

В.П. Минорский

**Сборник задач по высшей
математике**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
В11

В11 **В.П. Минорский**
Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский – М.: Книга по Тре-
бованию, 2021. – 334 с.

ISBN 978-5-458-26134-0

ISBN 978-5-458-26134-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

§ 12. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	223
§ 13. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка (метод характеристик)	224
Глава 13. Двойные, тройные и криволинейные интегралы . . .	226
§ 1. Вычисление площади с помощью двойного интеграла . . .	226
§ 2. Центр масс и момент инерции площади с равномерно распределенной массой (при плотности $\mu = 1$)	228
§ 3. Вычисление объема с помощью двойного интеграла . . .	230
§ 4. Площади кривых поверхностей	231
§ 5. Тройной интеграл и его приложения	232
§ 6. Криволинейный интеграл. Формула Грина	234
§ 7. Поверхностные интегралы. Формулы Остроградского–Гаусса и Стокса	238
Глава 14. Ряды	242
§ 1. Числовые ряды	242
§ 2. Равномерная сходимость функционального ряда	245
§ 3. Степенные ряды	247
§ 4. Ряды Тейлора и Маклорена	249
§ 5. Приложения рядов к приближенным вычислениям	251
§ 6. Ряд Тейлора для функции двух переменных	254
§ 7. Ряд Фурье. Интеграл Фурье	255
Ответы	260
Приложение. Некоторые кривые (для справок)	332

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем «Сборнике» подобраны и методически распределены задачи и примеры по аналитической геометрии и математическому анализу.

В начале каждого параграфа приведены формулы, определения и другие краткие пояснения теории, необходимые для решения последующих задач.

В конце каждого параграфа «Сборника» приведены (после черты) задачи для повторения, составляющие около одной трети всего материала «Сборника». Эта особенность поможет преподавателю в подборе задач для работы в классе и для домашних заданий или для повторений перед контрольными работами. Кроме того, при таком распределении задач легко определить минимум, необходимый для усвоения курса, который можно рекомендовать заочникам или для работы на вечерних факультетах.

«Сборник» может быть использован как для работы под руководством преподавателя, так и для самостоятельного изучения курса высшей математики во вузах, так как почти все задачи имеют ответы, а некоторые и решения и, кроме того, ко многим задачам в тексте или в ответах даны указания к их решению. Этому же способствуют краткие пояснения теории.

ОТ РЕДАКЦИИ

Издание настоящего «Сборника» осуществлено в связи с многочисленными заявками, поступившими в наш адрес от математических кафедр, библиотек, студентов и преподавателей различных вузов России.

В связи с тем, что автора, Василия Павловича Минорского, увы, давно уже нет с нами, редакция предельно бережно отнеслась к тексту, осуществив лишь новый набор, верстку и оформление, не внося при этом никаких существенных изменений в текст, кроме исправлений замеченных опечаток.

Мы считаем своим приятным долгом подарить новому поколению учащихся этот широко известный в математическом образовании «Сборник», тем более, что его предыдущее издание было в 1987 г.

Глава 1

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Координаты точки на прямой и на плоскости. Расстояние между двумя точками

1°. Расстояние d между точками $A(x_1)$ и $B(x_2)$ на оси:

$$d = |x_2 - x_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}. \quad (1)$$

2°. Величина AB (алгебраическая) *направленного отрезка на оси*:

$$AB = x_2 - x_1. \quad (2)$$

3°. Расстояние d между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ на плоскости:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3)$$

4°. Проекции на оси координат *направленного отрезка*, или *вектора* $\overrightarrow{AB}$ на плоскости с началом $A(x_1; y_1)$ и концом $B(x_2; y_2)$:

$$\text{пр}_x \overrightarrow{AB} = X = x_2 - x_1, \quad \text{пр}_y \overrightarrow{AB} = Y = y_2 - y_1. \quad (4)$$

1. Построить на числовой оси точки $A(-5)$, $B(+4)$ и $C(-2)$ и найти величины AB , BC и AC отрезков на оси. Проверить, что $AB + BC = AC$.

