Б.В. Шабат

Методы теории функций комплексного переменного

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б11

Б.В. Шабат

Б11 Методы теории функций комплексного переменного / Б.В. Шабат – М.: Книга по Требованию, 2021. – 734 с.

ISBN 978-5-458-33899-8

Книга рассчитана на специалистов по прикладной математике, механике, физике, радио-, электро-, теплотехнике и других. Её можно использовать также как учебное пособие при изучении анализа в университетах и высших технических учебных заведениях.Наряду с кратким изложением теории, ориентированным на практические применения, она содержит большое число примеров и задач из разных областей математики.В четвёртом издании исправлены неточности и опечатки, а также по-новому изложены некоторые разделы.

ISBN 978-5-458-33899-8

на этот метод можно не читать — лучше вернуться к ним по мере ссылок.

В книгу включено также большое число примеров приложения теории функций к различным физическим задачам. Не следует думать, что, скажем, электротехнические примеры интересны лишь электрикам, а гидромеханические — лишь механикам. На самом деле методы, иллюстрируемые на одной задаче, часто с успехом могут быть применены и к решению аналогичной задачи с другим физическим содержанием. Знакомство с основами приложения теории функций к различным областям физики поможет читателям в дальнейшей работе использовать для своей области методы, излагаемые в литературе по другим областям.

Мы всюду стремились избежать усложняющих доказательства деталей, иногда умышленно допуская нестрогости в угоду наглядности изложения. Для простоты некоторые предложения доказаны в более жестких условиях, чем это необходимо, а некоторые предложения приведены без доказательства.

Москва, 1951 г.

М. А. Лаврентьев
Б. В. Шабат

Из предисловия ко второму изданию

В предлагаемом издании книги мы сохранили ее общее содержание, распределение материала и характер изложения с упором на геометрическую наглядность и связи с проблемами теории уравнений математической физики и с приложениями.

В это издание мы внесли ряд изменений и дополнений; отметим наиболее существенные из них. В третьей главе добавлены новые технические и теоретические применения, особенно развившиеся за последние годы: теория кумулятивных зарядов, некоторые задачи газовой динамики, изучение решений уравнений с частными производными методами теории функций. В четвертой главе по-новому изложены выводы основных формул вариационного метода теории конформных отображений, к которому в последнее время усилился интерес как за рубежом, так и у нас в связи с новыми приложениями этого метода в задачах механики. В пятой главе упрощено и дополнено изложение применений теории функций к проблеме устойчивости и по-новому изложены методы асимптотических оценок. В главе шестой добавлен пункт об интегральных преобразованиях, отличных от преобразования Лапласа.

Москва, май 1957 г.

Авторы

Предисловие к четвертому изданию

В четвертом издании исправлены замеченные опечатки и неточности. В этой работе большую помощь нам оказали коллеги из Германской Демократической Республики У. Пирл, Р. Кюнау и Л. фон Вольферсдорф, которые очень тщательно подготовили немецкое издание нашей книги, В. А. Зорич, просмотревший текст для ее французского издания, а также многочисленные читатели, сообщившие нам свои замечания. Всем им мы выражаем свою глубокую благодарность.

Кроме того, в ряде мест внесены некоторые изменения и дополнения. Наиболее существенным из них является дополнение в главе шестой, посвященное преобразованию Лапласа обобщенных функций.

Новосибирск —
Москва, июль 1972 г.

Авторы.

Глава I

Основные понятия

В этой главе вводятся все основные понятия теории функций комплексного переменного: понятие функции, ее производной, интеграла и др. Читатель увидит, что обычные, известные из анализа функций действительного переменного определения этих понятий остаются почти без изменений, но их содержание меняется весьма существенным образом. Так, отпадает обычная геометрическая иллюстрация функции с помощью кривой на плоскости и на ее место становится понятие о функции как об отображении плоских множеств (п. 4). Условие дифференцируемости функции комплексного переменного оказывается значительно более жестким, чем условие дифференцируемости функции действительного переменного (п. 5). Например, из условия дифференцируемости в комплексной области автоматически вытекает существование производных всех порядков (п. 17) и целый ряд свойств функций, совершенно необычных для действительного анализа (пп. 14, 15 и др.).

