**Л. Эйлер**

# Дифференциальное исчисление

## Серия "Классики естествознания"

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Л11

**Л. Эйлер**
Л11 Дифференциальное исчисление: Серия "Классики естествознания" / Л. Эйлер – М.: Книга по Требованию, 2023. – 580 с.

**ISBN 978-5-458-50398-3**

В 1755 г. Петербургская Академия Наук выпустила в свет одно из самых замечательных произведений математической литературы—-«Дифференциальное исчисление», принадлежащее перу члена Петербургской Академии Леонарда Эйлера. Как и большинство научных трудов в эту эпоху, оно было написано на латинском языке. Русский его перевод появляется сейчас впервые. По этому произведению в течение целого столетия учились математики всего мира; особенно сильное влияние оказало оно на преподавание и развитие математики в России. И хотя в наше время труд Эйлера уже не может служить учебником дифференциального исчисления, однако и теперь он представляет большой интерес. Богатство содержания, изумительное мастерство приёмов, гениальная изобретательность в решении труднейших вопросов, величавая простота изложения и несравненные педагогические достоинства — всё это делает чтение «Дифференциального исчисления» чрезвычайно поучительным и вместе с тем увлекательным для учащегося и для педагога, для математика и для историка науки.

**ISBN 978-5-458-50398-3**

# ВСТУПИТЕЛЬНОЕ СЛОВО К «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ» Л. ЭЙЛЕРА

***М. Я. Выгодский***

1. В 1755 г. Петербургская Академия Наук выпустила в свет одно из самых замечательных произведений математической литературы — «Дифференциальное исчисление», принадлежащее перу члена Петербургской Академии Леонарда Эйлера. Как и большинство научных трудов в эту эпоху, оно было написано на латинском языке. Русский его перевод появляется сейчас впервые. По этому произведению в течение целого столетия учились математики всего мира; особенно сильное влияние оказало оно на преподавание и развитие математики в России[1]). И хотя в наше время труд Эйлера уже не может служить учебником дифференциального исчисления, однако и теперь он представляет большой интерес. Богатство содержания, изумительное мастерство приёмов, гениальная изобретательность в решении труднейших вопросов, величавая простота изложения и несравненные педагогические достоинства — всё это делает чтение «Дифференциального исчисления» чрезвычайно поучительным и вместе с тем увлекательным для учащегося и для педагога, для математика и для историка науки.

Сочинения многих классиков математической мысли трудно доступны, особенно читателю, удалённому от эпохи их созидания на столетия. Чтобы разобраться в творениях Ферма, Декарта, Ньютона, Лейбница, Гаусса, нужно затратить большой труд, для облегчения которого нужны обстоятельные комментарии. Произведения Эйлера не таковы. Ход мысли автора в них всегда ясен; часто, правда, его рассуждения не могут нас убедить, но всегда видно, как думал Эйлер и чего нехватает в его рассуждениях. Поэтому «Дифференциальное исчисление» Эйлера почти не нуждается в комментариях частного характера. Там, где они казались переводчику необходимыми, он их давал в коротких сносках.

Но «Дифференциальное исчисление» представляет большую книгу, чтение которой от начала до конца потребует большого времени. Между тем, многим читателям, которые не будут иметь возможности

---

[1]) В рамках этой статьи нет возможности охарактеризовать значение Эйлера в истории математики вообще и в истории русской математики в частности. Мы отсылаем читателя к сборнику «Леонард Эйлер», изданному Академией Наук СССР в 1933 г., и к статье А. П. Юшкевича «Л. Эйлер и русская математика в XVIII в.» («Труды Института истории естествознания», т. III, 1949).

прочесть это сочинение целиком, будет интересно воспользоваться им как хрестоматией по истории математики в XVIII в., как собранием замечательных образцов аналитического мастерства или с иными целями. Эти читатели нуждаются в общем обзоре произведения. В настоящей статье такой обзор и даётся. Но для того, чтобы читателю — даст ли он себе труд изучить произведение Эйлера полностью или пожелает ограничиться тем, что наиболее его заинтересует—были ясны позиции автора, его отношение к предшественникам и значение его работы для последующего развития науки, я сначала постараюсь в кратких чертах охарактеризовать историческую обстановку и отметить отличительные особенности стиля Эйлера.