2. Выполнить предыдущее упражнение для точек $A(+1)$, $B(-4)$ и $C(+5)$.

3. Построить треугольник с вершинами $A(-4; 2)$, $B(0; -1)$ и $C(3; 3)$ и определить его периметр и углы.

4. Доказать, что треугольник с вершинами $A(-3; -2)$, $B(0; -1)$ и $C(-2; 5)$ прямоугольный.

5. Построить точки $A(-4; 0)$, $B(-1; 4)$ и точки A_1 , B_1 , симметричные данным относительно оси Oy . Вычислить периметр трапеции ABB_1A_1 .

6. Точка B симметрична $A(4; -1)$ относительно биссектрисы первого координатного угла. Найти длину AB .

7. Найти точку, удаленную на 5 единиц как от точки $A(2; 1)$, так и от оси Oy .

8. На оси ординат найти точку, удаленную от точки $A(4; -1)$ на 5 единиц. Пояснить построением, почему получается два решения.

9. На оси абсцисс найти точку, удаленную от точки $A(a; b)$ на c единиц. Исследовать решение при $c > |b|$, $c = |b|$ и $c < |b|$.

10. На оси Ox найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $A(8; 4)$.

11. Найти центр и радиус круга, описанного около треугольника с вершинами $A(4; 3)$, $B(-3; 2)$ и $C(1; -6)$.

12. Даны точки $A(2; 6)$ и $B(0; 2)$; построить вектор $\overrightarrow{AB}$, его компоненты на осях и вычислить $\text{пр}_x \overrightarrow{AB}$, $\text{пр}_y \overrightarrow{AB}$ и длину AB .

13. В точке $A(2; 5)$ приложена сила, проекции которой на оси координат равны: $X = 3$ и $Y = 3$. Определить конец вектора $\overrightarrow{AB}$, изображающего силу, и величину силы.

14. В точке $A(-3; -2)$ приложена сила, проекция которой $Y = -1$, а проекция X положительна. Определить конец вектора $\overrightarrow{AB}$, изображающего силу, если ее величина равна $5\sqrt{2}$.

15¹⁾. На числовой оси построить точки $A(1)$, $B(-3)$ и $C(-2)$ и найти величины AB , BC и CA отрезков на оси. Проверить, что $AB + BC + CA = 0$.

16. На плоскости построить точки $A(-7; 0)$ и $B(0; 1)$ и точки A_1 и B_1 , симметричные точкам A и B относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Вычислить периметр трапеции ABB_1A_1 .

17. На оси ординат найти точку, одинаково удаленную от начала координат и от точки $A(-2; 5)$.

18. На оси абсцисс найти точку, удаленную от точки $A(-2; 3)$ на $3\sqrt{5}$ единиц.

19. Определить центр и радиус круга, описанного около треугольника с вершинами $A(-3; -1)$, $B(5; 3)$ и $C(6; -4)$.

20. Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. В начале координат приложены силы, изображаемые векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Построить их равнодействующую $\overrightarrow{OC}$ и доказать, что проекция равнодействующей на координатную ось равна сумме проекций составляющих на ту же ось.

21. Даны точки $A(1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(5; 2)$ и $D(2; -2)$. В точке A приложены силы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Найти проекции на оси координат равнодействующей силы и ее величину.

¹⁾ В каждом параграфе после черты приведены задачи, которые рекомендуются для задания на дом или для повторений.

§ 2. Деление отрезка в данном отношении.

Площадь треугольника и многоугольника

1°. Деление отрезка в данном отношении. Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Координаты точки $M(x; y)$, делящей отрезок AB в отношении $AM : MB = \lambda$, определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (1)$$

В частности, при делении пополам, т. е. в отношении $\lambda = 1 : 1 = 1$,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (2)$$

2°. Площадь многоугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, ..., $F(x_n; y_n)$ равна

$$S = \pm \frac{1}{2} \left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} \right]. \quad (3)$$

Выражение вида $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ равно $x_1 y_2 - x_2 y_1$ и называется *определителем второго порядка*¹⁾.

