

Е. П. Гроссман

**Курс вибраций частей
самолета**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 656
ББК 39.1
Е11

Е11 **Е. П. Гроссман**
Курс вибраций частей самолета / Е. П. Гроссман – М.: Книга по Требованию,
2016. – 312 с.

ISBN 978-5-458-37575-7

ISBN 978-5-458-37575-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2016

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2016

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вопросы вибраций частей самолета за последнее время приобретают все большее значение. При проектировании современных скоростных самолетов на эти вопросы приходится обращать существенное внимание. Опыт последних лет показал, что если антивибрационные мероприятия не предусмотрены при проектировании самолета, то это может привести к печальным последствиям. С другой стороны, теория вибраций частей самолета развилась только за самое последнее время, и литература по этому вопросу разбросана в отдельных специальных статьях, что весьма затрудняет применение результатов теории в конструкторской и расчетной практике. В авиационных вузах, по нашему мнению, преподаванию вопросов вибрации уделяется недостаточное внимание, и молодые инженеры, приходя на завод, встречаются с целым рядом затруднений в этой области.

Настоящая книга представляет собой попытку систематически изложить основы теории вибраций частей самолета, достаточные для решения встречающихся в практике конструктора и расчетчика вопросов. Кроме того, книга содержит ряд вопросов общей теории вибраций (методы Галеркина, Ритца и т. д.), а потому может служить подготовительным материалом для изучения специальной литературы по вибрациям.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

EI кг · м² — жесткость крыла на изгиб.

GI_p кг · м² — жесткость крыла на кручение.

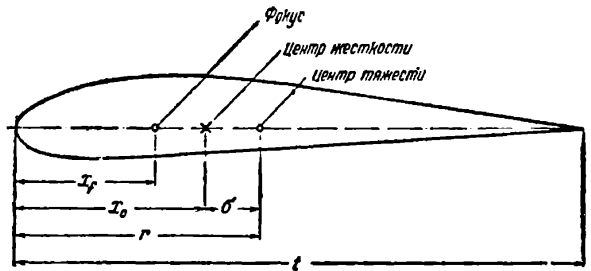
l м — длина полукрыла.

t м — хорда крыла.

x_0 м — расстояние от центра жесткости в рассматриваемом сечении до передней кромки крыла.

σ м — расстояние от оси жесткости до центра тяжести в рассматриваемом сечении.

r м — расстояние от центра тяжести до передней кромки крыла в рассматриваемом сечении.



Фиг. I.

По определению

$$r = x_0 + \sigma.$$

x_f — расстояние от фокуса до передней кромки.

m кг · сек²/м² — погонная масса крыла.

I_m кг · сек² — погонный массовый момент инерции относительно оси жесткости.

I_{m_0} кг · сек² — погонный массовый полярный момент инерции относительно центра тяжести.

x м — радиус инерции относительно центра тяжести.

По определению:

$$I_{m_0} = mx^2;$$

$$I_m = I_{m_0} + m\sigma^2.$$

C_y — коэффициент подъемной силы.

C_m — коэффициент аэродинамического момента относительно носка профиля.

C_{mE} — коэффициент аэродинамического момента относительно оси жесткости.

По определению:

$$C_{mE} = C_m + \frac{x_0}{l} C_y.$$

Все аэродинамические характеристики отнесены к ρSV^2 . Подъемная сила — $C_{\text{пр}} SV^2$, момент относительно носка — $C_{\text{тр}} \rho SV^2$.

V м/сек — скорость полета.

$V_{\text{кр}}$ м/сек — критическая скорость.

ρ кг·сек²/м⁴ — плотность воздуха.

α — угол атаки.

θ — угол кручения.

Z_m — прогиб оси жесткости крыла.

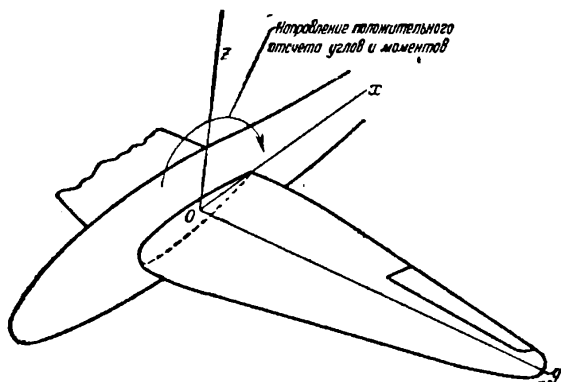
β — угол отклонения элерона относительно крыла.

