

И. Мещерский

**Динамика точки переменной
массы**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
И11

И11 **И. Мещерский**
Динамика точки переменной массы / И. Мещерский – М.: Книга по Требова-
нию, 2021. – 168 с.

ISBN 978-5-458-58158-5

ISBN 978-5-458-58158-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Предметъ разсужденія	стр. 1— 8
Очеркъ литературы по вопросу о движеніи тѣла переменнѣйшей массы.	9—18

ГЛАВА I.

Уравненія движенія твердаго тѣла переменнѣйшей массы. 19—49

§§	
1. Общая задача о движеніи тѣла переменнѣйшей массы	19
2. Опредѣленіе движенія твердаго тѣла, масса котораго измѣняется чрезъ извѣстные промежутки времени	20
3. Примѣръ: вертикальное движеніе аэростата при выбрасываніи балласта	21
4. Непрерывное измѣненіе массы тѣла	27
5. Уравненія движенія твердаго тѣла переменнѣйшей массы при отсутствіи ударовъ	28
6. Примѣръ	33
7. Уравненія поступательнаго движенія твердаго тѣла переменнѣйшей массы при существованіи ударовъ	36
8. Примѣры	40
9. Уравненія движенія центра инерціи тѣла при существованіи ударовъ	48
10. Задача о движеніи точки переменнѣйшей массы	48

ГЛАВА II.

§§

СТР.

Уравненія движенія точки перемѣнной массы и глав-
ныя ихъ слѣдствія 50—79

1. Измѣненіе массы точки 50

Случай, когда точка и измѣняющая масса имѣютъ
одинаковыя скорости.

2. Уравненія движенія свободной точки 51
3. Слѣдствія уравненій (4) 54
4. Уравненія движенія несвободной точки 59
5. Слѣдствія уравненій (8) и (9) 60

Случай, когда точка и измѣняющая масса имѣютъ
различныя скорости.

6. Уравненія движенія свободной точки 64
7. Уравненія движенія несвободной точки 65
8. Слѣдствія уравненій (14), (16) и (19) 68
9. Скорость измѣняющей массы равна нулю 70
10. Скорость измѣняющей массы направлена по одной прямой со ско-
ростью точки 74
11. Скорость измѣняющей массы направлена въ нормальной плоскости
траекторіи точки 77
12. Замѣчанія относительно общаго случая 78

ГЛАВА III.

Прямолинейное движеніе точки 80—88

1. Восходящее движеніе ракеты 80
2. Вертикальное движеніе аэростата 82
3. Тяжелая точка массы $m = m_0(1+\alpha t)^2$ при сопротивленіи, пропор-
ціональномъ квадрату скорости 85

ГЛАВА IV.

Малыя колебанія кругового маятника 89—94

1. Круговой маятникъ въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціо-
нально скорости 89
2. Случай, гдѣ сопротивленіе среды, рассчитанное на единицу массы
при единицѣ скорости, равно $\frac{a}{1+\alpha t}$ 94

ГЛАВА V.

СТР.

Обратныя задачи 95—118

I. Скорость измѣняющей массы равна скорости точки.

- | | |
|--|-----|
| 1. Траекторія точки въ сопротивляющейся средѣ при данныхъ силахъ данная плоская кривая | 96 |
| 2. Случай тяжелой точки | 98 |
| 3. Тяжелая точка въ сопротивляющейся средѣ описываетъ параболу. | 100 |
| 4. Задачи § 2 и § 3 въ предположеніи, что ось <i>Oy</i> не совпадаетъ съ направленіемъ силы тяжести | 104 |
| 5. Тяжелая точка въ средѣ постоянной плотности при сопротивленіи пропорціональномъ <i>n</i> -ой степени скорости | 106 |
| 6. Двѣ задачи о параболическомъ движеніи центра тяжелаго однороднаго шара въ воздухѣ | 108 |

II. Скорость измѣняющей массы равна нулю.

- | | |
|---|-----|
| 7. Связь между случаями I и II | 112 |
| 8. Тяжелая точка описываетъ данную плоскую кривую, въ частности, параболу | 113 |

III. Скорость измѣняющей массы направлена по одной прямой со скоростью точки.

- | | |
|---|-----|
| 9. Связь между случаями II и III. | 117 |
|---|-----|

ГЛАВА VI.