22. Построить точки $A(-2; 1)$ и $B(3; 6)$ и найти точку $M(x; y)$, делящую AB в отношении $AM : MB = 3 : 2$.

23. Даны точки $A(-2; 1)$ и $B(3; 6)$. Разделить отрезок AB в отношении $AM : MB = -3 : 2$.

24. В точках $A(x_1)$ и $B(x_2)$ оси Ox помещены массы m_1 и m_2 . Найти центр масс этой системы.

25. В точках $A(x_1)$, $B(x_2)$ и $C(x_3)$ оси Ox помещены соответственно массы m_1 , m_2 и m_3 . Показать, что центр масс этой системы будет в точке $x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$.

26. На концы однородного стержня длиной 40 см и массой 500 г насажены шары массой 100 г и 400 г. Определить центр масс этой системы.

27. В точках $A(-2; 4)$, $B(3; -1)$ и $C(2; 3)$ помещены соответственно массы 60 г, 40 г и 100 г. Определить центр масс этой системы.

28. Определить середины сторон треугольника с вершинами $A(2; -1)$, $B(4; 3)$ и $C(-2; 1)$.

29. В треугольнике с вершинами $O(0; 0)$, $A(8; 0)$ и $B(0; 6)$ определить длину медианы OC и биссектрисы OD .

¹⁾ Об определителях подробно изложено в гл. 4, § 1.

30. Найти центр масс треугольника с вершинами $A(1; -1)$, $B(6; 4)$ и $C(2; 6)$.

Указание. Центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан.

31. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(2; 0)$, $B(5; 3)$ и $C(2; 6)$.

32. Показать, что точки $A(1; 1)$, $B(-1; 7)$ и $C(0; 4)$ лежат на одной прямой.

33. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(6; 3)$ и $D(5; -2)$.

34. В точках $A(-3; -1)$ и $B(4; 6)$ приложены параллельные силы, соответственно равные 30 Н и 40 Н. На отрезке AB найти точку приложения равнодействующей.

35. В точках $O(0; 0)$, $A(2; -5)$ и $B(4; 2)$ помещены соответственно массы 500 г, 200 г и 100 г. Определить центр масс этой системы.

36. В треугольнике с вершинами $A(-2; 0)$, $B(6; 6)$ и $C(1; -4)$ определить длину биссектрисы AE .

37. Найти центр масс треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$.

38. Найти центр масс четырехугольной однородной доски с вершинами $A(-2; 1)$, $B(3; 6)$, $C(5; 2)$ и $D(0; -6)$.

Указание. По формулам, полученным в задаче 37, найти центры масс треугольников ABC и ADC и разделить расстояние между ними в отношении, обратном отношению площадей треугольников.

39. Даны точки $A(1; 2)$ и $B(4; 4)$. На оси Ox определить точку C так, чтобы площадь $\triangle ABC$ была равна 5, и построить $\triangle ABC$.

40. В треугольнике с вершинами $A(-2; 2)$, $B(1; -4)$ и $C(4; 5)$ каждая сторона продолжена в направлении обхода периметра против часовой стрелки на одну треть своей длины. Определить концы M , N и P продолжений сторон и найти отношение k площади $\triangle MNP$ к площади $\triangle ABC$.

§ 3. Уравнение линии как геометрического места точек

Уравнением линии называется уравнение с переменными x и y , которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и только они.

Входящие в уравнение линии переменные x и y называются *текущими координатами*, а буквенные постоянные — *параметрами*. Например, в уравнении окружности (задача 41) $x^2 + y^2 = R^2$ переменные x и y — текущие координаты, а постоянная R — параметр.

Чтобы составить уравнение линии как геометрического места точек, обладающих одинаковым свойством, нужно:

- 1) взять произвольную (текущую) точку $M(x; y)$ линии;
- 2) записать равенством общее свойство всех точек M линии;
- 3) входящие в это равенство отрезки (и углы) выразить через текущие координаты точки $M(x; y)$ и через данные в задаче.