τ сек. — время.

Oy — ось, направленная по размаху крыла вдоль оси жесткости.

Oz — ось, перпендикулярная к плоскости хорд крыла (направлена вверх от летчика).

Ox — ось, перпендикулярная к двум предыдущим (направлена назад);



Фиг. II.

Начало координат берется в плоскости крепления крыла к фюзеляжу. Положительное направление всех углов и моментов выбрано в сторону вращения от оси Oz к оси Ox (положительный момент — кабрирующий; фиг. II).

T сек. — период колебаний.

p 1/сек. — частота.

q 1/сек. — логарифмический декремент затухания.

n 1/сек. — число колебаний в секунду.

По определению $p = 2\pi n$.

σ_0 м — расстояние от центра тяжести элерона до его оси вращения.

m_3 кг·сек²/м³ — погонная масса элерона.

$I_{\text{т ш}}$ кг·сек² — погонный момент инерции массы элерона относительно его оси вращения.

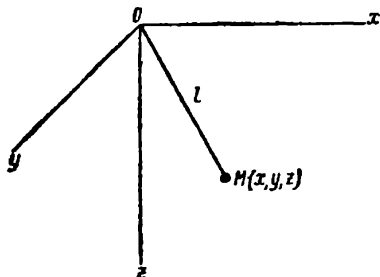
Точками над соответствующими величинами обозначается дифференцирование по времени.

ГЛАВА I

СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Рассмотрим движение какой-либо системы в пространстве. Декартовы координаты какой-либо i -й точки системы обозначим x_i, y_i, z_i . Число точек системы может быть либо конечным (например математический маятник), либо бесконечно большим (например упругая балка). Рассмотрим системы, в которых перемещения частиц, составляющих систему, не вполне независимы, а подчинены некоторым ограничениям, которые могут быть выражены уравнениями между координатами частиц. Случай, когда уравнения ограничения (так называемые уравнения связей) заключают не только координаты, но также и скорости частиц и время, мы рассматривать не будем.



Фиг. 1.

В качестве примера таких систем может быть приведен, например, сферический маятник (фиг. 1). Расстояние частицы M от начала координат O должно во время движения оставаться постоянным и равным длине l маятника. Поэтому координаты x, y, z точки M не являются независимыми — они должны удовлетворять уравнению

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

и одна из координат всегда может быть выражена через две других.

В качестве второго примера рассмотрим колебания пластины AB (фиг. 2) на оси E , которая сама совершает колебания в направлении оси z на пружинах Π . Пластина прикреплена к оси E спиральной пружиной C^1 . Массы пружин по сравнению с массой пластины AB настолько малы, что ими можно пренебречь. В этом случае число точек системы бесконечно велико. Но вследствие

¹ Эта схема грубо изображает изгибно-крутильные колебания крыла.

того, что все точки должны лежать на прямой AB (фиг. 2), между их координатами существует соотношение

$$z = -\operatorname{tg} \theta_i \cdot x + Z, \quad (1)$$

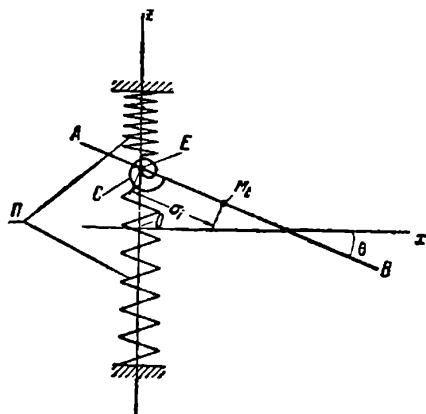
где $Z = OE$ — перемещение оси E . Так как этому соотношению должны удовлетворять координаты x_i и z_i любой точки пластины, то имеется бесконечно большое число уравнений связей. Движение в рассматриваемом случае будет полностью определено, если будут известны всего две величины: Z и θ .

Отметим, что кроме уравнения (1) координаты любой точки пластины должны также удовлетворять условию неизменности расстояния данной точки от оси E :

$$x_i^2 + (Z - z_i)^2 = \sigma_i^2,$$

где σ_i — неизменное расстояние от i -й точки системы M_i до оси E .

Если декартовы координаты точек системы не являются независимыми, то часто бывает удобно определить положение системы при помощи каких-либо других величин, независимых друг от друга. Число таких независимых параметров, полностью определяющих положение системы, называется числом



Фиг. 2.

