, что читатель знаком с начальным курсом теории вероятностей; однако в приложении II дан краткий обзор основных результатов теории вероятностей, необходимых в дальнейшем. Полезно также (но не необходимо) знакомство читателя с операторным методом, хотя и для этого случая в приложении I приведена достаточно полная сводка результатов. Читателю рекомендуется прочитать оба приложения, прежде чем переходить к основному тексту. Хотя язык книги — это язык математики, мы старались по возможности дать неформальное изложение материала, чтобы установить равновесие между обычно применяемыми в таких исследованиях абстракциями и необходимым для практического использования пониманием. Мы надеемся, что выбранный средний уровень изложения достаточен для того, чтобы не шокировать математиков и не поставить в тупик практиков. В ряде случаев мы отказались от строгих доказательств единственности, существования и сходимости, чтобы не затемнять основное изложение. В такие моменты читатель отсылается к другим книгам. Мы отказались от скучного подхода «теорема — доказательство» и предпочли провести читателя через естественную последовательность рассуждений, чтобы вместе «открыть» результат.

Читателю может показаться, что принятое изложение материала либо слишком элементарно и ограничено, либо далеко от точного и изящного; такой читатель пренебрегает интересами практики. Мы полагаем, что книга,

подобная предлагаемой, в которой стираются внутренние препятствия, является полезной и необходимой. Эта книга написана в течение пятилетнего периода, во время которого она была использована для чтения годового (позже, двухчетвертного) курса лекций по теории массового обслуживания в Калифорнийском Университете в Лос-Анджелесе. Материал был разработан в Отделении вычислительной техники факультета инженерных и прикладных наук и прошел успешную проверку в наиболее критической и бескомпромиссной аудитории, а именно у аспирантов. Книга пригодна не только для отделения вычислительной техники, но и для других технических отделений, отделений исследования операций, математики и многих других, специализирующихся в области естественных наук, народного хозяйства, управления и планирования.

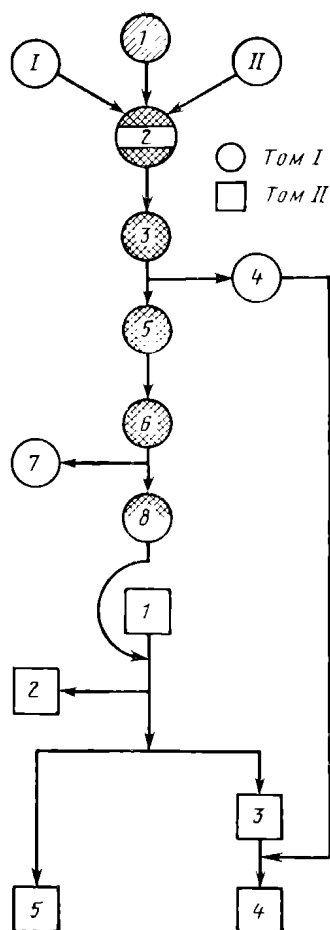
Для изложения содержания книги необходимо сначала привести описание очень удобных сокращенных обозначений, принятых в теории массового обслуживания. В их основе лежит трехбуквенное обозначение вида $A/B/m$, где A и B описывают соответственно распределение промежутков времени между последовательными требованиями и распределение времени их обслуживания, а m — число обслуживающих приборов. A и B принимают значения из следующего набора символов, интерпретация которых дается распределениями, указанными в круглых скобках: M (показательное), E_r (распределение Эрланга порядка r), H_R (гиперпоказательное порядка R), D (детерминированное), G (распределение общего вида). Иногда приходится указывать также емкость накопителя системы (которую обозначим через K) или число источников нагрузки (которое обозначим через M); в этом случае будет использоваться пятибуквенное обозначение: $A/B/m/K/M$. В случае отсутствия одного из двух последних индексов предполагается, что его значение сколь угодно велико. Так, например, запись вида $D/M/2/20$ означает систему с двумя обслуживающими приборами, постоянным (детерминированным) временем между двумя последовательно поступающими требованиями, показательным распределением

времени обслуживания и накопителем емкостью 20 требований.

Данная книга является первым томом двухтомной серии, в которой второй том ¹ посвящен применениям этой теории к вычислительным системам. Первый том (состоящий из четырех частей) начинается гл. 1, представляющей собой введение в теорию массового обслуживания: в ней устанавливается место СМО в общей схеме потоков в сетях и обсуждаются методы расчета характеристик СМО. Читатель, знакомый с материалом приложений I и II (или прочитавший эти приложения), может перейти к изучению гл. 2, причем здесь необходима некоторая осторожность. Очень важным и простым является параграф 2.1. Однако параграфы 2.2—2.4 могут оказаться довольно трудными для читателя, впервые знакомящегося с теорией массового обслуживания; такому читателю целесообразнее пропустить эти разделы и перейти непосредственно к параграфу 2.5, в котором определяется фундаментальный процесс размножения и гибели и впервые применяются метод производящих функций и преобразование Лапласа. После изложения в первой части этих *предварительных сведений* переходим во второй части к *элементарной теории массового обслуживания*. Гл. 3 начинается с вывода общего решения для процесса размножения и гибели в установившемся режиме, и большая ее часть посвящена рассмотрению простых, но важных примеров. В гл. 4 эти результаты обобщаются, и рассматривается метод этапов, а затем дается введение в теории марковских сетей массового обслуживания.

