**Тихонов А.Н., Гончарский А.В.,
Степанов В.В., Ягола А.Г.**

Численные методы решения некорректных задач

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Т46

Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.
Т46 Численные методы решения некорректных задач / Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. – М.: Книга по Требованию, 2012. – 228 с.

ISBN 978-5-458-25635-3

К некорректно поставленным задачам относятся многие задачи теории оптимального управления, линейной алгебры, задача суммирования рядов Фурье с неточно заданными коэффициентами, задача минимизации функционалов и многие другие.

Теория и методы решения некорректных задач получили интенсивное развитие после выхода в свет основополагающих работ. Важнейшим открытием было введённое понятие приближённого решения некорректных задач. В основе новой постановки лежит понятие регуляризирующего алгоритма (РА) как способа приближённого решения некорректной задачи.

ISBN 978-5-458-25635-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

x_δ (погрешность δ неизвестна, но известно, что $\rho_X(x_\delta, \bar{x}) \to 0$ при $\delta \to 0$). Следующее утверждение показывает, что это возможно только для задач, по существу являющихся корректными.

Отображение G регуляризируемо на D_G семейством $R_\delta = R(\cdot, \delta) = R(\cdot)$ тогда и только тогда, когда $G(x)$ продолжается на все X, причем это продолжение непрерывно на D_G в X (см. [16]).

Последнее означает, что для некорректной задачи (В.1) (например, пусть в (В.1) оператор A взаимно однозначен из Z в U и вполне непрерывен) отображение $G = A^{-1}$ не может быть продолжено на все пространство U с множества $D_G = AZ \subset U$ так, чтобы оно было непрерывно на D_G, поскольку оператор A^{-1} не является непрерывным. Это значит, что в указанной задаче регуляризация при помощи оператора $R(\cdot)$, не зависящего от δ, невозможна.

Таким образом, пара (x_δ, δ) является, вообще говоря, той минимальной информацией, которая необходима для построения приближенного решения некорректных задач. Соответственно для задачи (В.1) минимальной информацией является пара (x_δ, δ).

Зададимся следующим вопросом: насколько широк круг задач, которые допускают построение регуляризирующего семейства отображений, т.е. постараемся описать круг задач, регуляризируемых по Тихонову. Очевидно, что множество таких задач не пусто, так как для любой корректной задачи в качестве регуляризирующего семейства можно взять $R_\delta = G$. На этом факте по сути дела основана вся классическая вычислительная математика. Регуляризируемыми являются не только корректные, но и значительная часть некорректных задач. Так, например, если в уравнении (В.1) оператор A линеен, непрерывен и инъективен, а Z и U – гильбертовы пространства, то такая задача регуляризируема.

Этот результат является основным результатом главы I. Более того, в первой главе будут предложены конструктивные методы построения регуляризирующих алгоритмов для задачи (В.1) в случае, когда с погрешностью задана не только правая часть уравнения, но и сам оператор. Пусть заданы элементы u_δ и линейный оператор A_h такие, что $\| u_\delta - \bar{u} \|_U \leqslant \delta$, $\| A_h - A \| \leqslant h$. Таким образом, входной информацией является набор $\{u_\delta, A_h, \delta, h\}$. По этим данным требуется построить элемент $z_\eta \in Z$, $\eta = \{\delta, h\}$ такой, что $z_\eta \xrightarrow{Z} \bar{z}$ при $\eta \to 0$. Для решения этой задачи широко используется следующая конструкция. Рассмотрим функционал

$$M^\alpha[z] = \| A_h z - u_\delta \|_U^2 + \alpha \| z \|_Z^2. \tag{В.2}$$

Пусть z_η^α – экстремаль функционала $M^\alpha[z]$, т.е. элемент, минимизирующий $M^\alpha[z]$ на Z. Если *параметр регуляризации* $\alpha = \alpha(\eta)$ согласован определенным образом $\eta = \{\delta, h\}$, то элемент $z_\eta^{\alpha(\eta)}$ и будет в определенном смысле решением задачи (В.1).