Движеніе тяжелой точки 119—135

- | | |
|--|-----|
| 1. Уравненія движенія. Случай, когда геометрическая разность скоростей измѣняющей массы и точки постоянна по величинѣ и направленію | 119 |
| 2. Сопротивленіе среды, разсчитанное на единицу массы при единичѣ скорости, функція длины пути. Скорость измѣняющей массы равна скорости точки | 123 |
| 3. Частный случай: сопротивленіе среды, разсчитанное на единицу массы при единичѣ скорости, равно $\frac{1}{a+bs}$ | 126 |
| 4. Скорость измѣняющей массы равна нулю | 131 |
| 5. Скорости измѣняющей массы и точки направлены по одной прямой | 133 |

ГЛАВА VII.

§§

стр.

Движеніе точки при дѣйствиі центральной силы. 136—157

1. Уравненія движенія и слѣдствія ихъ. 136
2. Введеніе въ уравненія движенія точки нѣкоторыхъ новыхъ переменныхъ. 141
3. Примѣръ, въ которомъ скорость измѣняющей массы равна нулю
и $m = \frac{m_0}{1 - at}$ 142
4. Задача § 3 при $a < 0$ 149
5. Случай, въ которомъ задача о движеніи точки переменной массы
при $F = kmr^n$ приводится къ задачѣ о движеніи точки постоянной массы при дѣйствиі той же силы. 150
6. Случай, когда въ соответствующей задачѣ о движеніи точки постоянной массы присоединяется сила пропорціональная разстоянію 153
7. Два примѣра, въ которыхъ скорость измѣняющей массы не равна нулю. 155

Приложеніе.

Опредѣленія массы, встрѣчающіяся въ нѣкоторыхъ
сочиненіяхъ по механикѣ 158—160

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр.	2 строка 25	Напечатано: предположенія	Слѣдовало напечатать: предложенія
» 16	» 28	$\frac{\partial \xi}{\partial t}$	$\frac{d\xi}{dt}$
» 30	» 6	замѣтимъ	замѣтимъ,
» »	» 7	вытекаетъ	вытекаетъ также и
» 35	» 17	$\int_{t_0}^{t'}$	$\int_{t_0}^t$

Предметъ разсужденія.

1. Въ механикѣ масса движущагося тѣла разсматривается обыкновенно какъ величина постоянная; между тѣмъ существуютъ случаи движенья, гдѣ масса тѣла измѣняется.

Такіе случаи намъ представляетъ сама природа: масса земли возрастаетъ вслѣдствіе паденья на нее метеоритовъ; масса метеорита, движущагося въ атмосферѣ, убываетъ вслѣдствіе того, что нѣкоторыя частицы его или отрываются, или сгораютъ; масса падающей градины или снѣжинки возрастаетъ въ тѣхъ частяхъ пути, гдѣ на нее осѣдаютъ пары изъ окружающей атмосферы, и убываетъ вслѣдствіе испаренья тамъ, гдѣ она проходитъ чрезъ слои воздуха болѣе теплые и болѣе сухіе; плавающая льдина представляетъ примѣръ, гдѣ масса возрастаетъ вслѣдствіе намерзанія и убываетъ вслѣдствіе таянія, и т. д.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ измѣненіе массы вызывается искусственно: убываетъ масса летящей ракеты вслѣдствіе сгоранія; убываетъ масса аэростата при выбрасываніи балласта; возрастаетъ масса привязного аэростата, когда онъ, поднимаясь, вытягиваетъ за собою канатъ; возрастаетъ масса корабля при нагрузкѣ и убываетъ при разгрузкѣ, и т. д.

