В.Ф. Коган

Основание теории определителей

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
В11

В.Ф. Коган
В11 Основание теории определителей / В.Ф. Коган – М.: Книга по Требованию, 2022. – 530 с.

ISBN 978-5-458-34272-8

Настоящее руководство представляет собою обработанные для печати лекции, которые я в течение продолжительного ряда лет читал студентам математикам. Я начинал преподавание теории определителей с элементарного курса, который читал начинающим студентам на первом семестре; я возвращался затем к этому предмету в курсе высшей алгебры, а при чтении интегрирования дифферециальных уравнений я излагал довольно обстоятельно учение о функциональных определителях. Студенты получали, таким образом, в течение всего курса довольно обстоятельные сведения об этой дисциплине, применения которой в настоящее время нашли себе место во всех без исключения отраслях математики.

ISBN 978-5-458-34272-8

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

срослась, на которых она зародилась и в связи с которыми она росла; это учение о линейных уравнениях и теория форм. В тесной связи с этими основными вопросами теория определителей и развивается в настоящем сочинении. Однако, все учение о формах и линейных их преобразованиях изложено таким образом, чтобы читатель мог при первом чтении его опустить. Вообще при первом чтении настоящего сочинения целесообразнее всего, проштудировать главы I, II, IV—VI, VII (§§ 35 и 36), VIII, IX (§§ 45, 46 и 49) и X (§§ 51 и 52). К остальным главам читатель будет обращаться по мере того, как к этому у него встретится надобность.

Книга содержит большое число задач. Одни из них представляют собою просто примеры и упражнения для усвоения теории; другие требуют вдумчивого размышления и, как все математические задачи, служат для углубления приобретенных знаний и для развития сообразительности, самостоятельной математической мысли. Многие из этих последних задач представляют собою вопросы, которые могли бы найти себе место и в тексте, и таким образом значительно расширяют содержащийся в книге материал.

Большой труд, которого потребовала разработка настоящего руководства, был мне значительно облегчен профессором Ю. Г. Рабиновичем, внимательно прочитавшим всю рукопись и давшим мне много полезных указаний. Многим я обязан также своим ученикам, тщательно читавшим корректуру А. Лизаревичу, Л. Туманову и, особенно, студенту Г. Гильо, внимательно прочитавшему решения всех задач и составившему к книге указатель. Не могу, наконец, не указать, что сложный набор этого большого сочинения был выполнен одним наборщиком, Н. Столяром, вкладывавшим в это дело труд, доходивший до самоотверженности. Приношу свою глубокую благодарность и коллеге, уделившему книге столько внимание, и студентам, тщательно проверявшим каждую формулу, и труженику печатного станка, которому книга обязана своим появлением в свет. Читателя же прошу не поставить нам в вину, если все мы все таки допустили те или иные дефекты; за их указание буду очень признателен.

Одесса, Июнь 1922. *В. Ф. Каган.*

Указания относительно принятых обозначений.

Ссылки в настоящем сочинении отмечались следующим образом. Ссылки на рубрики и формулы, содержащиеся в том же параграфе, отмечены номером рубрики или формулы: цифра без скобок означает номер рубрики, цифра в скобках номер формулы. Если же ссылка относится к другому параграфу, то жирным шрифтом отмечен номер параграфа, к которому она относится. Таким образом ссылка **24**,3 означает: 3-ья рубрика 24-го параграфа; ссылка **32**,(4) означает: формула (4) в § 32.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стр.

Глава VI. Начала общей теоріи опредѣлителей.

Глава VII. Вычисленіе опредѣлителей.

Глава VIII. Рѣшеніе и изслѣдованіе системы линейныхъ уравненій.

Глава IX. Умноженіе опредѣлителей.

Глава X. Разложеніе Лапласа.

