

В. И. Смирнов

Теория определителей и ее приложения

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
В11

В11 **В. И. Смирнов**
Теория определителей и ее приложения / В. И. Смирнов – М.: Книга по Требованию, 2024. – 89 с.

ISBN 978-5-458-56733-6

Часть курса математики прочитанного на физическом отделении Л. Г. У.

ISBN 978-5-458-56733-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

са - в первый, а в общем будет опять вся совокупность перестановок. Отсюда следует, что число перестановок 1^{1^0} и 2^{1^0} класса одинаково.

Следствие 2^{2^0} . В основной перестановке число беспорядков ноль; всякая другая перестановка м.б. получена из основной путем нескольких инверсий. Из упомянутой теоремы вытекает, что число этих инверсий для перестановок 1^{1^0} класса обязательно четно, а для перестановок 2^{1^0} класса - нечетно.

Следствие 3^{2^0} . Если теперь изменить выбор основной перестановки, то получится следующий результат. Если за новую основную перестановку взять какую-нибудь перестановку 1^{1^0} класса, то перестановки 1^{1^0} класса останутся в 1^M , а перестановки 2^{1^0} - во 2^M ; если же за новую основную перестановку взять какую-нибудь перестановку 2^{1^0} класса, то перестановки 1^{1^0} класса окажутся во 2^M классе и наоборот.

Возьмем какую-нибудь перестановку $a, b, c, \dots, 1$ и обозначим символом $[a, b, c, \dots, 1]$ число беспорядков в этой перестановке

$(-1)^{[a, b, c, \dots, 1]} = 1$ если перестановка 1^{1^0} класса и $= -1$, если перестановка 2^{1^0} класса.

В дальнейшем роль элементов будут играть перенумерованные числа $1, 2, 3, \dots, n$ и почти всегда за основную перестановку мы будем брать перестановку $1, 2, 3, \dots, n$.

2. О п р е д е л е н и е о п р е д е л и т е л я .

Пусть имеется n^2 чисел, расставленных в виде квадратной таблицы

a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}
a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2n}
a_{31}	a_{32}	a_{33}		a_{3n}
-	-	-	-	-
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}		a_{nn}

Числа таблицы I обозначены буквой a с 2-мя значками; первый значок дает номер строки и второй - номер столбца.

в котором стоит число.

Составим произведение из n чисел таблицы I так, чтобы в это произведение входило по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца. Пусть это будет

$$a_{k_1 1}, a_{k_2 2}, \dots, a_{k_n n}$$

первые значки дадут некоторую перестановку $k_1, k_2, \dots, k_n$ из n элементов $1, 2, \dots, n$. Точно также и вторые значки дадут перестановку $l_1, l_2, \dots, l_n$.

Принимем к составленному произведению знак, а именно возьмем:

$$(-1)^{[k_1, k_2, \dots, k_n] + [l_1, l_2, \dots, l_n]} a_{k_1 1}, a_{k_2 2}, \dots, a_{k_n n}$$

Если в составленном произведении переставить между собой два множителя, то произойдет инверсия как в перестановке из значков k , так и в перестановке из значков l ; поэтому в показателе у (-1) оба слагаемые изменятся на нечетное число, а весь показатель изменится на четное, а степень (-1) останется прежней. Итак, при составлении описанного выражения не важен порядок множителей, в произведении, а важно лишь, какие числа из таблицы I составляют это произведение.

Сумма всех возможных выражений описанного вида называется определителем таблицы (I) .

$$\Delta = \sum (-1)^{[k_1, k_2, \dots, k_n] + [l_1, l_2, \dots, l_n]} a_{k_1 1}, a_{k_2 2}, \dots, a_{k_n n} \quad (1)$$

Переставляя сомножители в формуле (1) можем добиться того, чтобы в каждом произведении первые значки стояли в естественном порядке $1, 2, 3, \dots, n$, который мы принимаем за основной; тогда получим для определителя выражение

$$\Delta = \sum_{[l_1, l_2, \dots, l_n]} (-1)^{[l_1, l_2, \dots, l_n]} a_{1 l_1}, a_{2 l_2}, \dots, a_{n l_n} \quad (2)$$

Здесь суммирование распространяется на всевозможные перестановки из вторых значков и отсюда видно, между прочим, что число слагаемых будет $n!$.