степеней свободы системы. Вовсе не обязательно, чтобы эти параметры имели измерение длины, как координаты. Например, в случае, изображенном на фиг. 2, за независимые величины, определяющие положение системы, удобно принять перемещение Z оси E и угол закручивания θ .

Такие независимые величины, выбранные для выражения положения системы, называются обобщенными координатами.

Декартовы координаты любой точки системы можно выразить как функции обобщенных координат.

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \dots, q_n); \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \dots, q_n); \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \dots, q_n); \end{aligned} \quad (2)$$

$i = 1, 2, \dots, k$, где k — число точек системы¹; n — число обоб-

¹ Ограничиваем рассмотрение тем случаем, когда эти уравнения явно не содержат скоростей обобщенных координат $\dot{q}_r$ и времени τ .

ценных координат. Например, если для случая, изображенного на фиг. 2, за обобщенные координаты выбрать Z и θ , эти уравнения будут:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= r_i \cos \theta; \\ z_i &= Z - r_i \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

При решении многих задач динамики системы, подчиненной связям, удобно исходить из принципа возможных перемещений. Принцип возможных перемещений состоит в том, что работа всех сил на каждом виртуальном перемещении системы (малые возможные перемещения системы) должна быть равна нулю. Пусть δx_i , δy_i , δz_i — составляющие возможного перемещения i -й точки системы, m_i — масса этой точки и X_i , Y_i , Z_i — составляющие равнодействующей внешних сил, действующих в рассматриваемой точке. Составляющие силы инерции, действующей на частицу m_i , будут $-m_i \ddot{x}_i$, $-m_i \ddot{y}_i$, $-m_i \ddot{z}_i$, и работа всех сил в точке m_i на перемещении δx_i , δy_i , δz_i напишется в следующем виде:

$$(X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i.$$

Суммируя эту работу по всем точкам системы, получим полное выражение работы R сил, приложенных к системе, на пути возможных перемещений, которое и приравняем нулю:

$$R = \sum_{i=1}^k [(X_i - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0. \quad (4)$$

Неудобство этого выражения состоит в том, что в случае наличия связей составляющие перемещения δx_i , δy_i , δz_i не являются независимыми. В самом деле, пусть какое-либо уравнение связи есть

$$f(x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \dots) = 0. \quad (5)$$

Возможные перемещения — это такие, которые допускаются связями. Поэтому координаты точки после перемещения также должны удовлетворять уравнениям связей:

$$f(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1, z_1 + \delta z_1; x_2 + \delta x_2, y_2 + \delta y_2, z_2 + \delta z_2; \dots) = 0.$$

Разлагаем левую часть в ряд Тейлора и отбрасываем члены выше первого порядка малости. Тогда, принимая во внимание уравнение (5), будем иметь:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \delta x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial f}{\partial z_2} \delta z_2 + \dots = 0.$$

Таких уравнений будет столько, сколько уравнений связей, и они выражают совместность данного возможного перемещения со связями системы. Следовательно, в случае наличия связей составляющие перемещений не будут независимыми. Между тем часто несравненно удобнее пользоваться независимыми величинами, т. е. обобщенными координатами. Пользуясь для точек

системы выражениями (2) обобщенных декартовых координат, преобразуем выражение (4) для работы сил на пути возможных перемещений.

Варьируя уравнения (2), находим

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \delta q_n, \quad (6)$$

и аналогично δy_i и δz_i .

Подставляем эти значения в выражение (4). Тогда

$$\begin{aligned} R = & \sum_{i=1}^k \left[(X_i - m_i \ddot{x}_i) \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \delta q_n \right) + \right. \\ & + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_n} \delta q_n \right) + \\ & \left. + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_n} \delta q_n \right) \right] = \\ = & \sum_{r=1}^n \delta q_r \left\{ \sum_{i=1}^k \left[(X_i - m_i \ddot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + (Y_i - m_i \ddot{y}_i) \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + (Z_i - m_i \ddot{z}_i) \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right] \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Сумму, стоящую в фигурных скобках, обозначим через S_r .

Кроме того, введем обозначение

$$Q_r = \sum_{i=1}^k \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right). \quad (8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_r = & Q_r - \sum_{i=1}^k m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right) = \\ = & Q_r - \frac{d}{d\tau} \sum_{i=1}^k m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right) + \\ + & \sum_{i=1}^k m_i \left[\dot{x}_i \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_r} \right) + \dot{y}_i \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial y_i}{\partial q_r} \right) + \dot{z}_i \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right) \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

Суммы, стоящие справа, могут быть преобразованы при помощи соотношений (2). Дифференцируя эти соотношения по времени, получаем:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_n} \dot{q}_n, \quad (10)$$

и аналогично для $\dot{y}_i$ и $\dot{z}_i$.