Глава XI. Начала общей теоріи линейныхъ и квадратичныхъ формъ.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Ученіе о детерминантахъ, или опредѣлителяхъ, возникло въ связи съ рѣшеніемъ системы совокупныхъ линейныхъ уравненій, т.-е. уравненій первой степени. Задача заключалась въ томъ, чтобы дать общія выраженія для значеній неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ заданной системѣ линейныхъ уравненій.

Если мы напишемъ два линейныхъ уравненія съ двумя неизвѣстными въ общемъ видѣ:

$$a_1x+b_1y=c_1,\quad a_2x+b_2y=c_2 \tag{1}$$

и будемъ ихъ разрѣшать общеизвѣстными пріемами, т.-е. путемъ исключенія одного изъ неизвѣстныхъ, то значенія для неизвѣстныхъ представятся въ слѣдующемъ видѣ:

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \tag{2}$$

Это суть дробныя выраженія, имѣющія общій знаменатель. Какъ мы видимъ, знаменатель этотъ составленъ изъ коэффиціентовъ нашихъ уравненій; именно, онъ состоитъ изъ двухъ членовъ, каждый изъ которыхъ представляетъ собою произведеніе двухъ коэффиціентовъ, заимствованныхъ одинъ изъ одного уравненія, другой изъ второго. Числитель же образуется изъ знаменателя по очень простому правилу: чтобы получить числитель выраженія для неизвѣстнаго x, нужно въ общемъ знаменателѣ коэффиціенты a_1 и a_2 при этомъ неизвѣстномъ замѣнить соотвѣтствующими свободными членами c_1 и c_2; точно такъ же, чтобы получить числитель выраженія для y, надо коэффиціенты при y b_1 и b_2 замѣнить соотвѣтствующими свободными членами c_1 и c_2. Ниже мы выраженія (2) подробно изслѣдуемъ и убѣдимся, что во всѣхъ случаяхъ, когда они имѣютъ опредѣленныя значенія, т.-е. когда общій ихъ знаменатель отличенъ отъ нуля, они удовлетворяютъ уравненіямъ (1) и при этомъ представляютъ собой единственныя значенія неизвѣстныхъ, которыя уравненіямъ (1) удовлетворяютъ.

Если обратимся къ системѣ трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными, написанныхъ въ общемъ видѣ, и разрѣшимъ ихъ такимъ же образомъ, т.-е. путемъ исключенія, то значенія для неизвѣстныхъ также представятся въ видѣ дробныхъ выраженій, имѣющихъ общій знаменатель. Но теперь числители и знаменатель оказываются уже значительно сложнѣе: каждый изъ нихъ содержитъ 6 членовъ. Числитель въ каждомъ выраженіи получается изъ знаменателя по тому же правилу: путемъ замѣщенія коэффиціентовъ этого неизвѣстнаго соотвѣтственными свободными членами. Каждый же членъ знаменателя представляетъ собой произведеніе трехъ коэффиціентовъ, заимствованныхъ изъ различныхъ уравненій.

Съ увеличеніемъ числа уравненій и неизвѣстныхъ дроби, выражающія ихъ значенія, чрезвычайно быстро усложняются: въ случаѣ четырехъ уравненій съ четырьмя неизвѣстными числители и знаменатель содержатъ каждый по 24 члена, въ случаѣ пяти уравненій съ пятью неизвѣстными они содержатъ по 120 членовъ, въ случаѣ шести уравненій съ шестью неизвѣстными по 720 членовъ, и т. д. Однако, правило образованія числителей изъ знаменателя остается то же: коэффиціенты опредѣляемаго неизвѣстнаго замѣщаются свободными членами.