Комплексными числами и функциями комплексного переменного математики пользовались в своих исследованиях уже в XVIII в. Особенно велики заслуги крупнейшего математика XVIII в. Леонарда Эйлера (1707—1783), который по праву считается одним из творцов теории функций комплексного переменного. В замечательных работах Эйлера детально изучены элементарные функции комплексного переменного, включая логарифм, показательную, тригонометрические и обратные тригонометрические функции (1740—1749), даны условия дифференцируемости *) (1755) и начала интегрального исчисления функций комплексного переменного (1777). Леонард Эйлер привел также многочисленные приложения функций комплексного переменного к различным математическим задачам

*) К этим условиям пришел в 1752 г. также Жан Даламбер (1717—1783), который исходил из гидродинамических соображений. Однако именно в работах Эйлера впервые выясняется общий характер условий дифференцируемости.

и положил начало применению их в гидродинамике (1755—1757) и картографии (1777).

После Эйлера открытые им результаты и методы развивались, совершенствовались и систематизировались, и в первой половине XIX в. теория функций комплексного переменного оформилась как важнейшая отрасль математического анализа. Основные заслуги здесь принадлежат Огюстену Коши (1789—1857) и Карлу Вейерштрассу (1815—1897), развившим интегральное исчисление и теорию представления функций рядами, а также Бернхарду Риману (1826—1866), обосновавшему геометрические вопросы теории функций и их приложения.

§ 1. Комплексные числа

Для удобства читателя мы изложим здесь основные определения и факты, относящиеся к понятию комплексных чисел, действиям с ними и их геометрической иллюстрации*).

1. Комплексные числа. *Комплексным числом* называется выражение вида $x+iy$, где x и y — действительные числа, а i — символ, который называется мнимой единицей. Числа x и y называются, соответственно, *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа $x+iy$ и обозначаются символами

$$x = \operatorname{Re}(x+iy), \quad y = \operatorname{Im}(x+iy). \tag{1}$$

Если, в частности, $y=0$, то $x+i0$ считается совпадающим с действительным числом x; если $x=0$, то $0+iy$ обозначается просто iy и называется *чисто мнимым*.

Определим на множестве комплексных чисел понятие равенства и простейшие операции. Будем говорить, что комплексные числа x_1+iy_1 и x_2+iy_2 *равны*,

$$x_1+iy_1 = x_2+iy_2, \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$, $y_1=y_2$.

Отметим еще, что если $x_2=x_1$, а $y_2=-y_1$, то комплексное число x_2+iy_2 называется *сопряженным* с x_1+iy_1 и

---

*) Первое упоминание о «мнимых» числах как о корнях квадратных из отрицательных чисел относится еще к XVI в. (Дж. Кардано, 1545). До середины XVIII в. комплексные числа появляются лишь эпизодически в трудах отдельных математиков (И. Ньютон, Н. Бернулли, А. Клеро). Первое изложение теории комплексных чисел на русском языке принадлежит Л. Эйлеру («Алгебра», Петербург, 1763, позднее книга была переведена на иностранные языки и многократно переиздавалась): символ «i» также введен Л. Эйлером. Геометрическая интерпретация комплексных чисел относится к концу XVIII в. (датчанин Каспар Вессель, 1799 г.).

обозначается символом $\overline{x_1 + iy_1}$. Таким образом,

$$\overline{x + iy} = x - iy. \tag{3}$$

Перейдем к определению операций над комплексными числами.

1) Сложение. *Суммой* $z_1 + z_2$ комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{4}$$

Из данного определения непосредственно вытекают следующие законы сложения:

а) *переместительный*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,

б) *сочетательный*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

Если z_1 и z_2 действительные числа (т. е. $y_1 = y_2 = 0$), то определение (4) совпадает с определением сложения для действительных чисел.