Таким образом мы убеждаемся, что в рассматриваемом случае [когда в выражение (2) время явно не входит] скорости из-

менения декартовых координат суть линейные однородные функции от обобщенных скоростей $\dot{q}_r$, причем коэффициенты в этих функциях $(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_1}, \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_2}, \dots)$ суть, вообще говоря, функции обобщенных координат $q_1, q_2, \dots$

Дифференцируя обе части выражения (10) частным образом по $\dot{q}_r$, находим:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial y_i}{\partial q_r}, \quad \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial z_i}{\partial q_r}. \quad (11)$$

Дифференцируя же обе части выражения (10) частным образом по q_r , получаем:

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1 \partial q_r} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2 \partial q_r} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_n \partial q_r} \dot{q}_n. \quad (12)$$

С другой стороны, $\frac{\partial x_i}{\partial q_r}$ есть функция $q_1, q_2, \dots, q_n$, и, дифференцируя ее по времени, как неявную функцию, будем иметь:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_r} \right) = \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_r \partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_r \partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_r \partial q_n} \dot{q}_n.$$

Сравнивая это выражение с выражением (12), заключаем, что

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_r} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_r} \right)$$

и также

$$\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial y_i}{\partial \dot{q}_r} \right); \quad \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial z_i}{\partial \dot{q}_r} \right). \quad (13)$$

Пользуясь выражениями (11) и (13), запишем выражение (9) в следующем виде:

$$\begin{aligned} S_r &= Q_r - \frac{d}{d\tau} \sum_{i=1}^k m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_r} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_r} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^k m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_r} + \dot{y}_i \frac{\partial \dot{y}_i}{\partial q_r} + \dot{z}_i \frac{\partial \dot{z}_i}{\partial q_r} \right) = \\ &= Q_r - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_r}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \quad (15)$$

есть кинетическая энергия системы. При помощи соотношений (2) она может быть выражена через обобщенные координаты, но мы на этом останавливаться не будем.

Значение S_r из выражения (14) подставляем в выражение (7) и находим окончательное выражение работы сил на пути

возможных перемещений:

$$R = - \sum_{r=1}^n \left[\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} - Q_r \right] \delta q_r \quad (16)$$

По принципу возможных перемещений $R = 0$. Так как δq_r независимы и произвольны, то это может быть только, если выполняются равенства¹:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} - Q_r = 0. \quad (17)$$

$r = 1, 2, \dots, n$

Эти — уравнения движения в форме Лагранжа. Как видно из вывода, эта форма уравнений движения самым тесным образом связана с принципом возможных перемещений.

Найдем еще физическое значение обобщенных сил, для чего рассмотрим работу приложенных к системе сил. Пользуясь выражением (6), легко убеждаемся, что эта работа $\mathfrak{A}$ будет:

$$\mathfrak{A} = \sum_{i=1}^k (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n. \quad (18)$$

Рассмотрим перемещение, соответствующее приращению только одной какой-либо координаты δq_r . В этом случае работа приложенных сил будет:

$$\mathfrak{A}_r = Q_r \delta q_r.$$

Следовательно, обобщенная сила Q_r есть тот коэффициент, на который нужно помножить приращение обобщенной координаты, чтобы получить соответствующую этому приращению работу приложенных сил.

Рассмотрим еще частный случай, когда приложенные к системе силы имеют потенциал. Пусть существует такая функция $U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_k, y_k, z_k)$, что

$$X_i = - \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad Y_i = - \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad Z_i = - \frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad (19)$$

В силу соотношений (2) мы можем рассматривать U , как функцию обобщенных координат $q_1, q_2, \dots, q_n$. Подставляя значения сил из (19) в выражение (8), находим:

$$Q_r = - \sum_{i=1}^k \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_r} = - \frac{\partial U}{\partial q_r},$$

¹ Уравнение (17) можно получить, например, если в выражении (16) положить $\delta q_r \neq 0$, а все остальные вариации обобщенных координат равными нулю. Делая это предположение поочередно для $r = 1, 2, \dots, n$, получим все уравнения системы (17).