2. Дифференциальное и интегральное *исчисления*, если сделать ударение на последнем слове, были созданы Ньютоном и Лейбницем в 70—80-х годах XVII в. К этому времени основные идеи анализа были уже хорошо разработаны. Опираясь на работы древнегреческих математиков, в первую очередь Архимеда, авторы XVII в.—Кеплер, Галилей, Кавальери, Торичелли, Ферма, Паскаль, Валлис и другие — систематически развили процессы интегрирования и дифференцирования. Эти операции не были ещё облечены в отвлечённую форму. Они рассматривались в неразрывной связи с геометрическими и механическими задачами. Но общность этих операций отчётливо сознавалась. Так, задачи спрямления кривой и нахождения центра тяжести тела сводили к задаче квадратуры (определению площади, порождённой движением ординаты данной кривой), а для выполнения квадратур были указаны общие методы, по существу тождественные с методами интегрального исчисления. Правда, эти методы охватывали сравнительно узкий класс кривых, т. е., выражаясь по-современному, до Ньютона и Лейбница математики умели вычислять интегралы сравнительно узкого класса функций. Но это был недостаток техники, над преодолением которого успешно работали.

Понятие производной функции также выступало в геометрической и механической форме: отыскивали скорости по заданному закону движения; находили подкасательную кривой, заданной уравнением в декартовых координатах. Зная длину подкасательной, можно построить касательную. Отношение же ординаты к подкасательной есть не что иное, как производная ординаты относительно абсциссы; хотя это отношение и не привлекало особого внимания предшественников Ньютона и Лейбница, мы всё же вправе сказать, что здесь в геометрической форме выступает понятие производной, ибо ведь принципиально не важно, рассматривается ли функция $\frac{dy}{dx}$ или функция $\frac{ydx}{dy}$, дающая длину подкасательной.

Самое понятие функции в отвлечённой его форме не было ещё высказано. Но уже метод графического представления, который составляет основную идею «Геометрии» Декарта и который систематически применялся задолго до Декарта Галилеем (не говоря о более ранних предвосхищениях),— уже этот метод по существу обнаруживает наличие общего понятия функциональной зависимости.

Задачи дифференцирования и интегрирования рассматривались каждая по отдельности; первая — как задача о касательной, вторая — как задача о площади. Но уже Ферма, как видно из черновых его заметок, понимал взаимно-обратный характер этих задач. Учитель Ньютона Барроу доказал эту взаимную обратность, оставаясь на почве геометрического представления об интегрировании, как о квадратуре, и о дифференцировании, как проведении касательной.

Нельзя на одной-двух страницах дать сколько-нибудь полное представление о своеобразии инфинитезимальных методов XVII в., но уже из изложенного можно видеть, как много ещё оставалссь сделать Ньютону и Лейбницу для того, чтобы эти методы получили ту глубину и широту, которой обладает исчисление бесконечно малых. Сейчас будет сказано, что было ими сделано.

**3.** В шестидесятых годах XVII в. алгебра обладала уже той символикой, которой мы пользуемся и сейчас. Между тем интегрирование и дифференцирование, выполнявшиеся, как сказано, в геометрической форме, не имели ещё никакого или почти никакого алгоритма.

Ньютон и Лейбниц, независимо друг от друга, использовали аппарат алгебраической символики и создали такой алгоритм. Обозначения Лейбница стали вскоре общепринятыми. Мы пользуемся ими и сейчас. Обозначения Ньютона были иными. Хотя они несколько уступали лейбницевым, но в общем достигали той же цели: методы интегрирования и дифференцирования были облечены в форму *исчисления*.

Символическое оформление позволило отвлечь основные инфинитезимальные понятия от их геометрического и механического овеществления. Хотя и Ньютон и Лейбниц постоянно связывают свой алгоритм с геометрической и механической картиной и зачастую существенно опираются на интуицию, но отвлечённые понятия *переменного количества и функции* (Ньютон говорит «отнесённое количество» и «соотнесённое количество», но наименование не играет, конечно, роли) отчётливо выставлены на первый план.

Человеку нашей эпохи этот шаг или, лучше сказать, скачок, может показаться мало значительным; ведь и алгебраическая символика уже существовала, и основные операции и даже связь между ними были изучены и нашли многообразные применения. Велика ли заслуга объединить эти элементы? К этому можно было бы добавить ещё, что у предшественников Ньютона и Лейбница (Ферма, Барроу и др.) уже были попытки облечь в символическую форму операции интегрирования и дифференцирования.