Вообще, если тѣло находится въ воздухѣ, масса его можетъ возрастать вслѣдствіе осѣданія пыли и паровъ, вслѣдствіе присоединенія частицъ другихъ тѣлъ, съ которыми оно приходитъ въ соприкосновеніе; — масса можетъ убывать вслѣдствіе сгоранія, испаренья, распыленія.

Если тѣло находится въ жидкости, его масса можетъ возрастать вслѣдствіе осѣданія на поверхности нѣкоторыхъ частицъ изъ этой жидкости, вслѣдствіе намерзанія, — можетъ убывать вслѣдствіе размыванія тѣла жидкостью, вслѣдствіе растворенія или таянія.

Существованіе вышеуказанныхъ случаевъ представляетъ достаточное основаніе для того, чтобы заняться изученіемъ тѣхъ вопросовъ, которые относятся къ движенію тѣлъ перемѣнной массы.

Замѣтимъ, что, разсматривая массу тѣла, какъ величину перемѣнную, мы нисколько не противорѣчимъ тѣмъ опредѣленіямъ массы тѣла, которыя приняты въ механикѣ, будетъ ли это опредѣленіе Ньютона: „*quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim. hanc autem quantitatem sub nomine corporis vel massae in sequentibus passim intelligo*“ („*Philosophiae naturalis principia mathematica*“. Definitio I), или опредѣленіе, напримѣръ, Герца въ его „*Die Principien der Mechanik*“*); — то и другое опредѣленіе допускаютъ измѣняемость массы тѣла.

2. При измѣненіи массы тѣло, вообще говоря, испытываетъ удары; простѣйшій случай представляется при этомъ тогда, когда удары не оказываютъ вліянія на движеніе тѣла или совершенно отсутствуютъ, какъ, напримѣръ, въ случаѣ аеростата, если балластъ пускается съ относительною скоростью, равною нулю; поэтому естественно было, приступая къ разсмотрѣнію движенія тѣла при измѣненіи массы, начать именно съ того случая, когда дѣйствіе ударовъ на тѣло въ расчеты не входитъ.

Нѣкоторыя общія предположенія, относящіяся къ этому случаю, были изложены мною въ засѣданіи С.-Петербургскаго Математическаго Общества 15-го января 1893 г.; въ своемъ сообщеніи, обращая затѣмъ особенное вниманіе на тотъ случай, когда массы точекъ системы измѣняются по одному и тому же закону въ зависимости отъ времени, я указалъ, какъ примѣръ, задачу и тѣлъ при измѣненіи массъ и, въ частности, задачу двухъ тѣлъ, когда она допускаетъ рѣшеніе въ конечномъ видѣ.

*) «*Gesammelte Werke von Heinrich Hertz*», 1894, Bd. III, Abschnitt 1, S. 54.

При дальнѣйшей разработкѣ вопроса, принимая уже въ расчетъ и удары, я разсматривалъ главнымъ образомъ задачи, соответствующія важнѣйшимъ задачамъ динамики постоянныхъ массъ, и пришелъ какъ въ случаѣ одной точки, такъ въ случаѣ системы точекъ и, въ частности, твердаго тѣла, къ ряду задачъ, которыя, не смотря на ихъ большую, сравнительно, сложность, допускаютъ тѣмъ не менѣе рѣшеніе въ квадратурахъ.

Въ настоящемъ разсужденіи изложены тѣ изслѣдованія, которыя относятся къ движенію точки перемѣнной массы.

3. „Очеркъ литературы“ содержитъ все то, что мнѣ удалось найти въ литературѣ относительно вліянія измѣненія массы тѣла на движеніе.

Такъ какъ измѣненіе массы мы наблюдаемъ только въ случаѣ тѣлъ конечныхъ размѣровъ, то, чтобъ имѣть основаніе для изученія движенія точки перемѣнной массы, нужно прежде всего показать, что задача о движеніи тѣла перемѣнной массы можетъ привести насъ къ соответствующей задачѣ о движеніи точки перемѣнной массы; поэтому въ главѣ I и говорится о движеніи тѣла перемѣнной массы.