2. Такимъ образомъ ясно, что сущность задачи установленія общихъ выраженій, удовлетворяющихъ опредѣленной системѣ линейныхъ уравненій, заключается въ составленіи общаго знаменателя этихъ выраженій. Непосредственное вычисленіе этихъ выраженій, вслѣдствіе ихъ громоздкости, чрезвычайно затруднительно уже въ случаѣ пяти уравненій; при дальнѣйшемъ увеличеніи числа уравненій оно становится мало выполнимымъ. Къ тому же при сложности этихъ выраженій они мало пригодны не только для непосредственныхъ вычисленій, но и для общихъ изслѣдованій. Отсюда естественно возникло стремленіе найти о б щ і й з а к о н ъ составленія этихъ выраженій, который давалъ бы какъ практическія средства для ихъ вычисленія, такъ и способы для теоретическаго изслѣдованія ихъ.

Первымъ, которому удалось этотъ законъ найти, былъ Л е й б н и ц ъ (G. W. Leibnitz). Въ письмѣ къ своему другу Д е л о п и т а л ю (de l'Hospital) отъ 28 апрѣля 1693 года онъ сообщаетъ послѣднему, что онъ придумалъ особый способъ обозначенія коэффиціентовъ уравненій, благодаря чему онъ имѣетъ возможность дать простое правило для составленія выраженій, къ которымъ приводитъ исключеніе неизвѣстныхъ изъ этихъ уравненій. Этотъ способъ обозначенія заключается въ томъ, что каждый коэффиціентъ онъ обозначаетъ не той или иной буквой, а двумя числами (индексами), изъ которыхъ первое показываетъ номеръ уравненія, въ которомъ коэффиціентъ находится, а второе — номеръ неизвѣстнаго, при которомъ онъ стоитъ. Такимъ образомъ, напримѣръ, коэффиціентъ при третьемъ неизвѣстномъ во второмъ уравненіи, слѣдуя этому правилу, нужно обозначить такъ: (2,3)*). Въ этомъ обозначеніи лѣвыя части уравненій (1) и общій знаменатель выраженій (2) представятся въ такомъ видѣ:

$$(1,1)x+(1,2)y;\quad (2,1)x+(2,2)y;\quad (3)\quad \text{и}\quad (1,1)(2,2)-(2,1)(1,2).\quad (4)$$

То обстоятельство, что Л е й б н и ц ъ начинаетъ съ особаго обозначенія для коэффиціентовъ уравненій, не случайное: оно играетъ существенную роль въ дѣлѣ составленія выраженій, о которыхъ идетъ рѣчь: всѣ дальнѣйшія модификаціи правила Л е й б н и ц а для составленія этихъ выраженій такъ или иначе связаны съ опредѣленнымъ обозначеніемъ этихъ коэффиціентовъ. Заслуга Л е й б н и ц а заключается, такимъ образомъ, въ томъ, что онъ во-первыхъ, установилъ особый способъ обозначенія коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ въ уравненіяхъ, — во-вторыхъ, показалъ, какъ изъ этихъ коэффиціентовъ составляются отдѣльные члены общаго знаменателя въ выраженіяхъ для неизвѣстныхъ, — въ третьихъ далъ правило, которымъ опредѣляется знакъ каждаго члена.

---

*) Л е й б н и ц ъ обозначаетъ этотъ коэффиціентъ даже просто символомъ 23 но предупреждаетъ, что это не число двадцать три.

Этому своему открытію Лейбницъ придавалъ большое значеніе. Въ послѣдующихъ письмахъ къ Делопиталю*) Лейбницъ неоднократно къ нему возвращается. „На мой взглядъ“, говоритъ онъ въ VIII-мъ письмѣ, „это одно изъ лучшихъ открытій въ анализѣ“. При всемъ томъ открытіе Лейбница осталось совершенно неизвѣстнымъ современнымъ ему математикамъ, такъ какъ онъ его не опубликовалъ. Свой методъ обозначенія коэффиціентовъ онъ, правда, указалъ въ статьѣ, опубликованной въ 1700 г. въ Лейпцигскомъ журналѣ „Acta Eruditorum“; но примѣненія ихъ онъ не сообщилъ. Переписка же Лейбница съ Делопиталемъ была опубликована только въ 1850 г.