Может быть, и сами творцы нового исчисления не придавали большого значения этому своему открытию. Но на самом деле это было открытие величайшей важности. А что создание хорошей удобной символики было не столь лёгким делом, видно хотя бы из тех сохранившихся черновых записей Лейбница, где он делал первые попытки создания этой символики. Так, дифференциал функции $y$ Лейбниц обозначал сначала через $\frac{y}{d}$, а интеграл её через $\int y$. Легко видеть, что эти обозначения не выдерживают никакого сравнения с позднейшими обозначениями Лейбница, ставшими почти немедленно общим достоянием математиков европейского континента.

**4.** Изобретение алгоритма исчисления бесконечно малых позволило Ньютону, Лейбницу и ученикам Лейбница Якову и Иоганну Бернулли в течение нескольких лет получить поразительно большое число очень важных новых результатов.

Прежде всего техника дифференцирования и интегрирования была развита почти до тех пределов, в которых мы ею владеем теперь. Повторное дифференцирование функций, которое как бы само напрашивалось на перо вычислителя, позволило без труда решать ряд задач, которые представляли прежде большие трудности, как, например, задачу определения радиуса кривизны. Вообще многие задачи геометрии и механики, которые прежде доступны были лишь самым выдающимся математикам, стали теперь посильными для каждого обучившегося новому алгоритму.

В повестку дня был поставлен в общей форме вопрос об интегрировании дифференциальных уравнений, который прежде ставился лишь для очень частных случаев и удовлетворительно решался лишь в единичных случаях. Лейбниц и его ученики сразу применили разделение переменных и ряд подстановок. Как мы теперь знаем, трудности, связанные с решением дифференциальных уравнений с помощью квадратур, носят не технический, а принципиальный характер, и если усилия школы Лейбница были направлены преимущественно на разыскание решений в квадратурах, то Ньютон смело пошёл в лобовую атаку и дал общий метод, сила которого даже при тех ограничениях, которые впоследствии оказалось необходимым на него наложить, была огромной. Я имею в виду метод функциональных (по преимуществу степенных) рядов. Так как этот метод играет особенно большую роль в творчестве Эйлера, остановимся на этом вопросе несколько подробнее.

**5.** Когда Ньютон начинал свою деятельность, интеграционные методы, созданные его предшественниками, позволяли выполнять квадратуры, равносильные вычислению интегралов вида

$$\int (a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \ldots + a_k x^{m_k})\, dx, \qquad (1)$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_k$ суть любые числа.

В основе этого интегрирования лежало правило, равносильное формуле

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}. \qquad (2)$$

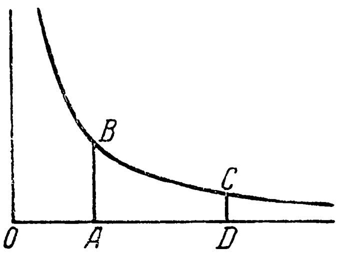

Рис. 1.

Один только случай $m = -1$ не укладывался в эту формулу. Задача вычисления интеграла $\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x}$ на языке математиков XVII в. формулировалась как задача разыскания площади $A, B, C, D$ (рис. 1), описываемой ординатой гиперболы $xy = 1$.

Ферма, исходя из инфинитезимальных геометрических соображений, заметил, что площадь $ABCD$ растёт в арифметической прогрессии, когда абсцисса $x = OD$ растёт в геометрической прогрессии. Если мы примем во внимание, что в то время это свойство клалось в основу определения и вычисления логарифмов, то будет понятно, что это открытие было равносильно установлению формулы

$$\int \frac{dx}{x} = k \lg x, \qquad (3)$$

где $k$ — постоянный множитель, величина которого зависит, как мы сказали бы теперь, от основания, по которому берутся логарифмы, т. е. от того числа, которому в упомянутом соответствии двух прогрессий отвечает логарифм, равный 1. Если пользоваться десятичными логарифмами, то $k = \ln 10 \approx 2{,}718\ldots$ Таким образом, имея таблицу логарифмов, можно было найти квадратуру гиперболы.