Совершенно также мы могли бы в каждом произведении *поставить вторые значки в естественном порядке* и получить выражение:

$$\Delta = \sum_{[k_1, k_2, \dots, k_n]} (-1)^{[k_1, k_2, \dots, k_n]} a_{k_1, 1} a_{k_2, 2} \dots a_{k_n, n} \dots \dots \dots (3)$$

Здесь суммирование распространяется на всевозможные перестановки из первых значков.

Величина определителя, соответствующего таблице (I) часто обозначается так (таблица заключается между вертикальными чертами):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6)$$

3. Свойства определителя

I. Из формул (2) и (3) видно, что при конструировании определителя строки и столбы играют одинаковую роль. Отсюда следует, что величина определителя не изменится, если переставить между собой строки и столбы, сохраняя их порядок.

Заметим еще, что все доказанное для строк будет тем самым годиться и для столбцов.

II. Переставим в таблице (I) между собой первую и вторую строки; посмотрим, как это скажется на величине определителя. После указанной перестановки нам, собственно говоря, надо в первых значках вместо 1 и 2 , по-прежнему оставить 1

прежние значки, но только считать для первых значков основной перестановкой не перестановку $1, 2, 3, \dots, n$, а перестановку $2, 1, 3, 4, \dots, n$. Эта новая основная перестановка прежде была во $2^{\text{м}}$ классе, а потому прежние перестановки $2^{\text{го}}$ класса попадут в 1-ый и наоборот. Если обратимся к формуле (3) то увидим, что результатом упомянутой перестановки 1-ой и 2-ой строки будет лишь тот факт, что в каждом слагаемом множитель $(-1)^{[k_1, k_2, \dots, k_n]}$ переменит знак, а потому и вся сумма, т.е. величина определителя переменит лишь знак. Это рассуждение годится при перестановке любых двух строк. Итак, в р и е р е с т а н о в к е д в у х с т р о к (с т о л б ц о в) м е ж д у с о б о ю в е л и ч и н а о п р е д е л и т е л я м е н я е т л и ш ь з н а к .

III. Если определитель имеет две одинаковые строки, то переставляя их и, с одной стороны, ничего не изменим, а с другой стороны, по доказанному, переменит знак определителя, т.е. $\Delta = -\Delta$; $\Delta = 0$.

Итак, о п р е д е л и т е л ь с д в у м я о д и н а к о в ы м и с т р о к а м и (с т о л б ц а м и) р а в е н н у л ю .

IV. Линеарной однородной функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется полином 1-ой степени этих переменных без свободного члена, т.е. выражение вида:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

где коэффициенты α не содержат x .

Такая функция обладает двумя очевидными свойствами:

- а) $\varphi(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- б) $\varphi(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n)$

Последнее свойство сразу вытекает из тождества

$$\alpha_1(x_1 + y_1) + \alpha_2(x_2 + y_2) + \dots + \alpha_n(x_n + y_n) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n.$$

Это свойство годится и для любого числа слагаемых.

Обращаясь к формуле (3) мы видим, что каждое слагаемое написанной суммы содержит множителем один элемент некоторой k -той строки; отсюда следует, что величина определителя есть линейная однородная функция элементов какой-нибудь строки или какого-нибудь из столбцов.