3. Въ 1750 г. профессоръ математики въ Женевѣ Крамеръ (H. Cramer) опубликовалъ работу по теоріи алгебраическихъ кривыхъ**). Въ особомъ приложеніи къ этой работѣ онъ даетъ законъ составленія общаго знаменателя и числителей тѣхъ дробей, которыми выражаются значенія неизвѣстныхъ опредѣленной системы линейныхъ уравненій. Онъ также вводитъ своеобразное обозначеніе коэффиціентовъ уравненій и, пользуясь этимъ обозначеніемъ, даетъ правило составленія членовъ общаго знаменателя, правило знаковъ и правило образованія числителя изъ знаменателя.

На этотъ разъ открытіе не только скоро обратило на себя вниманіе, но даже черезъ короткое время проникло въ школы. Во Франціи во второй половинѣ XVIII столѣтія государственные экзамены по алгебрѣ вращались почти исключительно вокругъ правила Крамера.

4. Какъ указано выше, Крамеръ не занимался теоріей рѣшенія системы совокупныхъ уравненій спеціально; онъ удѣлялъ ей вниманіе попутно при изученіи алгебраическихъ кривыхъ; самое рѣшеніе онъ изложилъ въ небольшомъ приложеніи къ своей работѣ. Когда идеи эти стали получать распространеніе, французскій математикъ Вандермондъ (A. Th. Vandermonde) первый занялся этимъ предметомъ спеціально. Въ мемуарѣ, доложенномъ французской Академіи Наукъ въ январѣ 1771 г. и опубликованномъ въ слѣдующемъ году***), Вандермондъ строитъ небольшую, но цѣльную теорію этихъ замѣчательныхъ выраженій, открытыхъ Крамеромъ и служащихъ для рѣшенія линейныхъ уравненій. Лейбницъ и Крамеръ начинали съ установленія особыхъ обозначеній для коэффиціентовъ уравненій, т.-е. для элементовъ, изъ которыхъ интересовавшія ихъ выраженія составляются; Вандермондъ первый вводитъ спеціальное схематическое обозначеніе для самыхъ этихъ выраженій. Обозначеніе это было позже замѣнено болѣе цѣлесообразнымъ, но сыграло свою роль. Далѣе Вандермондъ даетъ правило послѣдовательнаго (рекуррентнаго) вычисленія этихъ выраженій, т.-е. правило для составленія общаго знаменателя выраженій, разрѣшающихъ систему n линейныхъ уравненій съ n неизвѣстными, если составлены выраженія, служащія для разрѣшенія $(n-1)$ уравненій съ $(n-1)$ неизвѣстными. Онъ устанавливаетъ правило вычисленія всѣхъ членовъ этихъ выраженій по данному одному изъ нихъ и правило знаковъ, обнаруживаетъ, что каждое такое выраженіе имѣетъ

---

*) Переписку Лейбница съ Делопиталемъ можно найти въ полномъ собраніи сочиненій Лейбница, изд. Гергардтомъ: «Leibnizens mathematische Schriften», herausgegeben von C. I. Gerhardt. I Abtheilung, 2 Bd. Berlin, 1850. См. письма IV, VIII, XI, XII, XIII. «Leibniz» новая транскрипція фамиліи «Leibnitz».

**) H. Cramer. «Introduction à l'Analyse des Lignes Courbes algébriques» Genève, 1750.

***) A. Vandermonde. «Mémoire sur l'élimination». Histoire de l'Académie Royale des Sciences. 1772.

столько же положительныхъ, сколько и отрицательныхъ членовъ; онъ показываетъ, что выраженіе, служащее общимъ знаменателемъ въ системѣ рѣшеній совокупныхъ линейныхъ уравненій, всегда обращается въ нуль, если коэффиціенты одного изъ уравненій соотвѣтственно равны коэффиціентамъ какого либо другого уравненія, и выводитъ нѣкоторыя другія чрезвычайно замѣчательныя ихъ свойства; наконецъ, Вандермондъ подробно останавливается на примѣненіи этихъ выраженій къ исключенію неизвѣстныхъ изъ системы линейныхъ уравненій и къ рѣшенію ихъ.