Сложение допускает обратную операцию: для любых двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ можно найти такое число z, что $z_2 + z = z_1$. Это число называется *разностью* чисел z_1 и z_2 и обозначается символом $z_1 - z_2$. Очевидно,

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \tag{5}$$

2) Умножение. *Произведением* $z_1 z_2$ комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число

$$z = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2). \tag{6}$$

Из определения вытекают следующие законы умножения:

а) *переместительный*: $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

б) *сочетательный*: $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;

в) *распределительный* (относительно сложения):

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Если z_1 и z_2 — действительные числа, то определение (6) совпадает с обычным. При $z_1 = z_2 = i$ из определения произведения следует:

$$i \cdot i = -1. \tag{7}$$

Легко заметить, что формула (6) получается при перемножении $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$ по обычным правилам алгебры и замене произведения $i \cdot i$ через -1. Отметим еще, что произведение комплексного числа $z = x + iy$ на сопряженное с ним всегда неотрицательно. В самом деле, из равенства (6) имеем:

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \geqslant 0. \tag{8}$$

Умножение также допускает обратную операцию, если только данный множитель не равен нулю. Пусть $z_2 \neq 0$, тогда можно найти такое число z, что $z_2 z = z_1$; для этого, согласно (6), надо решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_2 x - y_2 y &= x_1, \\ y_2 x + x_2 y &= y_1, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

которая при $z_2 \neq 0$ всегда однозначно разрешима, так как ее определитель $x_2^2 + y_2^2 > 0$. Это число z называется *частным* двух чисел z_1 и z_2 и обозначается символом z_1/z_2. Решая систему (9), получим:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{10}$$

Легко заметить, что (10) может быть получено умножением числителя и знаменателя дроби z_1/z_2 на $\bar{z}_2$.

3) Возведение в целую степень. Произведение n равных чисел z называется *n-й степенью* числа z и обозначается символом z^n:

$$z^n = \underbrace{z \ldots z}_{n \text{ раз}}. \tag{11}$$

Обратная операция — *извлечение корня* — определяется следующим образом: число w называется *корнем n-й* степени из числа z, если $w^n = z$ (обозначается символом $\sqrt[n]{z}$, причем для $n = 2$ пишут просто $\sqrt{z}$). Ниже мы увидим, что для всякого $z \neq 0$ корень $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных значений.

Равенство (7) мы можем теперь записать в виде $i^2 = -1$, и для мнимой единицы i имеем:

$$i = \sqrt{-1} \tag{12}$$

(здесь $\sqrt{-1}$ означает одно из двух его возможных значений).

2. Геометрическая иллюстрация. Рассмотрим плоскость декартовых координат xOy и условимся изображать комплексное число $z = x + iy$ точкой с координатами (x, y). При этом действительные числа будут изображаться точками оси x (которую в дальнейшем мы будем называть *действительной осью*), чисто мнимые — точками оси y (называемой *мнимой осью*). В частности, изображением числа i будет служить точка $(0, 1)$ мнимой оси.

Легко видеть, что и обратно, каждой точке плоскости xOy с координатами (x, y) будет таким способом поставлено в соответствие вполне определенное комплексное число $z = x + iy$, так что это соответствие между множеством всех комплексных чисел и всех точек плоскости взаимно однозначно. Поэтому в дальнейшем мы не будем различать понятия комплексного числа и точки плоскости и будем говорить, например, «точка $1+i$», «треугольник с вершинами z_1, z_2, z_3» и т. п.

Далее, каждой точке (x, y) соответствует вполне определенный вектор — радиус-вектор этой точки, а каждому радиусу-вектору, лежащему в плоскости, — вполне определенная точка — его конец (рис. 1). Поэтому мы будем в дальнейшем представлять комплексные числа также в виде радиусов векторов на плоскости.

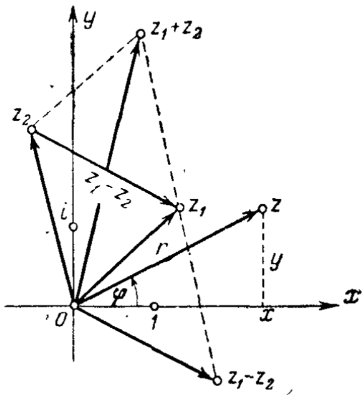

Рис. 1.

Из рис. 1 ясен геометрический смысл операций сложения и вычитания комплексных чисел: сумма и разность комплексных чисел z_1 и z_2 изображаются соответственно векторами, равными направленным диагоналям параллелограмма, построенного на векторах z_1 и z_2.