Следовательно: если элементы некоторой строки (столбца) содержат общего множителя λ , то его можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Второе из указанных свойств линейных однородных функций дает следующее свойство определителя: если элементы некоторой строки (столбца) суть сумма равного числа слагаемых, то величина определителя равна сумме определителей, в которых элементы упомянутой строки (столбца) заменены отдельными слагаемыми.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Отметим еще очевидное свойство линейности и однородности:

Если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то и определитель равен нулю.

V. Определитель, состоящий из n строк и n столбцов называется определителем n -того порядка.

Если из определителя n -того порядка вычеркнуть i -тую строку и k -тый столбец, на пересечении которых находится элемент a_{ik} , то останется $n-1$ строк и $n-1$ столбцов, которые дадут определитель $n-1$ го порядка; этот определитель называется минором данного определителя соответствующим элементу a_{ik} .

Обозначим его через Δ_{ik}

Произведение $(-1)^{i+k} \Delta_{ik}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ik} .

Обратимся к формуле (3). Она даст величину определителя в виде суммы $n!$ слагаемых.

Рассмотрим те слагаемые этой суммы, которые содержат определенный элемент a_{ik} . Вынося его за скобку, получим при нем некоторый коэффициент A_{ik} . В этот коэффициент не будут вовсе входить элементы i -той строки и k -того столбца, ибо каждое произведение в сумме (3) содержит лишь по одному элементу из каждой строки и каждого столбца. Наша задача доказать, что этот коэффициент A_{ik} равен алгебраическому дополнению a_{ik} .

Рассмотрим случай $i=k=1$. Выпишем те слагаемые суммы (3), которые содержат a_{11} .

$$\sum_{[k_2, k_3, \dots, k_n]} (-1)^{[1, k_2, k_3, \dots, k_n]} a_{11} a_{k_2 2} a_{k_3 3} \dots a_{k_n n}$$

Здесь суммирование должно распространяться на всевозможные перестановки $k_2, k_3, \dots, k_n$, из чисел $2, 3, \dots, n$. В перестановке $1, k_2, k_3, \dots, n$ первый элемент, единица по отношению ко всем следующим находится в порядке,

поэтому:

$$[1, k_2, k_3, \dots, k_n] = [k_2, k_3, \dots, k_n],$$

при чем за основную перестановку в обоих случаях берется та, где числа идут в возрастающем порядке мы имеем:

$$A_{11} = \sum_{[k_2, k_3, \dots, k_n]} (-1)^{[k_2, k_3, \dots, k_n]} a_{k_2 2} a_{k_3 3} \dots a_{k_n n}$$

Эта сумма подходит под определение определителя но только по сравнению с исходным определителем Δ отсутствует 1-ая строка и 1-ый столбец, т.е

$$A_{11} = \Delta_{11} = (-1)^{1+1} \Delta_{11}.$$

Отсюда видно, что A_{11} есть действительно алгебраическое дополнение элемента a_{11}

Надо доказать то же самое для любого A_{ik} .

Будем постепенно переставлять i -тую строку с более высокими строками так, чтобы i -тая строка попала на 1-ое место; придется сделать $i-1$ перестановок строк. Затем совершенно также будем переставлять k -тый столбец так, чтобы он попал на 1-ое место. После этих перестановок элемент a_{ik} окажется в левом верхнем углу на месте элемента a_{11} . i -тая строка и k -тый столбец окажутся первыми, а порядок остальных строк и столбцов не изменится.

Полученный только что результат показывает, что коэффициент при a_{ik} после упомянутых перестановок равен Δ_{ik} . Но пришлось переменить $(i-1)+(k-1)$ перестановок строк и столбцов попарно, а каждая перестановка даст множитель -1 , т.е. от перестановки получится множитель $(-1)^{(i-1)+(k-1)} = (-1)^{i+k}$

$$A_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{(-1)^{i+k}} = \frac{(-1)^{i+k} \Delta_{ik}}{(-1)^{2(i+k)}} = (-1)^{i+k} \Delta_{ik}.$$

что и требовалось доказать.