Вандермондъ, такимъ образомъ, положилъ начало особой теоріи, въ ту пору еще небольшой, но вполнѣ цѣльной, которая позднѣе получила наименованіе **теоріи опредѣлителей**.

5. Время, къ которому относятся эти замѣчательныя изслѣдованія, было эпохой дѣятельности величайшихъ математиковъ, эпохой вдохновеннаго математическаго творчества. Замѣчательными выраженіями, открытыми Крамеромъ и разработанными Вандермондомъ, воспользовались Лапласъ (P. S. Laplace), Лагранжъ (J. L. Lagrange), Безу (E. Bézout), Гауссъ (C. F. Gauss), Монжъ (G. Monge), Вронскій (K. Wronski) и другіе. Они примѣняли методъ Крамера-Вандермонда уже не въ общемъ видѣ, а въ приложеніяхъ къ частнымъ вопросамъ и показали, что эти замѣчательныя алгебраическія выраженія весьма полезны въ различныхъ отрасляхъ изслѣдованія и даютъ возможность выразить результаты этихъ изслѣдованій въ чрезвычайно изящной формѣ. Лапласъ ими пользуется въ небесной механикѣ, Лагранжъ — въ теоріи вращательнаго движенія, Безу — въ общей теоріи алгебраическихъ уравненій, Монжъ — въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ. Появленіе этихъ выраженій въ работахъ столь выдающихся геометровъ естественно содѣйствовало значительному ихъ распространенію въ математической литературѣ.

Особенно замѣчательно примѣненіе, которое выраженія Крамера-Вандермонда получаютъ у Гаусса. Въ своихъ знаменитыхъ „Ариометическихъ изслѣдованіяхъ" *) въ 4 ой главѣ Гауссъ обращается къ изслѣдованію формъ, т.-е. цѣлыхъ однородныхъ алгебраическихъ функцій отъ нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ, и неопредѣленныхъ уравненій, которыя получаемъ, приравнивая эти формы нулю. Свойства **квадратичныхъ** формъ (т.-е. формъ второй степени) въ значительной мѣрѣ характеризуются значеніями одного или нѣсколькихъ выраженій, которыя составляются изъ коэффиціентовъ формы по тому же закону, что и выраженія Крамера-Вандермонда. Руководствуясь этимъ, Гауссъ называетъ эти выраженія **детерминантами**; по русски этотъ терминъ переведенъ словомъ **опредѣлители**. Наименованіе это было затѣмъ принято Коши и получило всеобщее распространеніе; дисциплина, посвященная изученію этихъ замѣчательныхъ выраженій, получила названіе **теоріи опредѣлителей**.

6. Въ 1812 г. теорія опредѣлителей вступаетъ въ новую фазу своего развитія, благодаря работамъ двухъ чрезвычайно выдающихся французскихъ геометровъ Бинe (J. Binet) и Коши (A. L. Cauchy) **). Оба геометра

---

*) C. F. Gauss. «Disquisitiones Arithmeticae». Leipzig, 1801.

**) J Binet. «Mémoire sur un Système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques». Journal de l'École Polytechnique. Cah. 16.

A. Cauchy. «Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions opérées entre les variables qu'elles renferment». Journal de l'École Polytechnique. Cah. 17.

занявшись спеціальнымъ изученіемъ замѣчательныхъ выраженій, открытыхъ Крамеромъ, и достигли результатовъ, во многомъ совпадавшихъ. Будучи связаны дружбой, они по взаимному соглашенію, во избѣжаніе споровъ о пріоритетѣ, въ одинъ и тотъ же день, именно 30 ноября 1812 г. сдѣлали Академіи (въ Институтѣ Франціи) доклады о своихъ изслѣдованіяхъ по теоріи детерминантовъ и опубликовали ихъ въ одновременно вышедшихъ 16 и 17 тетрадяхъ журнала Политехнической школы. Хотя работы дѣйствительно сходились въ нѣкоторыхъ существенныхъ своихъ результатахъ, но мемуаръ Коши по обилію и разработкѣ матеріала далеко оставилъ за собою работу его друга. Этотъ мемуаръ Коши въ подлинномъ смыслѣ слова составилъ новую эру въ развитіи теоріи опредѣлителей.