Хотя такие таблицы, и притом весьма точные и подробные, были налицо, но техника их составления была чрезвычайно утомительна. Установленная Ферма связь между квадратурой гиперболы и вычислением логарифмов, естественно, вызвала попытки разыскать алгебраическое выражение площади гиперболы, т. е., выражаясь современным языком, найти для интеграла $\int \frac{dx}{x}$ алгебраическое выражение.

Эти попытки оставались бесплодными, пока Николаю Меркатору не пришла в голову простая мысль отнести гиперболу $BC$ к другой системе координат. Если взять начало в точке $A$ с абсциссой $OA=1$, то уравнение гиперболы, как было легко усмотреть, принимает вид $y(x+1)=1$, и задача сводится к определению интеграла

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x}. \tag{4}$$

Чтобы свести этот интеграл к интегралам от степенных функций, Меркатор выполнил деление $1:(1+x)$, иными словами, представил $\frac{1}{1+x}$ как сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots \tag{5}$$

Суммированием прогрессии постоянно пользовался Ферма, но даже этот величайший математик не догадался использовать обращение этого суммирования так, как сделал это во всех отношениях средний математик Меркатор, который, не смутившись тем, что многочлен (5) имеет бесчисленное множество членов, проинтегрировал его и получил результат, равносильный формуле

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots \tag{6}$$

Об этом результате Меркатор упомянул в своей книге «Логарифмотехника», вышедшей в 1668 г.

Спустя шесть лет, Ньютон писал Лейбницу, что это и многие другие применения бесконечных рядов к интегрированию было ему известно ещё в 1665 г., но что, ознакомившись с книгой Меркатора, он потерял интерес к дальнейшим занятиям этими вопросами, предполагая, что либо сам Меркатор знает всё это, «либо другие найдут остальное прежде, чем я окажусь в состоянии написать об этом».

Если даже отнестись, как это сделал Лейбниц и вслед за ним некоторые историки, с недоверием к этому сообщению и заподозрить, что идею применения бесконечных рядов Ньютон заимствовал у Меркатора, то и тогда результаты Ньютона, которые были им сообщены Коллину тотчас после ознакомления с «Логарифмотехникой», поражают своей силой. А через два-три года в своём «Методе флюксий и бесконечных рядов» (напечатано в 1736 г., спустя 9 лет после смерти автора[1])) Ньютон дал развёрнутую картину применения рядов к инте-

---

[1]) И. Ньютон, Математические работы. Перевод проф. Д. Д. Мордухай-Болтовского, 1937, стр. 25—166.

грированию функций и к решению дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y}=f(x, y),$$

где за $f(x, y)$ можно взять любой бесконечный или конечный степенной ряд вида $\sum_k\sum_i a_{ik}x^iy^k$. А так как Ньютон умел разлагать в ряды все «элементарные функции», то практически любое дифференциальное уравнение оказывалось, таким образом, разрешённым. От внимания Ньютона не ускользнуло, что рядами этими можно пользоваться лишь при достаточно малых значениях $x$, $y$. Но и за пределами сходимости этих рядов Ньютон находил решение дифференциальных уравнений путём введения новых переменных $x=a+x'$, $y=b+y'$. Это, разумеется, равносильно разложению $f(x, y)$ по степеням $x-a$, $y-b$.

Ньютон не ставил вопроса об определении радиуса сходимости рядов или хотя бы о доказательстве сходимости данного ряда. Он довольствовался достаточно быстрым убыванием членов ряда. Тем менее склонен был он подвергать сомнению законность почленного дифференцирования и интегрирования рядов. Лейбниц и его ученики уделяли этим вопросам несколько больше внимания. Лейбниц, например, установил признак сходимости знакопеременных рядов, и сейчас носящий его имя. Яков и Иоганн Бернулли обнаружили и доказали поразительный для этой эпохи факт расходимости гармонического ряда и других рядов с неограниченно убывающими членами.

**6.** Казалось бы, что факт существования рядов с убывающими членами, и всё же расходящихся, должен был бы предостеречь против безоговорочного перенесения на бесконечные ряды свойств многочленов. На самом деле происходит обратное; наиболее существенные открытия конца XVII и начала XVIII вв. в области исчисления бесконечно малых покоились на совершенно некритическом обращении с бесконечными рядами.

