

А. Ляпунов

Работы по теории потенциала
Серия "Классики естествознания".

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
А11

А11 **А. Ляпунов**
Работы по теории потенциала: Серия "Классики естествознания". / А. Ляпунов – М.: Книга по Требованию, 2013. – 180 с.

ISBN 978-5-458-50364-8

Серия "Классики естествознания".

Настоящий сборник содержит все работы А. М. Ляпунова по теории потенциала. В этих работах установлены ставшие классическими теоремы о потенциалах слоев. Большая часть работ А. М. Ляпунова по теории потенциала была издана на французском языке и притом в малодоступных журналах. На русском языке они появляются впервые. В качестве очерка жизни и деятельности А. М. Ляпунова в настоящем сборнике помещена речь, которую его ученик, академик В. А. Стеклов, произнёс на посвященном памяти А. М. Ляпунова заседании Российской Академии наук 3 мая 1919 г. В настоящий сборник включён также отзыв А. М. Ляпунова о докторской диссертации В. А. Стеклова, напечатанный в записках Харьковского университета за 1903 г. Этот отзыв, как и очерк В. А. Стеклова, с удовольствием прочтёт всякий, кто интересуется работами А. М. Ляпунова по теории потенциала и математической физике, а также развитием этой важной ветви анализа в нашей стране.

ISBN 978-5-458-50364-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В ноябре 1948 г. исполнилось тридцать лет со дня преждевременной смерти знаменитого русского математика Александра Михайловича Ляпунова.

Настоящим сборником, по предложению Харьковского математического общества, одним из виднейших членов которого был А. М. Ляпунов, издательство отмечает эту дагу.

Научное творчество А. М. Ляпунова отличается большим разнообразием. Создатель теории устойчивости движения, автор фундаментальных исследований о фигурах равновесия вращающейся жидкости, А. М. Ляпунов внёс весьма важный вклад также в теорию вероятностей, а своими исследованиями по теории потенциала открыл пути для развития строгих методов математической физики.

Работы А. М. Ляпунова не устарели и даже приобретают всё большее и большее значение. Поэтому издание трудов А. М. Ляпунова не только желательно, но и необходимо.

Настоящий сборник содержит все работы А. М. Ляпунова по теории потенциала *). В этих работах установлены ставшие классическими теоремы о потенциалах слёв.

*) За исключением одной заметки в С. Р., содержание которой покрывается более поздней статьёй.

Большая часть работ А. М. Ляпунова по теории потенциала была издана на французском языке и притом в мало доступных журналах. На русском языке они появляются впервые.

В качестве очерка жизни и деятельности А. М. Ляпунова в настоящем сборнике помещена речь, которую его ученик, академик В. А. Стеклов, произнёс на посвящённом памяти А. М. Ляпунова заседании Российской Академии наук 3 мая 1919 г.

В настоящий сборник включён также отзыв А. М. Ляпунова о докторской диссертации В. А. Стеклова, напечатанный в записках Харьковско́го университетa за 1903 г. Этот отзыв, как и очерк В. А. Стеклова, с удовольствием прочтёт всякий, кто интересуется работами А. М. Ляпунова по теории потенциала и математической физике, а также развитием этой важной ветви анализа в нашей стране.

Настоящий сборник по поручению Харьковско́го математического общества подготовлен и отредактирован Н. И. Ахиезером и Г. И. Дринфельдом; им принадлежат также те немногие примечания, которыми снабжён основной текст. Переводы сделаны О. Д. Каневской и Н. О. Рахленко.

АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ
Л Я П У Н О В



*Биографический
отчет*

АЛЕКСАНДР МИХАЙЛОВИЧ ЛЯПУНОВ

*Речь, произнесённая академиком В. А. Стекловым
в публичном заседании Российской Академии наук
3 мая 1919 г. *)*

Сегодня исполнилось ровно полгода со дня преждевременной кончины одного из самых выдающихся современных геометров, действительного члена нашей Академии наук и моего незабвенного учителя А. М. Ляпунова.

Ученик П. Л. Чебышева, заместитель его кафедры в Академии наук, он является достойным преемником и продолжателем своего гениального учителя.

В некрологическом очерке П. Л. Чебышева Александр Михайлович писал («Сообщения Харьковского математического общества», 2-я серия, т. IV, № 5 и 6, 1895 г., стр. 263—273):

«Оценить надлежащим образом значение великого учёного невозможно без подробного анализа его трудов, и я не беру на себя этой задачи, которая невозможна без глубокого их изучения и в настоящее время ещё не могла бы быть выполнена сколько-нибудь удовлетворительно. Гениальные идеи, рассеянные в трудах П. Л. Чебышева, без сомнения не только не исчерпаны во всех своих выводах, но могут принести надлежащие плоды лишь в будущем и тогда только явится возможность получить

*) Известия Российской Академии Наук, 1919, стр. 367—388.
(Прим. ред.)

