

Ш. Эрмит

Курс анализа 1936

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ш11

Ш11 **Ш. Эрмит**
Курс анализа 1936 / Ш. Эрмит – М.: Книга по Требованию, 2023. – 386 с.

ISBN 978-5-458-25167-9

Знаменитый курс Шарля Эрмита! Можно лишь приветствовать издание этого легендарного курса, который не должен служить учебником при первоначальном изучении Анализа, а должен служить пособием для тех, кто желает глубже изучить этот предмет и вникнуть в дальнейшее развитие этого предмета за последние сорок или пятьдесят лет.

ISBN 978-5-458-25167-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Эрмит является одним из знаменитейших математиков XIX столетия как по своему творчеству, так и по своей педагогической деятельности. В конце 1860 г. он читал курс Анализа в Политехнической школе. Тогда же был напечатан первый том этого курса, заключающий основы дифференциального и интегрального исчисления; вторая же часть курса, заключающая учение об определенных интегралах, теорию функций комплексного переменного, теорию эллиптических функций и учение об интегрировании дифференциальных уравнений, напечатана не была, имеется лишь в литографированном виде и составляет библиографическую редкость.

В Политехнической школе Эрмит читал курс Анализа в продолжение двух или четырех лет, главная же педагогическая деятельность его (свыше сорока лет) протекает в Парижском университете (Сорбонна).

Долгие годы Эрмит читал здесь этот знаменитый курс, хотя и названный им Cours d'Analyse, но в сущности представляющий курс Теории функций, развитой на основах учений Вейерштрасса, с присущей Эрмиту ясностью и оригинальностью изложения.

Курс этот издан не был, но сохранился в литографированном виде, составленном Андуйе; самое имя составителя ручается за точность изложения содержания; впрочем последнее, четвертое издание, было просмотрено самим Эрмитом.

А. Н. Коркин был по своим воззрениям противником Вейерштрасса, но он высоко ставил курс Эрмита, рекомендовал его изучение магистрантам и всем своим ученикам.

Можно лишь приветствовать издание этого курса, который не должен служить учебником при первоначальном изучении Анализа, а должен служить пособием для тех, кто желает глубже изучить этот предмет и вникнуть в дальнейшее развитие этого предмета за последние сорок или пятьдесят лет.

Академик А. Крылов.

ПЕРВАЯ ЛЕКЦИЯ.

Определение площади, ограниченной отрезком, и длины дуги плоской кривой.
Площади эллипса, гиперболы, уникурсальных кривых, циклоиды.

При применении интегрального исчисления к геометрии занимаются прежде всего квадратурой площадей и спрямлением плоских кривых. Первая, возникающая при рассмотрении этих вопросов задача заключается в точном определении того, что надо понимать под площадью, ограниченной отрезком кривой, и под длиной дуги. Эти величины в течение долгого времени рассматривались, как первоначальные понятия, не приводимые к другим, более простым.

Пусть $y = f(x)$ кривая (рис. 1), отнесенная к прямоугольным координатам, AC и BD — две ординаты, соответствующие абсциссам $OA = x_0$ и $OB = X$. Дадим сначала определение площади $ABCD$.

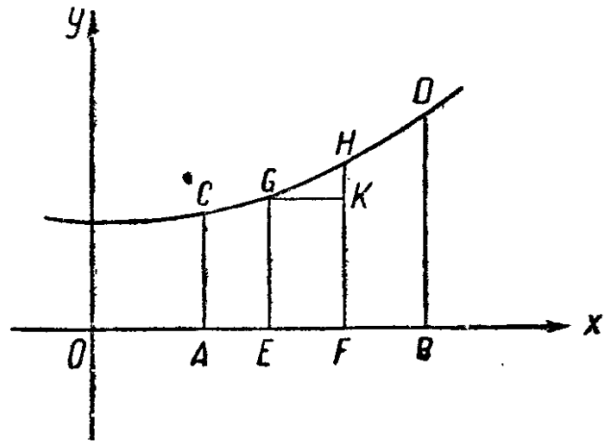


Рис. 1.

Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ возрастающие значения x , заключенные между x_0 и X ; указанную площадь мы определим, как предел суммы:

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

к которому она стремится, когда разности $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$ становятся меньше любой заданной величины.