Если вычисления, проводимые во второй части, удастся свести к алгебраическим уравнениям и теории операторных преобразований, то в третьей части приходится опять вернуться к теоретико-вероятностным методам. Рассмотрение *промежуточной теории массового обслуживания* начинается в гл. 5 с важнейшего примера СМО типа $M/G/1$, затем исследуется двойственная ей система $G/M/1$ и ее естественное обобщение — система $G/M/m$ (гл. 6). В гл. 7

¹ См. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. Пер. с англ. М., Мир, 1979 г. — *Прим. пер.*



собранный материал, связанный с вероятностной интерпретацией операторных преобразований. Наконец, материал четвертой части, относящийся к *общей теории массового обслуживания*, посвящен исследованиям системы $G/G/1$ (гл. 8); эта сложная система (для которой даже среднее время ожидания не может быть просто выражено через параметры системы) изучается с помощью спектрального решения интегрального уравнения Линдли. На рисунке показана диаграмма взаимосвязи глав в обоих томах. Главы тома I на этой диаграмме представлены числами в кружках, а главы тома II — числами в квадратах. Штриховкой для тома I указан материал, рекомендуемый для чтения сравни-

тельно ненапряженного начального курса по теории массового обслуживания, рассчитанного на один семестр. Штриховка в гл. 2 указывает, что параграфы 2.2—2.4 могут быть при первом чтении опущены; это же относится к параграфам 8.3 и 8.4. Более насыщенный односеместровый курс может включать весь материал первого тома. Том I завершается обзором важнейших результатов, полученных в книге, которые сгруппированы по классам рассматриваемых систем; этот список результатов может быть использован читателем как справочник. Каждый результат сопровождается указанием страницы, на которой он появляется впервые; это упрощает задачу поиска материала.

Каждая глава содержит свой список литературы, составленный в алфавитном порядке по авторам и по годам. Все важнейшие формулы отмечены символом ■, и все они включены в итоговый список важнейших формул. Каждая глава содержит также задачи, которые в ряде случаев расширяют материал главы; читателю рекомендуется решить их.

Том II содержит материал, рекомендуемый для второго курса теории массового обслуживания, рассчитан на применение к вычислительным системам. В нем гл. I представляет собой обзор основных результатов теории, изложенной в томе I. В гл. 2 изучаются границы, неравенства и приближения, описывающие важнейшие характеристики СМО, включая переходные и нестационарные характеристики; это достигается за счет отказа от попыток получения точных результатов, и при этом удается значительно глубже проникнуть в сущность решения реальных задач. В гл. 3 закладываются основы теории систем с разделением времени, базирующиеся на основных понятиях о СМО с приоритетами. В гл. 4 изучается класс систем, описываемых как СМО с абсолютными приоритетами, но которые больше известны как вычислительные системы с разделением времени. Рассматриваются модели как с одним средством обслуживания, так и со многими средствами, вытекающие непосредственно из результатов гл. 4 тома I. В этой главе также предпринимается попытка использовать диффузионное прибли-

жение, развитое в гл. 2. Наконец, в гл. 5 определяется и исследуется очень важный класс сетей связи электронных вычислительных машин, для изучения которых используются вся изложенная теория и еще некоторые дополнительные результаты¹. Предлагаемая серия из двух томов начинается с изложения теории массового обслуживания, которая представляет большой интерес и сама по себе. Однако главной целью, подкрепленной личными интересами автора, является применение этой теории к реально существующим системам, в данном случае главным образом к вычислительным системам.

Выбор материала, помещенного в томе I (и особенно в томе II), отражает личные вкусы автора и его интересы в данной области. Например, я предпочел не включать длинные обсуждения методов моделирования или методов численного анализа СМО. Эти вопросы очень важны для исследования реальных СМО, однако они мало подходят в качестве материала для включения в текст учебника; вкратце их возможные применения обсуждаются, но на них не акцентируется внимание.