Тот же Иоганн Бернулли в поисках наиболее общего метода интегрирования в 1694 г. приходит к формуле, которую в изменённых обозначениях можно представить в виде

$$\int y\,dx=xy-\frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{dy}{dx}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^3y}{dx^3}+\ldots \tag{7}$$

Эту формулу он получает так.

Подинтегральное выражение $y\,dx$ представляется в виде

$$\begin{gathered}y\,dx+x\,dy-x\,dy-\frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx}+\frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d^2y}{dx}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^2}-\\ -\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3y}{dx^2}-\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^4y}{dx^3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{d^4y}{dx^3}-\ldots\end{gathered} \tag{8}$$

Указывается, что аналогичное выражение можно построить и при большем числе слагаемых. Затем первый и второй, третий и четвёртый и т. д. члены объединяются и представляются в виде

$$d(xy),\quad d\left(-\frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{dy}{dx}\right),\quad d\left(\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ldots$$

Теперь выполняется почленное интегрирование, причём число слагаемых сразу берётся бесконечным, а последний, непарный член просто отбрасывается. Спустя 20 лет, в 1714 г., английский математик Брук Тэйлор, ярый сторонник Ньютона в споре о приоритете открытия исчисления бесконечно малых, в своём «Методе приращений» вывел формулу (7) по существу тем же приёмом. Установив с помощью интегрирования по частям (мы снова меняем обозначения), что

$$\int y\,dx = xy - \frac{x^2}{2}\frac{dy}{dx} + \int \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\,dx$$

и что аналогичные формулы имеют место при любом числе членов, он переходит к бесконечному ряду, совершенно не учитывая влияния последнего слагаемого.

В этом же сочинении Тэйлор даёт, имея в виду ту же цель дать общие методы квадратур, разложение функции $y$ в бесконечный степенной ряд вида

$$y = z + v\frac{dz}{dx} + \frac{1}{2}v^2\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots, \tag{9}$$

где $z$ есть значение функции $y$ при некотором значении аргумента $x$, а $v$ есть приращение аргумента, соответствующее вычисляемому значению $y$.

Этот ряд (он был позднее назван рядом Тэйлора) Тэйлор, не замечая его связи с рядом (7), получает иными, но столь же «наивными» средствами. Он исходит из интерполяционной формулы, данной Ньютоном в 1711 г.[1]).

Пусть аргумент $x$ получает, начиная со значения $x = a$, $n$ последовательных приращений, равных $\Delta x$, и пусть $\Delta f(a)$, $\Delta^2 f(a)$, $\Delta^3 f(a)$ и т. д. суть конечные разности функции $f(x)$, взятые при $x = a$, т. е.

$$\begin{array}{ll}
\Delta f(a) = f(a+\Delta x) - f(a), & \Delta f(a+\Delta x) = f(a+2\Delta x) - f(a) \\
\Delta^2 f(a) = \Delta f(a+\Delta x) - \Delta f(a), & \Delta^2 f(a+\Delta x) = \Delta f(a+2\Delta x) - \Delta f(a+\Delta x) \\
\Delta^3 f(a) = \Delta^2 f(a+\Delta x) - \Delta^2 f(a) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Тогда согласно формуле Ньютона мы имеем тождественно

$$f(a+n\Delta x) = f(a) + n\Delta f(a) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a) + \\ + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}(n-2)\Delta^3 f(a) + \ldots + \Delta^n f(a), \tag{10}$$

где $n$ есть любое целое положительное число.

Идея Тэйлора состоит в следующем. Положим $n\Delta x = h$. Тогда

$$f(a+h) = f(a) + h\frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{h(h-\Delta x)}{1\cdot 2}\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2} + \frac{h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\Delta^3 f(a)}{\Delta x^3}\ldots$$

Эта формула всё ещё содержит конечное число $n+1$ членов: Тэйлор не выписывает их дальше. Далее $\Delta x$ предполагается бесконечно малым, а $h$ — фиксированным. Тогда коэффициент $h(h-\Delta x)$ «обращается» в $h^2$; $h(h-\Delta x)(h-2\Delta x)$ — в $h^2$ и т. д., а величины $\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 f(a)}{\Delta x^2}$ и т. д. — в производные $\frac{df(a)}{dx}$, $\frac{d^2 f(a)}{dx^2}$ и т. д.