Полагая $y_i = f(x_i)$ и $x_n = X$, напомним это выражение в более сжатом виде:

$$\sum (x_{i+1} - x_i) y_i. \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Заметим также, что, положив $OE = x_i, OF = x_{i+1}$ и построив ординаты EG, FH , мы можем заключить, что каждый член $(x_{i+1} - x_i) y_i$ выражает площадь прямоугольника $EFGK$, в котором GK параллельна оси OX ; следовательно, предел суммы этих прямоугольников будет геометрическим определением площади, ограниченной отрезком кривой.

Рассмотрим теперь многоугольник, вписанный в кривую CD , вер-

шины которого имеют координатами x_i, y_i ; длина дуги CD определится как предел суммы:

$$\sum [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2]^{1/2},$$

которая равна периметру многоугольника, к которому она стремится, когда все разности $x_{i+1} - x_i$ неограниченно уменьшаются.

Эти два определения приводят к одному и тому же вопросу анализа, который в первом случае представляется в более простом виде, и цель которого — доказать существование единственного предела, определяемого суммой

$$S = \sum (x_{i+1} - x_i) y_i.$$

Вот его решение, которое дал Коши в своей 21-й лекции Курса анализа Политехнической школы.

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна, понимая непрерывность в том смысле, что при возрастании переменной от $x = x_0$ до $x = X$, $f(x)$ принимает последовательно все значения, заключенные между $f(x_0)$ и $f(X)$. Обозначив некоторое такое значение через Y , можем положить:

$$Y = f(\xi),$$

где ξ — абсцисса, заключенная между x_0 и X , что позволяет написать:

$$\xi = x_0 + \theta (X - x_0),$$

где θ — положительное число, меньшее единицы.

Имея это, замечаем, что мы получим нижний и верхний пределы для S , если заменим ординаты y_i наименьшей и наибольшей между ними. Пусть также Y есть некоторая величина, промежуточная между минимальным и максимальным значением этих ординат; имеем

$$S = Y \sum (x_{i+1} - x_i) = Y (X - x_0)$$

или, на основании сказанного,

$$S = f[x_0 + \theta (X - x_0)] (X - x_0).$$

Установив это, разделим каждый из интервалов $x_1 - x_0, x_2 - x_1$, и т. д. на другие меньшие, и обозначим через S_1 новую сумму, которая получится в результате этих преобразований. Каждое из слагаемых $(x_1 - x_0)f(x_0), (x_2 - x_1)f(x_1)$ и т. д. следует заменить частичными суммами, величинами которых, как только что было установлено, будут, если $\theta_0, \theta_1 \dots$ числа меньшие единицы:

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] \\ & (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

следовательно, можем написать:

$$S_1 = \sum (x_{i+1} - x_i) f[x_i + \theta_i (x_{i+1} - x_i)].$$

Это выражение дает возможность легко определить разность $S_1 - S$, полагая:

$$f[x_i + \theta_i (x_{i+1} - x_i)] = f(x_i) + \epsilon_i$$

получаем

$$S_1 = S + \sum (x_{i+1} - x_i) \epsilon_i,$$

откуда следует, считая η заключенным между наименьшим и наибольшим значениями ϵ_i ,

$$S_1 - S = (X - x_0) \eta.$$

Таким образом, мы видим, что разность $S_1 - S$ можно сделать меньше любой заданной величины, так как значения $\epsilon_0, \epsilon_1 \dots \epsilon_{n-1}$, а, следовательно и η , при достаточном уменьшении разностей $x_{i+1} - x_i$ могут быть сделаны сколь угодно малыми.

В заключение Коши добавляет, что каков бы ни был способ разделения интервала $X - x_0$, мы достигнем того же самого предела, составляя безгранично уменьшаться части этого деления. Пусть, в самом деле, S и S_1 — суммы, соответствующие двум различным законам убывания; доказываем, что разность $S - S_1$ имеет пределом нуль, рассматривая третий способ разделения, в который входят все значения, заключенные между x_0 и X , которые фигурируют в первом и втором способе. Обозначив через S_2 сумму, соответствующую этому третьему способу и, пользуясь доказанным, видим, что разности $S - S_2$ и $S_1 - S_2$, а вместе с ними и разность $S - S_1$, могут быть сделаны меньше любой заданной величины.