Итак, если в сумме, дающей определитель, взять слагаемые, содержащие некоторый элемент a_{ik} и вынести a_{ik} за скобки, то коэффициент при a_{ik} окажется равным алгебраическому дополнению этого элемента.

В дальнейшем символом A_{ik} будем обозначать алгебраическое дополнение a_{ik} .

VI. Мы знаем, что определитель есть линейная однородная функция элементов какойнибудь строки или какогонибудь столбца и можем написать формулу:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} & \text{a)} \\ (i &= 1, 2, 3, \dots, n) \\ \Delta &= a_{1k} A_{1k} + a_{2k} A_{2k} + \dots + a_{nk} A_{nk} & \text{б)} \\ (k &= 1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Если в формуле (4а) заменить множители $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ на другие $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}$ $j \neq i$, а множители A_{is} оставить прежними, то это будет равносильно тому, что в i -той строке определителя написать элементы j -той строки, а остальные строки оставить прежними.

($A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ как раз содержат элементы определителя, кроме элементов i -той строки).

Но после этого у определителя окажется две одинаковые строки j -тая и i -тая, и величина определителя будет ноль.

То же будет и для столбцов.

$$\left. \begin{aligned} j \neq i; 0 &= a_{j1} A_{i1} + a_{j2} A_{i2} + \dots + a_{jn} A_{in} \\ l \neq k; 0 &= a_{1l} A_{1l} + a_{2l} A_{2l} + \dots + a_{nl} A_{nl} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (5)}$$

Если элементы некоторой

строки (столбца) умножить на их алгебраическое дополнение и эти произведения сложить, то получится величина определителя. Если же элементы некоторой строки (столбца) умножить на алгебраическое дополнение соответствующих элементов другой строки (столбца) и эти произведения сложить, то сумма будет ноль.

VII. Прибавим к элементам 1-ой строки Δ соответствующие элементы второй строки, умноженные на некоторый множитель λ ; тогда элементы 1-ой строки будут

$$a_{11} + \lambda a_{21}, a_{12} + \lambda a_{22} \dots a_{1n} + \lambda a_{2n}$$

В силу свойства (IV) новый определитель будет суммой двух определителей: прежнего определителя и такого определителя, у которого в первой строке будет:

$$\lambda a_{21}, \lambda a_{22}, \lambda a_{23}, \dots, \lambda a_{2n}$$

Внося λ за знак определителя, видим, что в этом добавочном определителе 2-ая и 1-ая строки одинаковы, т.е. это добавочное слагаемое — ноль и новый определитель по величине равен прежнему, т.е. вообще:

Величина определителя не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив эти последние на один и тот же множитель.

4.0 п р е д е л и т е л и 2-го и 3-го п с -
р я д к а.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}; \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc;$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{11} a_{32} a_{23} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{31} a_{22} a_{13}$$

Нетрудно видеть, что определитель 3-го порядка можно получить так: выписываем таблицу, дающую определитель, и подписываем под него еще раз 1-ую и 2-ую строку. Будем иметь таблицу (*), содержащую шесть

$$(*) \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

диагоналей по три элемента в каждой. Берем произведения элементов, стоящих на диагоналях, подчеркнутых сплошной чертой (пунктиром), с собственным знаком (с обратным знаком). Сумма

этих шести произведений и дает определитель.

Б. В ы ч и с л е н и е о п р е д е л и т е л я
и п р и м е р ы.

Формулы (4), как говорят, дают разложение определителя по элементам некоторой строки (столбца). Положим, что все элементы i -той строки, кроме одного a_{ik} , равны нулю.

Тогда (формула 4) определитель будет

$$\Delta = a_{ik} A_{ik}$$

и дело сведется к вычислению A_{ik} , а это есть с точностью до знака определитель порядка $n-1$ на единицу ниже исходного.

Итак, надо уметь создавать в некоторой строке (столбце) нули, кроме одного элемента; а это делает-