41. Показать, что уравнением окружности с радиусом R и с центром в начале координат будет $x^2 + y^2 = R^2$.

42. Написать уравнение окружности с центром $C(3; 4)$ и радиусом $R = 5$. Лежат ли на этой окружности точки $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$, $O(0; 0)$ и $D(4; 1)$?

43. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, равноудаленная от точек $A(0; 2)$ и $B(4; -2)$. Лежат ли на этой линии точки $C(-1; 1)$, $D(1; -1)$, $E(0; -2)$ и $F(2; 2)$?

44. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое дальше от точки $A(0; 9)$, чем от точки $B(0; 1)$.

45. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(-1; 1)$, чем к точке $B(-4; 4)$.

46. Написать уравнения биссектрис координатных углов.

47. Написать уравнение геометрического места точек, сумма расстояний от каждой из которых до точек $F(2; 0)$ и $F_1(-2; 0)$ равна $2\sqrt{5}$. Построить линию по ее уравнению.

48. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от точки $F(2; 2)$ и от оси Ox . Построить линию по ее уравнению.

49. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox , чем от оси Oy .

50. Построить линии: 1) $y = 2x + 5$; 2) $y = 7 - 2x$; 3) $y = 2x$; 4) $y = 4$; 5) $y = 4 - x^2$.

51. Определить точки пересечения линии $y = x^2 - 4x + 3$ с осями координат и построить ее.

52. Определить точки пересечения с осями координат линий: 1) $3x - 2y = 12$; 2) $y = x^2 + 4x$; 3) $y^2 = 2x + 4$. Построить эти линии.

53. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси Oy и от точки $F(4; 0)$, и построить линию по ее уравнению.

54. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, равноудаленная от начала координат и от точки $A(-4; 2)$. Лежат ли на этой линии точки $B(-2; 1)$, $C(2; 3)$, $D(1; 7)$?

55. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $A(0; -1)$, чем к точке $B(0; 4)$. Построить траекторию движения.

56. Определить точки пересечения с осями координат линий: 1) $2x + 5y + 10 = 0$; 2) $y = 3 - 2x - x^2$; 3) $y^2 = 4 - x$. Построить линии.

57. Написать уравнение геометрического места точек, равноудаленных от оси Ox и от точки $F(0; 2)$, и построить линию по ее уравнению.

58. Написать уравнение геометрического места точек, разность расстояний от каждой из которых до точек $F_1(-2; -2)$ и $F(2; 2)$ равна 4. Построить линию по ее уравнению.

§ 4. Уравнение прямой: 1) с угловым коэффициентом, 2) общее, 3) в отрезках на осях

1°. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b. \quad (1)$$

Параметр k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси Ox ($k = \operatorname{tg} \alpha$) и называется *угловым коэффициентом*, или иногда *наклоном* прямой. Параметр b — величина отрезка на оси Oy , или *начальная ордината*.

2°. Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0. \quad (2)$$

Особые случаи:

а) при $C = 0$ $y = -\frac{A}{B}x$ — прямая проходит через начало координат;

б) при $B = 0$ $x = -\frac{C}{A} = a$ — прямая параллельна оси Oy ;

в) при $A = 0$ $y = -\frac{C}{B} = b$ — прямая параллельна оси Ox ;

г) при $B = C = 0$ $Ax = 0$, $x = 0$ — ось Oy ;

д) при $A = C = 0$ $By = 0$, $y = 0$ — ось Ox .

3°. Уравнение прямой в отрезках на осях

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (3)$$

где a и b — величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

59. Построить прямую, отсекающую на оси Oy отрезок $b = 3$ и составляющую с осью Ox угол: 1) 45° ; 2) 135° . Написать уравнения этих прямых.

60. Построить прямую, отсекающую на оси Oy отрезок $b = -3$ и составляющую с осью Ox угол: 1) 60° ; 2) 120° . Написать уравнения этих прямых.

61. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и составляющей с осью Ox угол: 1) 45° ; 2) 60° ; 3) 90° ; 4) 120° ; 5) 135° .

62. Построить прямую, проходящую через начало координат и через точку $(-2; 3)$, и написать ее уравнение.