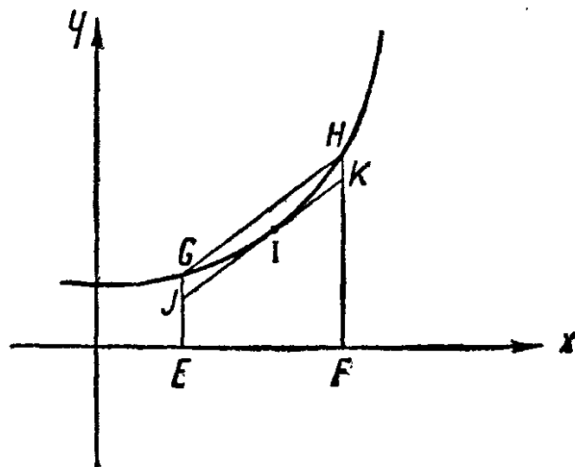


Рис. 2.

Геометрическое понятие площади, ограниченной кривой, которое мы только что получили, и аналитическое понятие, соответствующее определенному интегралу, дают нам, как простое следствие, определение с этой точки зрения длины дуги. Действительно, периметр вписанного многоугольника, выраженный суммой

$$S = \sum [(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2]^{1/2},$$

может быть написан в виде:

$$S = \sum \left[1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 \right]^{1/2} (x_{i+1} - x_i);$$

достаточно заметить, что при бесконечном убывании $x_{i+1} - x_i$ величина $\left[1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 \right]^{1/2}$ становится в пределе равной значению

$\sqrt{1 + f'^2(x)}$ при $x = x_i$. Мы получаем таким образом выражение площади, ограниченной кривой $y = \sqrt{1 + f'^2(x)}$, так что площадь и дуга будут представлены аналогичными формулами. Выберем между всеми спо-

собами убывания разностей $x_{i+1} - x_i$ наиболее простой. Положим их равными одному и тому же, бесконечно малому количеству dx ; тогда мы сможем написать, вводя знак $\int$ вместо Σ :

$$S = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

$$S = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

К данному определению дуги я добавляю еще следующее замечание.

Рассмотрим некоторую сторону GH многоугольника (рис. 2), вписанного в дугу S , и касательную к кривой в точке I , взятой произвольно между G и H . Отрезок этой касательной JK , заключенный между ординатами GE и HF , имеет ту же самую проекцию на ось абсцисс, как и хорда GH ; таким образом, обозначая через φ и ψ углы хорды и касательной с осью, имеем соотношение:

$$GH \cos \varphi = JK \cos \psi.$$

Отношение $\frac{GH}{JK}$ имеет пределом единицу, разность $\varphi - \psi$ бесконечно мала; по теореме о замене в пределах сумм одних бесконечно малых другими, мы можем заменить стороны вписанного многоугольника рядом отрезков JK , не прилегающих друг к другу. Это замечание нам будет полезно в дальнейшем.

Первое приложение формулы квадратур будет иметь своим предметом вычисление площадей, ограниченных кривыми второго порядка. Будем исходить из общего выражения ординаты:

$$y = ax + \beta + \sqrt{ax^2 + 2bx + c},$$

которое прежде всего дает

$$S = \frac{1}{2} ax^2 + \beta x + \gamma + \int \sqrt{ax^2 + 2bx + c} dx,$$

где γ — произвольная постоянная. Положим $R = ax^2 + 2bx + c$.

Вычисление интеграла $\int \sqrt{R} dx$ производится следующим образом.

Замечаю, что можем написать:

$$aR = (ax + b)^2 - b^2 + ac;$$

применяя затем тождество:

$$D_x[(ax + b) \sqrt{R}] = a \sqrt{R} + \frac{(ax + b)^2}{\sqrt{R}} = \frac{aR + (ax + b)^2}{\sqrt{R}}$$

или

$$D_x[(ax + b) \sqrt{R}] = \frac{2aR + b^2 - ac}{\sqrt{R}},$$

получаем

$$(ax + b)\sqrt{R} = 2a \int \sqrt{R} dx + (b^2 - ac) \int \frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Предлагаемый интеграл приведен к алгебраическому выражению и к уже известной величине $\int \frac{dx}{R}$; это дает:

$$\int \sqrt{R} dx = \frac{ax + b}{2a} \sqrt{R} - \frac{b^2 - ac}{2a\sqrt{a}} \ln(ax + b + \sqrt{aR}).$$

В случае эллипса, в котором $a < 0$, логарифм становится мнимым; приведем интеграл к виду, явно вещественному.