В главе I подробно обсуждаются способы согласования параметра регуляризации α с погрешностью задания входной информации η. Заметим сразу, что если пытаться строить приближенные решения так, чтобы α не являлось функцией от погрешности η, то последнее эквивалентно попытке построить регуляризатор $R(\cdot, \eta) = R(\cdot)$, что, как мы уже знаем, возможно лишь для корректных задач.

В главе I подробно обсуждаются априорные схемы выбора параметра регуляризации, впервые предложенные в работе [165].

Особый интерес для практики представляет схема выбора параметра регуляризации по обобщенной невязке [58, 185]. В монографии подробно изложены методы решения несовместных уравнений.

Значительное место в главе I отведено проблемам конечно-разностной аппроксимации и численным методам решения полученных после аппроксимации систем линейных уравнений. Особое внимание уделено современным методам решения интегральных уравнений типа свертки. Регуляризирующие алгоритмы решения уравнений от разности аргументов нашли широкое применение в задачах обработки изображений, компьютерной томографии и т.п. [183, 184].

Построение регуляризирующих алгоритмов основано на использовании дополнительной априорной информации об искомом решении. Особенно просто эта задача решается, если есть информация о принадлежности искомого решения компактному классу [185]. Как показано в главе II, этой информации вполне достаточно, чтобы построить регуляризирующий алгоритм.

Более того, в этом случае оказывается возможным построить не только приближенное решение (B.1) z_δ такое, что $z_\delta \xrightarrow{Z} \bar{z}$ при $\delta \to 0$, но и получить оценку точности приближения, т.е. указать $\epsilon(\delta)$, для которого $\| z_\delta - \bar{z} \|_Z \leqslant \epsilon(\delta)$, причем $\epsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Вопрос об оценке погрешности решения задачи (B.1) непрост.

Пусть

$$\Delta(R_\delta, \delta, \bar{z}) = \sup_{u_\delta:\ \| u_\delta - \bar{u} \|_U \leqslant \delta} \rho_Z(R_\delta(u_\delta), \bar{z})$$

– погрешность решения некорректной задачи (B.1) в точке $\bar{z}$ при помощи алгоритма R_δ. Оказывается, что если задача (B.1) регуляризируема непрерывными отображениями R_δ и существует равномерная на множестве D оценка погрешности

$$\sup_{\bar{z} \in D} \Delta(R_\delta, \delta, \bar{z}) \leqslant \epsilon(\delta) \to 0,$$

то сужение оператора A^{-1} на множество $AD \subset U$ непрерывно на $AD \subset U$ [16]. Последнее утверждение не дает возможности построить погрешность решения некорректной задачи на всем пространстве Z.

Однако если D компакт, то обратный оператор A^{-1}, определенный на $AD \subset U$, непрерывен, что и позволяет находить вместе с приближенным решением его погрешность.

Следующий важный вопрос, который обсуждается в главе II – это вопрос о том, как в конкретной задаче, используя априорную информацию об искомом решении задачи, выделять компактное множество корректности M.

В целом ряде обратных задач математической физики имеется качественная информация об искомом решении обратной задачи, такая, как монотонность искомых функций, их выпуклость и т.п. [71]. Как показано в главе II, этой информации достаточно, чтобы на ее основании построить РА решения некорректной задачи (1.1) [74].

Следующая проблема, решаемая в главе II, – как построить эффективные численные алгоритмы решения некорректных задач на выделенном множестве корректности M. В перечисленных выше случаях задача построения приближенного решения сводится к решению задач выпуклого программирования. Используя специфику ограничений, можно построить эффективные алгоритмы решения некорректных задач на компактных множествах.

Необходимо отметить, что хотя для построения регуляризирующих алгоритмов в монографии широко используются итерационные методы, мы не касаемся проблем итеративной регуляризации, которая представляет самостоятельное большое направление в теории регуляризации. Этому направлению посвящено несколько монографий, в том числе [16, 31].

В главе III подробно обсуждаются численные аспекты построения эффективных регуляризирующих алгоритмов на специальных множествах. Алгоритмы решений некорректных задач на множествах специальной структуры (используется информация о монотонности искомого решения, его выпуклости, существования конечного числа точек перегиба и т.п.) получили широкое распространение в решении некорректных задач диагностики и проектирования [51, 52, 183].