[1]) Ньютон, Математические работы, пер. Д. Д. Мордухай—Болтовского, ОНТИ, 1937, стр. 210 — 217.

Отсюда Тэйлор получает формулу, которая в модернизованном виде имеет вид

$$f(a+h)=f(a)+h\frac{df(a)}{dx}+\frac{1}{2}h^2\frac{d^2f(a)}{dx^2}+\ldots \tag{11}$$

и которая совпадает с формулой (9), более близкой к оригиналу по начертанию. Он не смущается тем, что число членов в формуле (11) бесконечно велико, и не даёт себе труда оценить погрешность, появляющуюся в *последних* членах формулы (10).

Таковы те чудовищные, с нашей точки зрения, приёмы, которые применялись в XVIII в. при выводе наиболее важных результатов анализа. В течение всего XVIII в. никто не попробовал положить в основу вывода ряда Тэйлора оценку совершаемой погрешности. Даже Лагранж, который в 1797 г. впервые поставил вопрос о погрешности, происходящей вследствие замены бесконечного ряда Тэйлора конечным числом его членов, не помыслил о том, чтобы исходить из этой оценки при *выводе* ряда Тэйлора; этот ряд принимался им за исходный принцип всей его теории функций.

Эйлер не представлял исключения из правила. Напротив, он был смелее, чем все его предшественники.

Его не только не смущала мысль о возможной расходимости ряда, но он оперировал с заведомо расходящимися рядами так, как если бы они были обыкновенными многочленами.

**7.** Было бы, однако, большой ошибкой полагать, что математики XVIII в., в частности предшественники Эйлера, не придавали значения или не интересовались вопросом обоснования анализа. Напротив, и Ньютон, и Лейбниц, и их последователи не раз обращались к этому вопросу. Но нельзя сказать, чтобы в XVIII в. было найдено такое его решение, которое могло бы считаться достаточным. Недаром ещё на исходе века, 1784 г., Берлинская академия, которую возглавлял в то время Лагранж, объявила конкурс, в котором математикам всего мира было предложено «дать ясную и строгую теорию того, что в математике называется бесконечным».

Здесь нет возможности сколько-нибудь полно осветить различные точки зрения на природу математической бесконечности, которые высказывались предшественниками Эйлера. Мы ограничимся поэтому тем, что нам кажется безусловно необходимым для понимания позиций нашего автора.

Наиболее продуктивной точкой зрения—к ней обращались даже её противники, когда от общих рассуждений они переходили к получению конкретных результатов — была точка зрения, которую мы назовём лейбницевой, так как Лейбниц и его ученики развивали её наиболее последовательно.

В учебнике анализа бесконечно малых, который выпустил в 1696 г. Лопиталь и который, как заявляет автор [1]), написан под сильным влиянием братьев Бернулли, особенно младшего, Иоганна, бесконечно малая величина определена, выражаясь на современном языке, аксиоматически. Именно выставляется следующий постулат: «Требуется, чтобы две величины, отличающиеся друг от друга лишь на бесконечно

---

[1]) Г. Ф. Лопиталь, Анализ бесконечно малых. Перевод Н. В. Леви, под ред. А. П. Юшкевича, ГТТИ, 1935, стр. 59.

малую величину, можно было брать безразлично одну вместо другой или (что то же самое) чтобы величина, которая увеличивается или уменьшается лишь на другую величину, бесконечно меньшую, чем она сама, могла быть рассматриваема, как остающаяся той же самой величиной». Второй постулат требует, чтобы кривую линию можно было рассматривать как ломаную с бесконечным числом бесконечно малых звеньев.

Дифференциал Лопиталь определяет как бесконечно малое приращение. Все формулы дифференциального исчисления он получает затем с большой лёгкостью. Так,

$$d(xy) = (x+dx)(y+dy) - xy = x\,dy + y\,dx + dx\,dy = x\,dy + y\,dx,$$

«ибо $dx\,dy$ есть величина, бесконечно малая по сравнению с другими членами $y\,dx$ и $x\,dy$».

Итак, бесконечно малая величина в этой концепции не есть нуль, но ведёт себя в известных случаях, как обыкновенный нуль.

На ту же точку зрения иногда становился и Ньютон.

«Так как мы предположили 0 бесконечно малой величиной,— говорит он при выводе соотношения между флюксиями (производными) количеств $x, y$, связанных соотношением $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$,— то те члены, которые на неё умножены, можно считать за ничто в сравнении с другими. Поэтому я ими пренебрегаю...» [1]).