Установивши, какъ именно мы будемъ разсматривать измѣненіе массы движущагося тѣла, мы занимаемся сначала движеніемъ тѣла, масса котораго измѣняется чрезъ извѣстные промежутки времени; примѣромъ служитъ вертикальное движеніе аэростата при выбрасываніи балласта.

Затѣмъ переходимъ къ случаю непрерывнаго измѣненія массы, который только далѣе и разсматриваемъ.

Полагая, что масса твердаго тѣла и величины, отъ нея зависящія, суть непрерывныя функціи времени, положенія тѣла, его поступательной и угловой скорости, а также длины путей, пройденныхъ нѣкоторыми точками тѣла, мы получаемъ для движенія твердаго тѣла перемѣнной массы при отсутствіи ударовъ дифференціальныя уравненія, отнесенныя къ осямъ, связаннымъ съ тѣломъ; эти уравненія имѣютъ тотъ же видъ, что и для движенія тѣла постоянной массы.

Затѣмъ переходимъ къ случаю, когда принимаются въ расчетъ удары; дѣйствіе этихъ ударовъ на тѣло можно замѣнить дѣйствіемъ нѣкоторой системы непрерывно дѣйствующихъ силъ, которыя называемъ прибавочными.

Опредѣляемъ проекціи прибавочной силы въ случаѣ поступательнаго движенія тѣла и при томъ только тогда, когда масса тѣла не зависитъ отъ его скорости, — въ общемъ случаѣ примѣняемый методъ не имѣетъ мѣста.

Для того, чтобъ убѣдиться на примѣрахъ въ томъ, что полученные дифференціальныя уравненія выражаютъ рассматриваемое движеніе, приведены двѣ задачи относительно вертикальнаго движенія тяжелаго однороднаго цилиндра и двѣ задачи A. Cayley.

Полученныя дифференціальныя уравненія могутъ быть рассматриваемы, какъ уравненія движенія точки перемѣнной массы.

Далѣе замѣчаемъ, что масса тѣла можетъ измѣняться такимъ образомъ, что центръ инерціи сохраняетъ свое положеніе относительно тѣла; въ этомъ случаѣ получаются дифференціальныя уравненія того же вида, что и въ случаѣ движенія поступательнаго; эти уравненія также могутъ быть рассматриваемы въ нѣкоторыхъ случаяхъ, какъ уравненія движенія точки перемѣнной массы.

Мы переходимъ затѣмъ къ движенію точки, масса которой измѣняется.

Въ главѣ II, замѣтивши, что рѣшеніе задачи о движеніи точки при измѣненіи массы чрезъ извѣстные промежутки времени приводится къ послѣдовательному рѣшенію ряда задачъ о движеніи точки постоянной массы, мы далѣе рассматриваемъ въ общемъ видѣ тотъ случай, когда масса точки измѣняется непрерывно.

Беремъ сначала случай, когда скорость измѣняющей массы равна скорости точки.

Предполагая, что масса точки выражается нѣкоторой функціей времени, положенія и скорости точки, а также длины пути, ею пройденнаго, мы получаемъ, не пользуясь выведенными уже уравненіями движенія тѣла, дифференціальныя уравненія движенія какъ свобод-

ной, такъ и несвободной точки; эти уравненія имѣютъ тотъ же видъ, что и для точки постоянной массы; отсюда слѣдуетъ предложеніе, которое позволяетъ отъ общихъ формулъ динамики точки постоянной массы перейти къ соотвѣтствующимъ формуламъ динамики точки перемѣнной массы, если при измѣненіи массы не происходитъ ударовъ; указываемъ нѣкоторые предложенія, относящіеся къ количеству движенія и живой силѣ точки, къ уравненіямъ движенія въ какихъ угодно координатахъ и т. д.