В дальнейшем, наряду с представлением комплексных чисел в декартовых координатах, полезно иметь их представление в полярных координатах. Для этого, как обычно, совмещаем полярную ось с положительной полуосью x, а полюс — с началом координат; тогда если обозначить через r полярный радиус и через φ полярный угол точки z (рис. 1), то будем иметь:

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1}$$

Полярный радиус r называется *модулем* комплексного числа z и обозначается символом $|z|$, угол φ — его *аргументом* и обозначается символом $\operatorname{Arg} z$. В то время как модуль комплексного числа определяется однозначно:

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geqslant 0, \tag{2}$$

аргумент определен лишь с точностью до любого слагаемого, кратного 2π:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2k\pi & (\text{I и IV квадранты}), \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi & (\text{II и III} \quad » \quad); \end{cases} \tag{3}$$

здесь arctg означает главное значение Arctg, т. е. значение, большее $-\pi/2$ и не превосходящее $\pi/2$, k — произвольное целое число. В дальнейшем наряду с символом Arg, обозначающим всю совокупность значений аргумента, мы будем употреблять символ arg, обозначая им одно какое-либо из значений Arg, в случае надобности специально оговаривая, какое именно значение берется (ср. п. 6).

Очевидны следующие неравенства (см. рис. 1):

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|;\quad |z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||. \tag{4}$$

Знаки равенства в (4) имеют место тогда и только тогда, когда $\operatorname{Arg} z_1=\operatorname{Arg} z_2$ или одно из чисел — нуль.

Из определения (6) предыдущего пункта следует, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. В самом деле, имеем:

$$z_1z_2=r_1r_2\{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\\+\sin\varphi_2\cos\varphi_1)\}=r_1r_2\{\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\}. \tag{5}$$

Отсюда следует, что при умножении комплексного числа z_1 на z_2 вектор z_1 растягивается в $|z_2|$ раз*) и, кроме того, поворачивается (против часовой стрелки) на угол $\arg z_2$. В частности, умножение комплексного числа z на i сводится к повороту (без растяжения) вектора z на прямой угол против часовой стрелки.

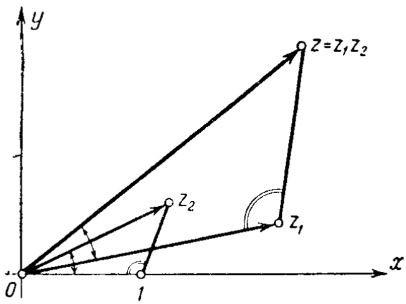

Рис. 2.

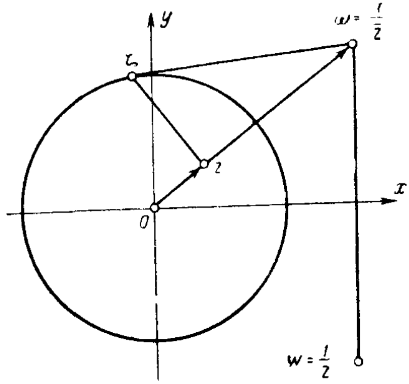

Рис. 3.

На рис. 2 изображено построение произведения $z=z_1z_2$: чтобы получить z, достаточно на отрезке Oz_1 как на основании построить треугольник Oz_1z, подобный треугольнику $O1z_2$.

Далее, деление комплексного числа z_1 на z_2 сводится к умножению z_1 на $1/z_2$, поэтому можно ограничиться выяснением геометрического смысла операции $w=1/z$. Пусть сначала $|z|<1$ (рис. 3).

*) Если $|z_2|<1$, то z_1 фактически сжимается в $1/|z_2|$ раз.

Восставим из точки z перпендикуляр к лучу Oz и через точку ζ пересечения перпендикуляра с окружностью $|z|=1$ проведем касательную к этой окружности. Для точки ω пересечения построенной касательной с лучом Oz имеем, очевидно,

$$\operatorname{Arg}\omega=\operatorname{Arg} z,$$

а из подобия прямоугольных треугольников $Oz\zeta$ и $O\zeta\omega$ имеем $\frac{|\omega|}{|\zeta|}=\frac{|\zeta|}{|z|}$, откуда

$$|\omega|=\frac{1}{|z|},$$

ибо $|\zeta|=1$. Таким образом, число ω является сопряженным с $1/z$, $\omega=1/\bar{z}$, и для получения точки $w=1/z$ остается построить точку, симметричную с ω относительно действительной оси.