В главе IV приведено описание пакета программ решения некорректных задач. Среди приведенных программ содержатся:

а) различные варианты решения линейных интегральных уравнений первого типа (B.1), основанные на использовании схемы Тихонова;

б) специальные программы решения одномерных и двумерных интегральных уравнений 1-го рода типа свертки с использованием быстрого преобразования Фурье;

в) различные варианты решения одномерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода на множествах монотонных, выпуклых функций, функций, имеющих заданное число экстремумов, точек перегиба и т.п.

Каждая программа снабжена тестовыми примерами. Глава V содержит тексты программ.

Книга предназначена для студентов и аспирантов физико-математических специальностей, а также для инженеров и научных работников, интересующихся вопросами обработки и интерпретации данных эксперимента.

Глава I

МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

В настоящей главе рассмотрим методы решения некорректно поставленных задач при условии, что априорной информации, вообще говоря, недостаточно для выделения компактного множества корректности. Основные идеи этой главы были высказаны в работах [165, 166]. Мы будем рассматривать случай, когда оператор также задается приближенно, а множество ограничений задачи — выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Случай точно заданного оператора и случай отсутствия ограничений (т.е. множество ограничений совпадает со всем пространством) являются частными случаями рассмотренной постановки задачи.

§ 1. Постановка задачи. Сглаживающий функционал

Пусть Z, U — гильбертовы пространства; D — такое замкнутое выпуклое множество априорных ограничений задачи ($D \subseteq Z$), что $0 \in D$ (в частности, если рассматривается задача без ограничений, то $D = Z$); A, A_h — линейные ограниченные операторы, действующие из Z в U, причем $\| A - A_h \| \leqslant h$, $h \geqslant 0$. Построим приближенное решение уравнения

$$Az = u, \tag{1}$$

принадлежащее множеству D, по заданному набору данных $\{A_h, u_\delta, \eta\}$, $\eta = (\delta, h)$, где $\delta > 0$ — погрешность задания правой части уравнения (1) u_δ, т.е. $\| u_\delta - \bar{u} \| \leqslant \delta$, $\bar{u} = A\bar{z}$. Здесь $\bar{z}$ — точное решение (1), $\bar{z} \in D$, соответствующее правой части $\bar{u}$. Введем *сглаживающий функционал* [165]

$$M^\alpha[z] = \| A_h z - u_\delta \|^2 + \alpha \| z \|^2 \tag{2}$$

($\alpha > 0$ — *параметр регуляризации*) и рассмотрим экстремальную задачу: найти

$$\inf_{z \in D} M^\alpha [z]. \tag{3}$$

Лемма 1. *Для любых $\alpha > 0$, $u_\delta \in U$ и линейного ограниченного оператора A_h задача (3) разрешима и имеет единственное решение $z_\eta^\alpha \in D$, причем*

$$\| z_\eta^\alpha \| \leqslant \| u_\delta \| / \sqrt{\alpha}. \tag{4}$$

Доказательство. Очевидно, что функционал $M^\alpha[z]$ дважды дифференцируем по Фреше, причем

$$(M^\alpha[z])' = 2(A_h^* A_h z + A_h^* u_\delta + \alpha z),$$

$$(M^\alpha[z])'' = 2(A_h^* A_h + \alpha E)$$

(A_h^*: $U \to Z$ – оператор, сопряженный к A_h). Для любого $z \in Z$ $((M^\alpha[z])''z, z) \geqslant 2\alpha \| z \|^2$, поэтому функционал $M^\alpha[z]$ является сильно выпуклым; следовательно, он достигает минимума на любом замкнутом (не обязательно ограниченном) множестве $D \subseteq Z$ в единственной точке z_η^α [33].

Поскольку $0 \in D$, то

$$\inf_{z \in D} M^\alpha[z] \leqslant M^\alpha[0],$$

откуда следует оценка (4).

Функционал $M^\alpha[z]$ является сильно выпуклым функционалом в гильбертовом пространстве [27]. Для отыскания экстремали $z_\eta^\alpha \in D$ при фиксированном $\alpha > 0$ достаточно применить, например, градиентные методы минимизации функционалов с ограничениями или без ограничений, если $D = Z$ [33].