Может быть, имеет смысл посвятить несколько слов истории и развитию теории массового обслуживания. Нет ничего удивительного в том, что теория массового обслуживания возникла в телефонии в первые два десятилетия нашего столетия благодаря работам А. К. Эрланга, заложившего основы теории намного раньше того времени, когда стала популяризироваться и даже развиваться теория вероятностей. Этот замечательный человек установил многие принципиальные результаты, которые используют в настоящее время. Двадцатые годы нашего столетия были временем плодотворного применения его результатов; это продолжалось вплоть до середины 30-х годов, когда Феллер ввел понятие процесса размножения и гибели²,

¹ Фактически автор, вопреки этому обещанию, рассматривает сети связи ЭВМ в двух главах тома II — пятой и шестой. — *Прим. ред.*

² В этот же период фундаментальные результаты теории массового обслуживания были опубликованы советскими математиками А. Н. Колмогоровым и А. Я. Хинчиным. — *Прим. ред.*

и теория массового обслуживания привлекла внимание математиков как объект серьезного исследования. Во время второй мировой войны и в последующие годы эта теория играла важнейшую роль в развитии новой области — исследование операций, — которая казалась весьма многообещающей в первые послевоенные годы. Но из-за сложности реальных систем интерес к теории исследования операций стал уменьшаться, однако математики сразу оценили преимущества теории массового обслуживания. Передовые исследователи продвинулись достаточно далеко в этой сложной и глубокой области математики. Однако вскоре выяснилось, что реально интересующие практику модели не могут быть решены, и поток работ в этой области существенно уменьшился. И только с развитием вычислительной техники работы по теории массового обслуживания опять начали бурно развиваться применительно к широкому классу практических задач, но теперь уже со значительным успехом. В частности, это справедливо и для применений методов теории массового обслуживания к анализу характеристик вычислительных систем, чем и объясняется популярность этой теории среди современных инженеров и ученых. Многие актуальные проблемы формулируются в терминах теории массового обслуживания, и многие методы решения, развиваемые в рамках этой теории, оказываются вполне пригодными для их использования. Более того, применение вычислительных машин для решения уравнений теории массового обслуживания вызвало новый интерес к этой области. Можно надеяться, что предлагаемая книга поможет читателю выработать современное понимание возможностей применения методов теории.

Пользуюсь приятной возможностью завершить введение благодарностями тем лицам и институтам, которые сделали возможным появление этой книги. Прежде всего я хочу выразить благодарность всем тем, кто принимал участие в создании стимулирующей среды в Отделении вычислительной техники Калифорнийского Университета в Лос-Анджелесе, которая ободряла и поощряла мои усилия

в этом направлении. Благодарю Агентство перспективных научных исследований Министерства обороны США, которое предоставило мне возможность участвовать в некоторых наиболее перспективных проектах вычислительных систем и сетей, когда-либо разрабатывавшихся. Фонд Джона Симона Гугенхейма предоставил мне в 1971—1972 академическом году стипендию, что обеспечило возможность проведения дальнейшей исследовательской работы в этот период. Сотни аспирантов, прослушавших мой курс по теории массового обслуживания, внесли свой положительный и критический вклад, и я счастлив выразить свою признательность за оказанную мне помощь Арне Нильссону, Джони Вону, Саймону Лэму, Фуаду Тобаги, Фаруку Камуну, Роберту Райсу и Томасу Сайксу. Мои академические и профессиональные коллеги оказывали мне всяческую поддержку в этом начинании. Я признателен всем машинисткам. Большую часть работы выполнила Шарлотта Лярош, и я всегда буду у нее в долгу. Диане Скосайпек и Синтии Элман я приношу свою глубокую благодарность за быстрое, инициативное и доброжелательное выполнение трудной задачи чтения верстки и исправления опечаток. Кроме того, большой вклад внесли Барбара Уоррен, Джейн Дубинская, Джейн Фуччи и Глория Рой. Я во многом обязан моей семье (и особенно моей жене Стелле), которая оказала мне значительно большую поддержку, чем предусмотрено долгом и брачным контрактом. Наконец, я был бы воистину нерадивым, если бы не поблагодарил мой безотказный диктофон, который все время беседовал со мной.

Март 1974, ЛЕОНАРД КЛЕЙНРОК

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

За деревьями трудно увидеть лес (особенно если деревья разбросаны, а не стоят в каком-либо порядке). Аналогичные трудности часто возникают при встрече с набором математических результатов, которыми мы пытаемся овладеть; успех возможен только после того, как будет понята и оценена применимость этих результатов к реально существующим задачам, когда с уверенностью можно сказать, что стала ясной полезность рассматриваемых математических методов.

Две главы, содержащие предварительные сведения, совершенно противоположны по своему характеру. В гл. 1 показаны глобальная картина возникновения систем массового обслуживания и их значение. Здесь для наглядности приведены развлекательные примеры. В гл. 2, посвященной случайным процессам, делается решительный шаг в сторону математических определений (и при этом быстро теряется перспектива). Однако мы призываем читателя не сдаваться перед этой трудностью, так как, возможно, это будет наиболее сложным местом, с которым читатель встретится в данной книге. В частности, гл. 2 начинается с изложения одного полезного графического способа описания динамики потока требований в системах массового обслуживания. Затем вводится понятие вероятностных процессов, которые возникают при исследовании поступления требований, их характеристик и накопления в СМО самого общего вида. Затем читатель подводится с помощью очень простой аргумен-