правильное представление о великом значении учёного, которого недавно лишилась наука».

Эти слова почти полностью можно отнести теперь и к самому А. М. Ляпунову.

В настоящей речи также нет возможности обрисовать во всей полноте заслуги такого выдающегося деятеля и мыслителя, как А. М. Ляпунов, и я почту себя счастливым, если мне удастся описанием его главнейших исследований дать хоть некоторое представление о той грандиозно-творческой работе, которая совершена Александром Михайловичем за 35 лет его непрерывного учёного труда.

А. М. Ляпунов родился 25 мая 1857 г. в Ярославле, где его отец, известный астроном Михаил Васильевич Ляпунов, незадолго до того оставивший учёную деятельность в обсерватории Казанского университета, состоял директором Демидовского лицея. В 1864 г. отец его оставил службу и поселился с семьёй в имении жены в Симбирской губ., где и занялся главным образом воспитанием своего старшего сына А. М. Ляпунова.

По смерти отца, в 1870 г., А. М. Ляпунов был принят в третий класс Нижегородской гимназии, которую и окончил в 1876 г. с золотой медалью. В том же году он поступил на естественное отделение Физико-математического факультета Петербургского университета, но уже через месяц перешёл на математическое отделение. В 1880 г., будучи студентом IV курса, он получил золотую медаль за сочинение на тему, предложенную факультетом, и в том же году, по окончании курса со степенью кандидата, был оставлен профессором Д. К. Бобылевым при университете для приготовления к профессорскому званию по кафедре механики.

В университете, как говорит сам Александр Михайлович в своей краткой автобиографии, помещённой в юбилейном издании нашей Академии наук, он с особым увлечением слушал П. Л. Чебышева, который своими лекциями, а затем и советами оказал существенное влияние на характер всей последующей учёной деятельности Александра Михайловича.

Через год по окончании курса (в 1881 г.) появились две первые работы Александра Михайловича в «Журнале Русского физико-химического общества»: «О равновесии твёрдых тел в тяжёлых жидкостях, содержащихся в сосуде» и «О потенциале гидростатических давлений», где он даёт впервые доказательство существования этого потенциала при весьма общих предположениях.

Это были первые плоды его размышлений над различными вопросами гидростатики и гидродинамики, которыми он особенно заинтересовался, главным образом благодаря указаниям П. Л. Чебышева. Последний, между прочим, предложил начинающему 24-летнему учёному испытать свои силы на решении следующего вопроса.

Известно, что жидкая однородная масса, частицы которой притягиваются по закону Ньютона и которая вращается равномерно около некоторой оси, может сохранять форму эллипсоида, пока угловая скорость ω не превосходит некоторого предела.

Для значений ω , больших этого предела, эллипсоидальные фигуры равновесия становятся невозможными.

Пусть ω — какое-либо значение угловой скорости, которой соответствует эллипсоид равновесия E . Даём угловой скорости достаточно малое приращение ε . Спрашивается, существуют ли для угловой скорости $\omega + \varepsilon$ иные фигуры равновесия, отличные от эллипсоидальных, непрерывно изменяющиеся при таком же изменении ε и при $\varepsilon = 0$ совпадающие с эллипсоидом E .

Чебышев, повидимому, уже давно интересовался этим вопросом и предлагал его другим учёным, как, например, Е. И. Золотарёву и С. В. Ковалевской, но не давал при этом никаких указаний относительно приёмов его решения, ограничиваясь замечанием, что успеха можно ожидать от соответствующего применения метода последовательных приближений.

Характерно, что Чебышев, подчёркивая чрезвычайную сложность и трудность задачи, тем не менее не затруднился направить именно в эту сторону силы начинающего учёного, убеждая, что только такими сложными и

серьёзными вопросами и стоит заниматься молодому учёному, если он действительно способен к творческой работе.

Очевидно, Чебышев уже тогда усматривал из ряда вон выходящие силы в молодом человеке, если рискнул возложить на его плечи такой, как мы увидим ниже, непосильный труд.

И Александр Михайлович не побоялся принять это предложение, на которое не откликнулись ни Золотарёв, ни Ковалевская.

В течение двух лет (1882—1883 гг.) А. М. Ляпунов усердно работал над предложенной задачей, удачно применил метод последовательных приближений, получил уравнения для первого приближения и все необходимые данные, чтобы судить о характере изучаемого явления по этому первому приближению.