Напомним, что необходимым и достаточным условием того, что z_η^α – точка минимума $M^\alpha[z]$ на D, является условие [76]

$$((M^\alpha[z_\eta^\alpha])', z - z_\eta^\alpha) \geqslant 0 \qquad \forall z \in D.$$

Еяли z_η^α – внутренняя точка D (или $D = Z$), то это условие принимает вид $(M^\alpha[z_\eta^\alpha])' = 0$, или

$$A_h^* A_h z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha = A_h^* u_\delta. \tag{5}$$

Таким образом, в этом случае вместо минимизации функционала $M^\alpha[z]$ можно решать уравнение Эйлера (5). Численные аспекты реализации обоих подходов будут рассмотрены ниже.

§ 2. Выбор параметра регуляризации

Идея построения регуляризирующего алгоритма на основе экстремальной задачи (3) для функционала $M^\alpha[z]$ заключается в построении такой функции $\alpha = \alpha(\eta)$, что $z_\eta^{\alpha(\eta)} \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$, или, другими словами, в согласовании параметра регуляризации α с погрешностью задания входных данных η.

Теорема 1 [165, 166, 169, 170]. *Пусть A – взаимно однозначный оператор, $\bar{z} \in D$. Тогда $z_\eta^{\alpha(\eta)} \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$, если $\alpha(\eta) \to 0$ таким образом, что $(h + \delta)^2/\alpha(\eta) \to 0$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. $z_\eta^{\alpha(\eta)} \nrightarrow \bar{z}$. Это означает, что существуют такое $\epsilon > 0$ и такая последовательность $\eta_k \to 0$, что $\| z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - \bar{z} \| \geqslant \epsilon$. Поскольку $\bar{z} \in D$, то для любого $\alpha > 0$

$$M^\alpha[z_\eta^\alpha] = \inf_{z \in D} M^\alpha[z] \leqslant M^\alpha[\bar{z}] = \| A_h \bar{z} - u_\delta \|^2 + \alpha \| \bar{z} \|^2 =$$

$$= \| A_h \bar{z} - A\bar{z} + \bar{u} - u_\delta \|^2 + \alpha \| \bar{z} \|^2 \leqslant (h \| \bar{z} \| + \delta)^2 + \alpha \| \bar{z} \|^2.$$

Отсюда

$$\| z_\eta^\alpha \|^2 \leqslant (h \| \bar{z} \| + \delta)^2/\alpha + \| \bar{z} \|^2. \qquad (6)$$

В силу условий теоремы существует такая константа C, не зависящая от η при $\delta \leqslant \delta_0$, $h \leqslant h_0$ ($\delta_0 > 0$, $h_0 > 0$ – некоторые положительные числа), что

$$(h \| \bar{z} \| + \delta)^2/\alpha(\eta) \leqslant C.$$

Далее, используя слабую компактность шара в гильбертовом пространстве [92], из последовательности $z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к $z^* \in D$ (поскольку D слабо замкнуто). Не ограничивая общности, будем считать, что $z_{\eta_k}^{\alpha(\delta_k)} \xrightarrow{\text{сл}} z^*$. Используя слабую полунепрерывность снизу нормы [123], условие $(h + \delta)^2/\alpha(\eta) \to 0$, и неравенство (6) легко получить:

$$\| z^* \| \leqslant \varliminf_{k \to \infty} \| z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} \| \leqslant \varlimsup_{k \to \infty} \| z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} \| \leqslant \| \bar{z} \|. \qquad (7)$$

Теперь рассмотрим неравенство

$$\| A z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - A\bar{z} \| \leqslant \| A z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - A_{h_k} z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} \| +$$

$$+ \| A_{h_k} z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - u_{\delta_k} \| + \| u_{\delta_k} - \bar{u} \| \leqslant$$

$$\leqslant h_k \| z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} \| + \| A_{h_k} z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} - u_{\delta_k} \| + \delta_k \leqslant$$