Переход от точки z к точке

$$\omega=1/\bar{z}$$

называется *инверсией*, или *симметрией относительно единичной окружности* $|z|=1$. Таким образом, операция $w=1/z$ геометрически сводится к выполнению двух последовательных симметрий — инверсии и симметрии относительно действительной оси.

Если $|z|>1$, то описанные построения следует вести в обратном порядке; если $|z|=1$, то точка $\omega=1/\bar{z}$ совпадает с z и построение $w=1/z$ сводится к симметрии относительно действительной оси.

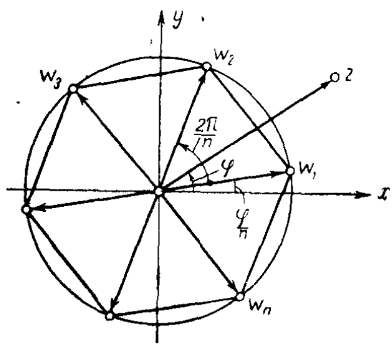

Рис. 4.

Геометрический смысл возведения в степень ясен из предыдущего. Для построения корней n-й степени из z заметим, что из определения корня и формулы (5) для $w=\sqrt[n]{z}$ имеем $|w|^n=|z|$, $n\arg w=\arg z$, и поэтому

$$|w|=\sqrt[n]{|z|},\quad \arg w=\frac{\arg z}{n}. \tag{6}$$

Первое из соотношений (6) показывает, что модули всех корней одинаковы, второе, — что их аргументы отличаются на кратное $2\pi/n$, ибо к значению $\arg z$ можно добавлять кратное 2π. Отсюда следует, что корень n-й степени из любого комплексного числа $z \neq 0$ имеет n различных значений и что эти значения располагаются в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (см. рис. 4, где $n = 6$).

§ 2. Функции комплексного переменного

В этом параграфе мы введем наиболее фундаментальные понятия теории функций комплексного переменного: понятие функции комплексного переменного, ее предела, производной и, наконец, понятие аналитической функции. Центральное место занимает здесь теорема п. 5, устанавливающая условия дифференцируемости функции комплексного переменного. Эти условия обычно называются *условиями Коши — Римана*, однако задолго до Коши и Римана они весьма существенно использовались в работах Даламбера и Эйлера (см. введение к этой главе).

3. Геометрические понятия. *Областью* на комплексной плоскости называют множество D точек, обладающее следующими свойствами: 1) вместе с каждой точкой из D этому множеству принадлежит и достаточно малый круг с центром в этой точке (*свойство открытости*), 2) любые две точки D можно соединить ломаной, состоящей из точек D (*свойство связности*).

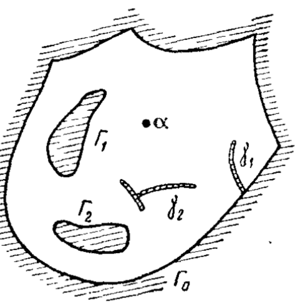

Рис. 5.

Простыми примерами областей могут служить окрестности точек на комплексной плоскости. Под *ε-окрестностью* точки a понимают открытый круг радиуса ε с центром в этой точке, т. е. совокупность точек z, удовлетворяющих неравенству

$$|z - a| < \varepsilon.$$

Граничной точкой области D называют такую точку, которая сама не принадлежит D, но в любой окрестности которой лежат точки этой области. Совокупность граничных точек области D называют *границей* этой области. Область D с присоединенной к ней границей обозначают символом $\bar{D}$ и называют *замкнутой областью*.

Мы будем предполагать, что граница области состоит из конечного числа замкнутых линий, разрезов и точек (мы не даем определения этих понятий; см. рис. 5, где граница области состоит из трех замкнутых линий Γ_0, Γ_1, Γ_2, двух разрезов γ_1, γ_2 и одной точки α). Линии и разрезы, входящие в со-