63. Определить параметры k и b для каждой из прямых:

1) $2x - 3y = 6$; 2) $2x + 3y = 0$; 3) $y = -3$; 4) $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

64. Построить прямые:

1) $3x + 4y = 12$; 2) $3x - 4y = 0$; 3) $2x - 5 = 0$; 4) $2y + 5 = 0$.

65. Определить параметры k и b прямой, проходящей через точку $A(2; 3)$ и составляющей с Ox угол 45° . Написать уравнение этой прямой.

66. Уравнения прямых: 1) $2x - 3y = 6$; 2) $3x - 2y + 4 = 0$ привести к виду в отрезках на осях.

67. Даны точки $O(0; 0)$ и $A(-3; 0)$. На отрезке OA построен параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке $B(0; 2)$. Написать уравнения сторон и диагоналей параллелограмма.

68. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(4; 3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью, равной 3.

69. Прямые $y = -2$ и $y = 4$ пересекают прямую $3x - 4y - 5 = 0$ соответственно в точках A и B . Построить вектор $\vec{AB}$, определить его длину и его проекции на оси координат.

70. Лежат ли точки $A(3; 5)$, $B(2; 7)$, $C(-1; -3)$ и $D(-2; -6)$ на прямой $y = 2x - 1$ или же они «выше» или «ниже» этой прямой?

71. Каков геометрический смысл неравенств:

1) $y > 3x + 1$; 2) $y < 3x + 1$; 3) $2x + y - 4 \geq 0$; 4) $2x + y - 4 < 0$?

72. Построить области¹⁾, координаты точек которых удовлетворяют неравенствам:

1) $y < 2 - x$, $x > -2$, $y > -2$;

2) $y > 2 - x$, $x < 4$, $y < 0$;

3) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} \leq 1$, $y \geq x + 2$, $x \geq -4$.

73. Точка $M(x; y)$ движется так, что разность квадратов расстояний от нее до точек $A(-a; a)$ и $B(a; -a)$ остается равной $4a^2$. Написать уравнение ее траектории.

¹⁾ Слово «область» здесь означает часть плоскости xOy , координаты каждой точки которой удовлетворяют некоторым условиям (например, неравенствам). Область называется *замкнутой*, если в нее включены точки, лежащие на границе области. В противном случае область называется *открытой*.

74. Написать уравнение траектории точки $M(x; y)$, проекция которой на ось Ox движется со скоростью m ед/с, а на ось Oy — со скоростью n ед/с. Начальное положение точки $M_0(a; b)$.

75. Построить прямые, заданные параметрами: 1) $b = -2$, $\varphi = 60^\circ$ и 2) $b = -2$, $\varphi = 120^\circ$, и написать их уравнения.

76. Определить параметры k и b прямой, проходящей через точку $(-2; 3)$ и составляющей с Ox угол 45° . Построить прямую и написать ее уравнение.

77. Равнобедренная трапеция с основаниями 8 см и 2 см имеет острый угол 45° . Написать уравнения сторон трапеции, приняв за ось Ox большее основание и за ось Oy — ось симметрии трапеции.

78. Написать уравнения сторон ромба с диагоналями 10 см и 6 см, приняв большую диагональ за ось Ox и меньшую — за ось Oy .

79. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(-4; 6)$ и отсекающей от осей координат треугольник площадью 6.

80. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, оставаясь вдвое дальше от оси Ox , чем от прямой $x = -3$.

81. Прямые $x = -1$ и $x = 3$ пересекают прямую $y = 2x + 1$ в точках A и B . Определить длину вектора $\overline{AB}$ и его проекции на оси координат.

§ 5. Угол между прямыми. Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Точка пересечения двух прямых

1°. Угол φ , отсчитанный против часовой стрелки от прямой $y = k_1x + b_1$ до прямой $y = k_2x + b_2$, определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \quad (1)$$

Для прямых, заданных уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

формула (1) примет вид

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Условие *параллельности*: $k_1 = k_2$ или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Условие *перпендикулярности*: $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.