Пусть, выделяя часть вещественную и часть мнимую, имеем:

$$ax + b + \sqrt{aR} = p + iq,$$

вследствие этого

$$ax + b - \sqrt{aR} = p - iq.$$

Значит:

$$(ax + b)^2 - aR = p^2 + q^2$$

или

$$b^2 - ac = p^2 + q^2.$$

Положим теперь, замечая, что $b^2 - ac$ положительно:

$$\cos \theta = \frac{p}{\sqrt{b^2 - ac}} = \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}}$$

$$\sin \theta = \frac{q}{\sqrt{b^2 - ac}} = \frac{\sqrt{-aR}}{\sqrt{b^2 - ac}};$$

получаем

$$\frac{1}{i} \ln(ax + b + \sqrt{aR}) = \theta.$$

Можно поступать еще иным способом, изменяя переменную и исходя от R , разложенного на множители первой степени:

$$R = a(x - g)(x - h).$$

Предположим $g > h$; полагаем

$$x = g \sin^2 \varphi + h \cos^2 \varphi;$$

это дает

$$dx = 2(g - h) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{2d\varphi}{\sqrt{g - h}}$$

и следовательно:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{2}{\sqrt{g - h}} \varphi.$$

Углы θ и φ , которые мы последовательно ввели, удовлетворяют двум уравнениям:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{-aR}}{\sqrt{b^2 - ac}}$$

$$\sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sqrt{-aR}}{\sqrt{a^2 (g-h)^2}};$$

имея:

$$a^2 (g-h)^2 = 4 (b^2 - ac),$$

выводим:

$$2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin \theta,$$

откуда:

$$2\varphi = \theta,$$

как и следовало ожидать.

Рассмотрим в частности эллипс, отнесенный к своим осям:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Выражение площади, ограниченной его дугой, будет:

$$S = \frac{bx \sqrt{a^2 - x^2}}{2a} + ab\varphi.$$

Зависимость угла φ от абсциссы дана соотношением:

$$x = a (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi).$$

Таким образом, мы видим, что при возрастании φ от нуля до $\frac{\pi}{2}$, x изменяется от $-a$ до $+a$, и так как первое алгебраическое слагаемое исчезает на этих двух границах, формула дает для площади полуэллипса:

$$S = \frac{\pi ab}{2}.$$

Квадратуру эллипса мы можем получить другим способом, выражая координаты его точек формулами:

$$x = a \cos t; \quad y = b \sin t.$$

Вообще, рассмотрим некоторую кривую, определяемую уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$; интеграл $\int_a^\beta \psi(t) \varphi'(t) dt$ даст площадь $MNAB$ при условии, что при возрастании t от α до β , выражения x и y дают все точки дуги от M до N (рис. 3).

Рассмотрим теперь, сохраняя ту же вспомогательную переменную, некоторую замкнутую кривую, которая в данном случае будет описана полностью; исходим от точки P в направлении PNM таким образом, что внешнее пространство находится всегда справа; пусть t возрастает

от t_0 до t_1 ; предположим дальше, что кривая непрерывна и что одной и той же абсциссе соответствуют только две ординаты. Пусть M и N (рис. 4) предельные точки, ординаты которых — касательные. Рассмотрим последовательно дуги PN , NM , MP и предположим, что первая будет описана при возрастании t от t_0 до α , вторая — от α до β и третья — от β до t_1 .