$$\leqslant h_k (C + \| \bar{z} \|^2)^{1/2} + ((h_k \| \bar{z} \| + \delta_k)^2 + \alpha(\eta_k) \| \bar{z} \|^2)^{1/2} + \delta_k.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, используя условие $\alpha(\eta_k) \to 0$ и слабую полунепрерывность снизу функционала $\| Az - A\bar{z} \|$, получим $\| Az^* - A\bar{z} \| = 0$, т.е. $z^* = \bar{z}$ в силу взаимной однозначности A. Тогда из (7) следует, что $\lim\limits_{k \to \infty} \| z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} \| = \| \bar{z} \|$. Гильбертово пространство обладает H-свойством (из слабой сходимости и сходимости норм следует сильная сходимость [95]), поэтому

$$\lim_{k \to \infty} z_{\eta_k}^{\alpha(\eta_k)} = \bar{z}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. Пусть A не является взаимно однозначным оператором. Определим нормальное решение $\bar{z}$ уравнения (1) на множестве D, соответствующее правой части $\bar{u} = A\bar{z}$, как решение экстремальной задачи

$$\| \bar{z} \|^2 = \inf \| z \|^2, \quad z \in \{ z \colon z \in D,\ Az = \bar{u} \}.$$

Множество $\{ z\colon z \in D,\ Az = \bar{u} \}$ выпукло и замкнуто, функционал $f(z) = \| z \|^2$ сильно выпуклый; следовательно, нормальное решение $\bar{z} \in D$ существует и единственно [33].

Если в формулировке теоремы 1 отказаться от требования взаимной однозначности оператора A, то ее утверждение остается справедливым, если считать, что $\bar{z}$ – нормальное решение уравнения (1). Таким образом, в этом случае $z_\eta^{\alpha(\eta)} \to \bar{z}$ при $\eta \to 0$, где $\bar{z}$ – решение уравнения (1) с минимальной нормой.

Теорема 1 указывает порядок убывания $\alpha(\eta)$, достаточный для построения регуляризирующего алгоритма. Обычно при обработке реальных экспериментальных данных уровень погрешности η фиксирован и известен. Ниже будет рассмотрен подход, позволяющий использовать для построения устойчивых приближенных решений уравнения (1) фиксированные значения погрешности задания исходных данных.

Определим *меру несовместности* уравнения (1) с приближенными данными на множестве $D \subseteq Z$ как

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z \in D} \| A_h z - u_\delta \|.$$

Очевидно, что $\mu_\eta(u_\delta, A_h) = 0$, если $u_\delta \in \overline{A_h D}$ (черта означает замыкание по норме соответствующего пространства).

Л е м м а 2. *Если* $\| u_\delta - \bar{u} \| \leqslant \delta$, $\bar{u} = A\bar{z}$, $\bar{z} \in D$, $\| A - A_h \| \leqslant h$, *то* $\mu_\eta(u_\delta, A_h) \to 0$ *при* $\eta \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно следует из того, что

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf_{z \in D} \| A_h z - u_\delta \| \leqslant \| A_h \bar{z} - u_\delta \| \leqslant \delta + h \| \bar{z} \| \xrightarrow[\eta \to 0]{} 0.$$

В дальнейшем будем предполагать, что мера несовместности вычисляется с погрешностью $\kappa \geqslant 0$, т.е. вместо $\mu_\eta(u_\delta, A_h)$ известно такое $\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)$, что

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) \leqslant \mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) \leqslant \mu_\eta(u_\delta, A_h) + \kappa.$$

Погрешность определения меры несовместности κ будем считать согласованной с погрешностью задания входных данных η таким образом, что $\kappa = \kappa(\eta) \to 0$ при $\eta \to 0$ (например, $\kappa(\eta) = h + \delta$).

Введем в рассмотрение функцию, называемую *обобщенной невязкой* [57, 59]:

$$\rho_\eta^\kappa(\alpha) = \| A_h z_\eta^\alpha - u_\delta \|^2 - (\delta + h \| z_\eta^\alpha \|)^2 - (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2.$$

Сформулируем так называемый *обобщенный принцип невязки* для выбора параметра регуляризации. Пусть условие

$$\| u_\delta \|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2 \tag{8}$$

не выполнено: тогда в качестве приближенного решения уравнения (1) выберем $z_\eta = 0$. Если же условие (8) выполнено, то обобщенная невязка имеет положительный корень $\alpha^* > 0$ (см. § 4), т.е.

$$\| A_h z_\eta^{\alpha^*} - u_\delta \|^2 = (\delta + h \| z_\eta^{\alpha^*} \|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A))^2. \tag{9}$$

В этом случае положим приближенное решение уравнения (1) $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$, причем, как будет показано ниже, $z_\eta^{\alpha^*}$ определяется единственным образом.