Обращаясь затѣмъ къ случаю, когда скорость измѣняющей массы не равна скорости точки, выводимъ дифференціальныя уравненія движенія какъ свободной, такъ и несвободной точки въ предположеніи, что масса точки не зависитъ отъ ея скорости; полученныя уравненія отличаются отъ соотвѣтствующихъ уравненій въ случаѣ точки постоянной массы только тѣмъ, что къ задаваемымъ силамъ присоединяется прибавочная сила, проекціи которой на координатныя оси выражаются извѣстнымъ образомъ.

Далѣе разсматриваемъ слѣдствія, вытекающія изъ выведенныхъ уравненій при различныхъ предположеніяхъ относительно скорости измѣняющей массы, а также нѣкоторые преобразованія этихъ уравненій и случаи, въ которыхъ точка перемѣнной массы описываетъ геодезическую линію на данной поверхности.

Замѣтимъ, что въ дифференціальныя уравненія движенія точки перемѣнной массы, вообще говоря, входитъ длина пути, пройденнаго точкой, — обстоятельство, которое не встрѣчается въ случаѣ точки постоянной массы.

Остальныя пять главъ III—VII посвящены рѣшенію различныхъ задачъ о движеніи точки перемѣнной массы.

При выборѣ задачъ имѣлось въ виду удовлетворить слѣдующимъ требованіямъ:

- 1) задачи должны служить для выясненія того вліянія, которое измѣненіе массы точки въ различныхъ случаяхъ оказываетъ на ея движеніе;
- 2) силы, приложенныя къ точкѣ, должны принадлежать къ числу тѣхъ, которыми обыкновенно пользуются при объясненіи движеній,

наблюдаемыхъ въ природѣ,—каковы: сила тяжести, сила притяженія по закону Ньютона, сопротивленіе среды, пропорціональное квадрату скорости и т. д.;

3) рѣшеніе задачи должно приводиться къ квадратурамъ и, въ крайнемъ случаѣ, къ интегрированію уравненій уже изученныхъ, каковы, напримѣръ, уравненія Риккати и Бесселя; это требованіе соответствуетъ извѣстному мнѣнію Якоби: „*quo majores in genere difficultates parit integratio aequationum differentialium dynamica-rum, eo majore cura ea examinare debemus problemata mechanica, in quibus integrationem ad quadraturas perducere contigit*“. (Jacobi. „*De motu puncti singularis*“. Crelle's Journal, Bd. 24, S. 5. 1842; Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 265).

Глава III содержитъ задачи о прямолинейномъ движеніи точки перемѣнной массы и прежде всего тѣ, къ которымъ мы приходимъ, разсматривая вертикальное движеніе горячей ракеты и привязанного аеростата; затѣмъ вкратцѣ указанъ случай свободнаго аеростата, масса котораго выражается нѣкоторой функціей разстоянія его отъ земли, и далѣе рѣшается задача о движеніи тяжелой точки массы $m = m_0 (1 + \alpha t)^a$ при сопротивленіи среды, пропорціональномъ квадрату скорости.

Въ главѣ IV разсматривается задача о криволинейномъ движеніи точки въ случаѣ, когда оно выражается такъ же, какъ и прямолинейное, однимъ дифференціальнымъ уравненіемъ 2-го порядка, именно задача о малыхъ колебаніяхъ круговаго маятника въ средѣ, сопротивленіе которой пропорціонально скорости; въ случаѣ, когда сопротивленіе среды, рассчитанное на единицу массы при единицѣ скорости, равно $a(1 + \alpha t)^{-1}$, гдѣ a и α величины постоянныя, рѣшеніе задачи выражается чрезъ функціи Бесселя.

Переходя затѣмъ къ задачамъ о криволинейномъ движеніи свободной точки, мы прежде всего останавливаемся на задачахъ обратныхъ, которыя и составляютъ предметъ главы V.

Въ этихъ задачахъ требуется опредѣлить законъ измѣненія массы