Прежде всего при самомъ построеніи опредѣлителей Коши исходитъ изъ совершенно иныхъ соображеній. Точкой отправленія служатъ для него не системы линейныхъ уравненій, а такъ называемыя знакоперемѣнныя функціи, т.-е. функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ, мѣняющія свой знакъ на противоположный, когда мы замѣщаемъ другъ другомъ какія либо двѣ перемѣнныя (какъ это имѣетъ, напримѣръ, мѣсто въ функціи $x-y$). Исходя, такимъ образомъ, изъ другихъ соображеній, Коши приходитъ къ результатамъ, уже извѣстнымъ, совершенно инымъ путемъ. Существенная сторона дѣла при этомъ заключается въ томъ, что Коши рѣшительно оторвалъ теорію опредѣлителей отъ ученія о линейныхъ уравненіяхъ и превратилъ ее въ совершенно самостоятельную дисциплину.

„Если бы даже", говоритъ Мюиръ*) „ни одна изъ теоремъ, доказываемыхъ Коши, не была нова, если бы даже онъ не представилъ ни одной теоремы въ новомъ свѣтѣ, мемуаръ этотъ имѣлъ бы чрезвычайно высокую цѣнность, такъ какъ онъ далъ математикамъ того времени совершенно исчерпывающій трактатъ по общей теоріи опредѣлителей. Не будетъ преувеличеніемъ сказать, хотя это можетъ показаться утрированнымъ, что учебники теоріи опредѣлителей, предназначаемые для студентовъ въ настоящее время, т.-е. черезъ сто лѣтъ, въ сущности не содержатъ больше матеріала, чѣмъ знаменитый мемуаръ Коши".

Однако, Коши далеко не ограничился переработкой извѣстнаго уже матеріала, и именно въ томъ, что имъ внесено существенно новаго въ теорію опредѣлителей, заключается все же главная заслуга мемуара.

Какъ мы видѣли, число членовъ опредѣлителя чрезвычайно быстро возрастаетъ съ возрастаніемъ его порядка (числа уравненій и неизвѣстныхъ, если мы съ этой точки зрѣнія подходимъ къ теоріи). Если мы и владѣемъ правиломъ его составленія, то осуществленіе этого правила уже сопряжено съ чрезвычайно тягостными выкладками; когда же выраженіе составлено, то еще труднѣе оперировать имъ, производить надъ нимъ тѣ или иныя дѣйствія, преобразованія, изслѣдованія. Заслуга Коши заключается въ томъ, что онъ далъ рядъ пріемовъ, посредствомъ которыхъ можно вычислять значенія опредѣлителей и производить надъ ними различныя операціи, не развертывая ихъ по правилу Крамера. Вся алгебра получаетъ свою силу, благодаря знакоположенію; въ теоріи опредѣлителей это знакоположеніе получаетъ особенно удачное схематическое осуществленіе, дающее возможность производить глубокія преобразованія съ удивительной простотой. Сильвестеръ (J. J. Sylvester) былъ правъ, назвавъ теорію опредѣлителей „Алгеброй надъ алгеброй" („Algebra upon algebra"). Этими средствами

*) Th. Muir. «The theory of determinants in the historical order of development». London. 1906, стр. 130.