Т е о р е м а 2. *Пусть A – взаимно однозначный оператор,* $\eta = (\delta, h) \to 0$ *таким образом, что* $\| A - A_h \| \leqslant h$, $\| u_\delta - \bar{u} \| \leqslant \delta$, $\bar{u} = A\bar{z}$, $\bar{z} \in D$. *Тогда* $\lim_{\eta \to 0} z_\eta = \bar{z}$, *где z_η выбирается согласно обобщенному принципу невязки. Если A не является взаимно однозначным оператором* ($\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$), *то* *утверждение теоремы остается справедливым, если считать $\bar{z}$ нормальным решением уравнения* (1).

Доказательство. Если $\bar{z} = 0$, то $\| u_\delta \| \leqslant \delta$ и условие (8) не выполнено. В этом случае $z_\eta = 0$ и теорема доказана.

Пусть теперь $\bar{z} \neq 0$. Тогда, поскольку $\delta^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2 \to 0$ при $\eta \to 0$ (см. лемму 2 и определения μ_η^κ и κ), $\| u_\delta \| \to \| \bar{u} \| \neq 0$, то условие (8) будет выполнено по крайней мере для достаточно малых η.

Схема доказательства теоремы 2 в этом случае не отличается от схемы доказательства теоремы 1. Опять предположим, что $z_\eta^{\alpha^*(\eta)} \nrightarrow \bar{z}$. Это означает, что существуют такое $\epsilon > 0$ и такая последовательность $\eta_k \to 0$, что $\| \bar{z} - z_{\eta_k}^{\alpha^*(\eta_k)} \| \geqslant \epsilon$. В силу экстремальных свойств $z_{\eta_k}^{\alpha^*(\eta_k)} \in D$ получим $(\alpha^*(\eta_k) \equiv \alpha_k^*)$

$$\| A_{h_k} z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} - u_{\delta_k} \|^2 + \alpha_k^* \| z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \|^2 \leqslant \| A_{h_k} \bar{z} - u_{\delta_k} \|^2 + \alpha_k^* \| \bar{z} \|^2 .$$

Учитывая обобщенный принцип невязки (9), имеем

$$(\delta_k + h_k \| z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \|)^2 + \alpha_k^* \| z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (\delta_k + h_k \| z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \|)^2 + (\mu_{\eta_k}^{\kappa_k}(u_{\delta_k}, A_{h_k}))^2 + \alpha_k^* \| z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (\delta_k + h_k \| \bar{z} \|)^2 + \alpha_k^* \| \bar{z} \|^2 .$$

Таким образом,

$$f(\| z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \|) \leqslant f(\| \bar{z} \|),$$

где $f(x) = (A + Bx)^2 + Cx^2$, $A = \delta_k \geqslant 0$, $B = h_k \geqslant 0$, $C = \alpha_k^* > 0$. Функция $f(x)$ строго монотонна при $x > 0$, а следовательно,

$$\| z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \| \leqslant \| \bar{z} \|.$$

Считая, как и при доказательстве теоремы 1, что $z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \xrightarrow{\text{сл}} z^*$, $z^* \in D$, получим неравенство

$$\| z^* \| \leqslant \varliminf_{k \to \infty} \| z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \| \leqslant \varlimsup_{k \to \infty} \| z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \| \leqslant \| \bar{z} \|,$$

которое аналогично (7).