Но первое приближение не решает вопроса: необходимо составить уравнения, определяющие все последовательные приближения какого угодно порядка и, что особенно важно, доказать сходимость полученных таким образом приближений.

Здесь встретились трудности, оказавшиеся непреодолимыми для начинающего 25-летнего учёного. Однако работа не пропала даром.

Хотя задачу Чебышева и не удалось преодолеть, но зато оказалось возможным решить другой, также весьма важный вопрос, стоящий в непосредственной связи с задачей Чебышева, а именно вопрос об устойчивости эллипсоидов Маклорена и Якоби. Решение этого вопроса и составило предмет магистерской диссертации А. М. Ляпунова — «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» (Петербург, 1884).

Вопрос этот занимал внимание многих первоклассных учёных, как, например, Лиувилля, Римана, ещё с половины прошлого столетия, но все их исследования либо относились к различным частным случаям, либо не отличались надлежащей строгостью, а часть обещанных исследований Лиувилля не была опубликована.

А. М. Ляпунов поставил вопрос в общей форме и, основываясь на начале Лагранжа о минимуме потенциала, дал строгое решение задачи.

Когда сочинение было уже написано, он узнал о выходе в свет нового издания первого тома трактата Томсона и Тэта «Natural Philosophy» и о том, что в числе дополнений к старому изданию в нём излагается решение того же самого вопроса. Можно было опасаться, что все труды пропали даром.

Оказалось, однако, что во вновь вышедшем сочинении Томсон и Тэт, замечая, что они не переставали заниматься этим вопросом в течение 15 лет, сообщают лишь без доказательства результаты, к которым пришли, и принцип, легший в основу их изысканий, обещая подробно рассмотреть вопрос во втором томе.

При этом выяснилось, что результаты, полученные знаменитыми авторами, далеко не исчерпывают выводов А. М. Ляпунова.

Однако принцип, ими высказанный без доказательства, как представляющий собою обобщение начала Лагранжа, которым пользовался А. М. Ляпунов, остановил на себе его внимание.

Александр Михайлович сейчас же принялся за переделку первой главы сочинения. При помощи особого приёма, отличного от обычных методов вариационного исчисления, он распространил уже имевшееся у него доказательство начала Лагранжа на более общий принцип Томсона и Тэта, которому и дал теперь название «Основной теоремы».

При помощи этой теоремы он затем исследовал устойчивость сферы, эллипсоидов вращения и, наконец, трёхосных эллипсоидов равновесия.

При этом в особой (четвёртой) главе он дал ряд новых теорем в теории функций Ляме, играющих первостепенную роль в анализе, из которых упомяну, для примера, теорему о числе корней уравнения

$$E_n^m(x) = 0$$

между известными пределами a и b , от которых зависят рассматриваемые функции, служащую дополнением к теореме Ф. Клейна, и многие другие.

В виде тезисов к этому рассуждению А. М. Ляпунов указал и на те результаты, которые можно было вывести из исследования, полученного им первого приближения в упомянутой выше задаче Чебышева. На это последнее обстоятельство, имеющее важное значение для выяснения того, что будет сказано дальше, я теперь же обращаю особое внимание.

Эта первая большая работа сразу обратила на себя серьёзное внимание по оригинальности и строгости исследования и по ценности полученных результатов. Через 20 лет (в 1904 г.) она была переведена на французский язык Эд. Даво и, по предложению профессора Э. Коссера, напечатана в *Annales de Toulouse*.

В 1885 г. он защитил эту работу в качестве диссертации на степень магистра прикладной математики и осенью того же года перешёл приват-доцентом в Харьков на освободившуюся, после избрания В. Г. Имшенецкого в члены Академии наук, кафедру механики. Здесь, как говорит сам А. М. Ляпунов в своей автобиографии, — в первое время учёная деятельность Ляпунова должна была прекратиться... «Приходилось выработать курсы и составлять записки для студентов, что отнимало много времени».

Я нарочно отмечаю это характерное для Александра Михайловича место. То, что другие учёные, часто не без основания, считают важной частью своего учёного труда и составлением курсов и руководств приобретают себе учёное имя и известность, то А. М. Ляпунов считал перерывом в своей учёной деятельности.

А между тем курсы, составленные им по всем отделам механики, содержат такие ценные и иногда новые материалы, каких нельзя было найти ни в одном из имевшихся тогда руководств, как это будет показано собранию в речи А. Н. Крылова.

Требования Александра Михайловича от учёного творчества были так широки, стремления к постоянно новому, оригинальному по результатам или по методам исследования, столь значительны, что изложение, хотя бы в оригинальной, ему лично принадлежащей форме, уже установленных истин он не считал за учёный труд.