„замкнутыхъ“ операцій, въ схематической формѣ производимыхъ, теорія опредѣлителей обязана, главнымъ образомъ, Коши. Среди нихъ наиболѣе важное мѣсто занимаетъ правило умноженія опредѣлителей. Въ частныхъ случаяхъ оно находитъ себѣ уже примѣненіе въ работахъ Лежандра; имъ владѣетъ и Бине; но во всемъ своемъ объемѣ и во всей полнотѣ это правило установлено Коши; оно и сохранило его имя. Наконецъ, Коши принадлежитъ и та система обозначенія опредѣлителей, которая по настоящее время почти исключительно примѣняется.

7. Содержавшіяся въ мемуарѣ Коши идеи въ теченіе десятилѣтій служили предметомъ разработки и развитія. Было бы безполезно здѣсь перечислять имена многочисленныхъ математиковъ, внесшихъ въ теорію, созданную Коши, тѣ или иныя упрощенія, дополненія, то или иное развитіе. Между прочимъ пришлось бы при этомъ повторить имена, намъ уже знакомыя, ибо авторы, сдѣлавшіе тотъ или иной вкладъ въ молодую дисциплину, возвращались къ этому предмету и позже, въ особенности послѣ замѣчательнаго развитія, которое теорія получила въ работѣ Коши. Между прочимъ самъ Коши еще въ 14 мемуарахъ возвращается къ опредѣлителямъ, внося дополненія и усовершенствованія то въ свои, то въ чужія изслѣдованія по теоріи опредѣлителей. Опредѣлители начинаютъ прокладывать себѣ путь въ различныхъ отрасляхъ математическаго изслѣдованія: въ алгебрѣ и въ геометріи, въ теоріи чиселъ и теоріи формъ, въ механикѣ, въ теоретической астрономіи и въ другихъ прикладныхъ дисциплинахъ. Въ каждой отрасли появляются свои опредѣлители, своеобразные по структурѣ, по своему значенію. Вниманіе сосредоточивается уже не столько на общей теоріи опредѣлителей, сколько на изслѣдованіи опредѣлителей спеціальнаго вида. Таковы опредѣлители симметрическіе, косые симметрическіе, результанты, дискриминанты, ортогонанты и т. д. Каждая отрасль математики располагаетъ своими опредѣлителями и занята ихъ изслѣдованіемъ.

8. Къ общей теоріи опредѣлителей насъ вновь возвращаютъ работы Якоби (C. G. Iacobi). За 15 лѣтъ съ 1827—1841 г.г. этотъ замѣчательный германскій математикъ опубликовалъ до 30 работъ, изъ которыхъ однѣ цѣликомъ, другія частью посвящены теоріи опредѣлителей. Три наиболѣе замѣчательныя изъ этихъ работъ относятся къ послѣднему 1841 году *). Первая изъ этихъ работъ составляетъ собственно сводку и переработку уже установленныхъ началъ теоріи опредѣлителей и должна составить, такъ сказать, прочную базу для идей, получившихъ развитіе въ двухъ слѣдующихъ мемуарахъ. Существенно новое, что эти работы приносятъ, заключается въ слѣдующемъ. Элементами, изъ которыхъ составляются опредѣлители, у предшествующихъ авторовъ являются числа. Лишь изрѣдка, такъ сказать, вскользь у Коши и другихъ авторовъ встрѣчаются опредѣлители, составленные изъ функцій. Якоби дѣлаетъ предметомъ спеціальнаго изслѣдованія опредѣлители, составленные изъ функцій одной и нѣсколькихъ независимыхъ перемѣнныхъ. Уже въ первомъ мемуарѣ Якоби разсматриваетъ такого рода детерминанты и устанавливаетъ правило ихъ дифференцированія. Теперь, пользуясь основными пріемами дифференціальнаго исчисленія, Якоби имѣетъ возможность установить важнѣйшія зависимости,

---

*) C. G. Jacobi. «De formatione et proprietatibus Determinantium». Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. XXII. 1841.
«De determinantibus functionalibus». Ibidem.
«De functionibus alternantibus earumque divisione per productum e differentiis elementorum conflatum». Ibidem.