Теперь для того, чтобы завершить доказательство, так же, как и в теореме 1, осталось доказать, что $z^* = \bar{z}$. Это следует из неравенства

$$\| A z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} - A\bar{z} \| \leqslant h_k \| z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \| + \{ (\delta_k + h_k \| z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} \|)^2 +$$
$$+ (\mu_{\eta_k}^{\kappa_k}(u_{\delta_k}, A_{h_k}))^2 \}^{1/2} + \delta_k \leqslant$$
$$\leqslant h_k \| \bar{z} \| + \{ (\delta_k + h_k \| \bar{z} \|)^2 + (\mu_{\eta_k}^{\kappa_k}(u_{\delta_k}, A_{h_k}))^2 \}^{1/2} + \delta_k$$

и из того, что

$$h_k \| \bar{z} \| + \{ (\delta_k + h_k \| \bar{z} \|)^2 + (\mu_{\eta_k}^{\kappa_k}(u_{\delta_k}, A_{h_k}))^2 \}^{1/2} + \delta_k \to 0$$

при $\eta_k \to 0$.

В работе [162] замечено, что в формулировке обобщенного принципа невязки можно положить $\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) = 0$ даже в том случае, когда

$u_\delta \notin A_h D$. А именно, определим обобщенную невязку

$$\rho_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h\|z_\eta^\alpha\|)^2.$$

Условие (8) примет вид

$$\|u_\delta\| > \delta. \tag{10}$$

Сформулируем теперь *обобщенный принцип невязки* в следующем виде.

1. Если условие $\|u_\delta\| > \delta$ не выполнено, то полагаем приближенное решение уравнения (1) $z_\eta = 0$.

2. Если условие $\|u_\delta\| > \delta$ выполнено, то:

а) если найдется $\alpha^* > 0$ – корень функции $\rho_\eta(\alpha)$, то в качестве решения возьмем $z_\eta^{\alpha^*}$;

б) если $\rho_\eta(\alpha) > 0$ для всех $\alpha > 0$, то положим приближенное решение равным $z_\eta = \lim\limits_{\alpha \to 0+0} z_\eta^\alpha$.

Теорема 3. *Если A – взаимно однозначный оператор, то сформулированный выше алгоритм является регуляризирующим. Если A не является взаимно однозначным, то имеет место сходимость регуляризированных приближенных решений z_η к нормальному решению уравнения* (1) *на множестве D.*

Доказательство. Ясно (см. теорему 2), что если $\bar z = 0$, то утверждение теоремы справедливо. В случае, когда $\bar z \neq 0$ и существует корень $\rho_\eta(\alpha)$, теорема также уже доказана, так как действуя как при доказательстве теоремы 2, легко показать, что

$$(\delta_k + h_k\|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|)^2 + \alpha_k^*\|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|^2 = \|A_{h_k} z_{\eta_k}^{\alpha_k^*} - u_{\delta_k}\|^2 + \alpha_k^*\|z_{\eta_k}^{\alpha_k^*}\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|A_{h_k}\bar z - u_{\delta_k}\|^2 + \alpha_k^*\|\bar z\|^2 \leqslant (\delta_k + h_k\|\bar z\|)^2 + \alpha_k^*\|\bar z\|^2,$$

т.е. $\|z_\eta^{\alpha^*}\| \leqslant \|\bar z\|$. В остальном доказательство теоремы 2 практически не меняется.

Итак, осталось исследовать случай, когда $\rho_\eta(\alpha) > 0$ для всех $\alpha > 0$. Так как

$$\|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 + \alpha\|z_\eta^\alpha\|^2 \leqslant \|A_h\bar z - u_\delta\|^2 + \alpha\|\bar z\|^2,$$
$$\|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\| > \delta + h\|z_\eta^\alpha\|,$$
$$\|A_h\bar z - u_\delta\| \leqslant \delta + h\|\bar z\|,$$

то

$$(\delta + h\|z_\eta^\alpha\|)^2 + \alpha\|z_\eta^\alpha\|^2 \leqslant (\delta + h\|\bar z\|)^2 + \alpha\|\bar z\|^2.$$

Отсюда, как и прежде, следует, что $\|z_\eta^\alpha\| \leqslant \|\bar z\|$ для всех $\alpha > 0$. Тем самым, для любой последовательности α_n, сходящейся к нулю, можно выделить такую подпоследовательность α_n', что $z_\eta^{\alpha_n'}$ слабо сходится к $z_\eta \in D$ (так как D слабо замкнуто). Не ограничивая общности, будем считать, что $z_\eta^{\alpha_n} \xrightarrow{\text{сл}} z_\eta$. В § 4 будет доказано, что

$$\lim_{\alpha \to 0+0} M^\alpha[z_\eta^\alpha] = (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2.$$