Имеем:

$$PQNB = \int_{t_0}^{\alpha} \psi(t) \varphi'(t) dt$$

$$NBMA = \int_{\beta}^{\alpha} \psi(t) \varphi'(t) dt$$

$$MAPQ = \int_{\beta}^{t_1} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

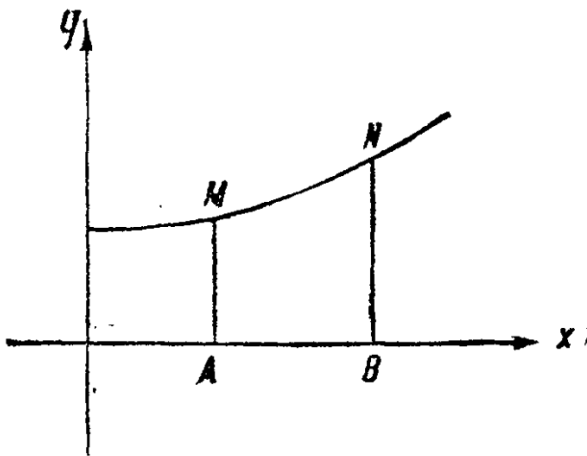


Рис. 3.

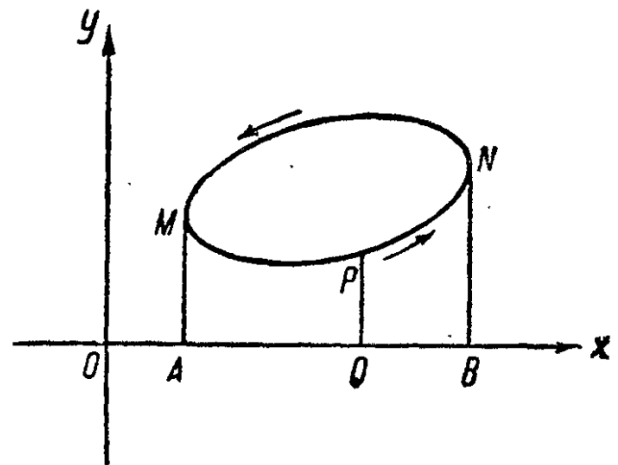


Рис. 4.

Пусть S — площадь, ограниченная замкнутой кривой; получаем

$$-S = PQNB - NBMA + MAPQ = \int_{t_0}^{\alpha} \psi \varphi' dt - \int_{\beta}^{\alpha} \psi \varphi' dt + \int_{\beta}^{t_1} \psi \varphi' dt,$$

или

$$-S = \int_{t_0}^{\alpha} \psi \varphi' dt + \int_{\alpha}^{\beta} \psi \varphi' dt + \int_{\beta}^{t_1} \psi \varphi' dt$$

и окончательно:

$$-S = \int_{t_0}^{t_1} \psi \varphi' dt.$$

Интеграл $\int_{t_0}^{t_1} \psi \varphi' dt$ с измененным знаком дает площадь, заключенную внутри кривой. Очевидно, что площадь дается интегралом без изменения

его знака, когда контур описывается таким образом, чтобы внешнее пространство находилось слева.

Применим этот результат к эллипсу, пользуясь формулами:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Если заставить t возрастать от 0 до 2π , то кривая окажется полностью описанной один раз и внешнее пространство будет все время справа от направления описывающей точки.

Таким образом, обозначая через S площадь эллипса, будем иметь:

$$S = - \int_0^{2\pi} y dx = \int_0^{2\pi} ab \sin^2 t dt.$$

Применим теперь к интегралу $\int \sin^2 t dt$ общий метод, применяемый к $\int \cos^m x \sin^n x dx$. Преобразуем степени или произведения степеней косинуса и синуса x в линейные выражения через косинусы и синусы кратных дуг. Здесь мы получаем непосредственно:

$$\int \sin^2 t dt = \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C,$$

откуда

$$S = ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi ab.$$

Следующее замечание, как мы сейчас увидим, упростит вычисление. Возьмем снова формулу:

$$S = - \int_{t_0}^t \psi(t) \varphi'(t) dt;$$

имеем очевидно:

$$\varphi(t) \psi(t) = \int [\varphi(t) \psi'(t) + \varphi'(t) \psi(t)] dt,$$

и так как функции имеют одно и то же значение на границах t_0 и t_1 , мы можем написать:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} [\varphi(t) \psi'(t) + \varphi'(t) \psi(t)] dt,$$

что сразу дает:

$$2S = \int_{t_0}^{t_1} [\varphi(t) \psi'(t) - \varphi'(t) \psi(t)] dt.$$