Поэтому, поскольку

$$(\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2 \leqslant \| A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta \|^2 + \alpha_n \| z_\eta^{\alpha_n} \|^2 \to (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$$

при $\alpha_n \to 0$, то

$$\| A_h z_\eta - u_\delta \| = \inf_{z \in D} \| A_h z - u_\delta \| = \mu_\eta(u_\delta, A_h)$$

и z_η – экстремаль функционала $M^\alpha[z]$ при $\alpha = 0$ (т.е. z_η – квазирешение уравнения (1) с приближенными данными), удовлетворяющая неравенству $\| z_\eta \| \leqslant \| \bar{z} \|$, а $z_\eta^{\alpha_n}$ – последовательность, минимизирующая функционал $\| A_h z - u_\delta \|^2$ на множестве D. Функция $\| z_\eta^\alpha \|$ монотонно не возрастает по α (см. § 4) и ограничена сверху $\| \bar{z} \|$, поэтому существует

$$\lim_{\alpha \to 0+0} \| z_\eta^\alpha \| = a,$$

причем

$$\lim_{n \to \infty} \| z_\eta^{\alpha_n} \| = a \geqslant \| z_\eta \|.$$

Покажем, что $\| z_\eta \| = a$. Предположим, что это не так. Тогда, начиная с некоторого номера N, $\| z_\eta^{\alpha_n} \| > \| z_\eta \|$. Но, поскольку

$$\| A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta \|^2 + \alpha_n \| z_\eta^{\alpha_n} \|^2 \leqslant (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2 + \alpha_n \| z_\eta \|^2$$

(так как $z_\eta^{\alpha_n}$ – экстремаль $M^{\alpha_n}[z]$), то $\| A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta \| \leqslant \mu_\eta(u_\delta, A_h)$, начиная с номера N. Но в силу определения меры несовместности

$$\| A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta \| = \mu_\eta(u_\delta, A_h).$$

Поэтому z_η – экстремаль функционала $M^\alpha[z]$ для всех α_n, начиная с номера N (определяемая единственным образом), т.е.

$$\| z_\eta \| = \| z_\eta^{\alpha_n} \|.$$

Полученное противоречие показывает, что $\| z_\eta \| = \lim_{n \to \infty} \| z_\eta^{\alpha_n} \|$, а значит, $z_\eta^{\alpha_n}$ сходится к z_η не только слабо, но и сильно. Для доказательства существования $\lim_{\alpha \to 0+0} z_\eta^\alpha$ теперь достаточно доказать, что предел z_η последовательности $\{z_\eta^{\alpha_n}\}$ не зависит от выбора последовательности $\{\alpha_n\}$. Действительно, предел $\{z_\eta^{\alpha_n}\}$ будет являться экстремалью функционала $M^0[z]$ с минимальной нормой. Пусть $\bar{\bar{z}}_\eta$ – экстремаль функционала $M^0[z]$ с минимальной нормой, т.е.

$$\| A_h \bar{\bar{z}}_\eta - u_\delta \|^2 = (\mu_\eta(u_\delta, A_h))^2 \leqslant \| A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta \|^2.$$

Очевидно, что

$$\| A_h z_\eta^{\alpha_n} - u_\delta \|^2 + \alpha_n \| z_\eta^{\alpha_n} \|^2 \leqslant \| A_h \bar{\bar{z}}_\eta - u_\delta \|^2 + \alpha_n \| \bar{\bar{z}}_\eta \|^2.$$

Следовательно, $\| z_\eta^{\alpha_n} \| \leqslant \| \bar{\bar{z}}_\eta \|$, а значит,

$$\| z_\eta \| = \| \lim_{n \to \infty} z_\eta^{\alpha_n} \| = \lim_{n \to \infty} \| z_\eta^{\alpha_n} \| \leqslant \| \bar{\bar{z}}_\eta \|,$$

и так как z_η – экстремаль $M^0[z]$, то $z_\eta = \bar{\bar{z}}_\eta$.