Однако математики XVII—XVIII вв., одни, как Ньютон, в большей, другие, как Лейбниц, в меньшей мере, не были вполне успокоены (почему — скажем ниже) такой концепцией и искали иного выхода. Так, Лейбниц в своём основном мемуаре 1684 г. определяет дифференциал $dx$ независимой переменной, как произвольное количество, а дифференциал $dy$ зависимой переменной как такое количество, отношение которого к $dx$ равно отношению приращения ординаты касательной к приращению абсциссы.

Некоторые историки хотят видеть в этом определении современное определение дифференциала функции как произведения производной на приращение аргумента. Оно было бы таковым, если бы Лейбниц умел дать определение углового коэффициента касательной, и самое важное, если бы он умел вывести формулы дифференциального исчисления, исходя из этого определения. Но эти формулы он получает так же, как это впоследствии сделал Лопиталь.

Если Лейбниц использует геометрическую интерпретацию, то Ньютон, стремясь обеспечить строгость изложения, исходит в «Методе флюксий» из механической картины, определяя «флюксию» (производную) как скорость изменения функции относительно аргумента, которому приписывается роль времени. Однако при выводе основных соотношений между флюксиями он, как мы видели, вынужден пользоваться тем же приёмом, что и Лопиталь.

В «Математических началах натуральной философии» (1687 г.) Ньютон ещё ближе, чем в «Методе флюксий», подходит к идее предела и даже употребляет термин «предел», который, можно сказать, отсюда и ведёт своё происхождение. Это дало основание многим учёным видеть в ньютоновом «методе первых и последних отношений» далеко идущее предвосхищение идей Коши. Академик Н. Н. Лузин

---

1) Ньютон, Математические работы, стр. 50.

считает даже, что у Ньютона «теория пределов выполнена с гораздо большей осторожностью, чем у Коши» [1]). Против такого взгляда можно было бы выставить много возражений. Анализируя рассуждения, проводимые Ньютоном при выводе конкретных результатов, можно показать, что идея предела не является у него математическим орудием, не является составной частью *действующего* аппарата. Это потребовало бы, однако, большего места, чем мы располагаем в данной статье. Кроме того, всегда можно было бы ожидать контрвозражения, что Ньютон, отчётливо владея методом пределов, не мог ещё или даже не стремился к тому, чтобы придать ему столь же отчётливое словесное выражение.

Однако если не только в 1687 г., но и четверть века спустя, Ньютон, говоря о принципиальных вопросах обоснования анализа, высказывает суждения, идущие вразрез с концепцией предела у Коши, то мы вправе сказать, что идея предела у Ньютона и не могла быть рабочим орудием анализа. Между тем, в «Рассуждении о квадратуре кривых», появившемся в 1711 г., мы находим именно такие суждения. Ньютон рассматривает здесь секущую $CK$ и касательную $CH$ (рис. 2). «Если, — говорит Ньютон [2]), — точки $C$ и $c$ отстоят друг от друга на какой-нибудь малый промежуток, то прямая $CK$ мало отстоит от касательной $CH$. Для того чтобы прямая $CK$ совпала с касательной $CH$ и нашлись бы последние отношения линий $CE$, $Ec$ и $cC$, необходимо, чтобы точки $C$ и $c$ сошлись и *совершенно совпали* [3]). В математике не следует оставлять без внимания и самые малые ошибки». Таким образом «последнее отношение» или, что по Ньютону то же, «предел» отношения $cE : CE$ (в современных обозначениях $\Delta y : \Delta x$) здесь есть не что иное, как значение $\Delta y : \Delta x$ в тот момент, когда точки $C$ и $c$ *совершенно* совпадают, т. е. когда $\Delta x$ *в точности* равно нулю.

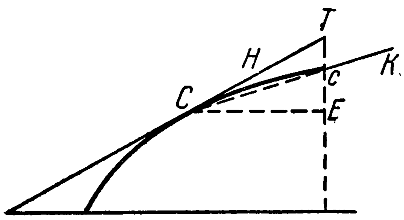

Рис. 2.

Здесь, таким образом, Ньютон решительно отказывается от позиции, занятой им в «Методе флюксий», но вместе с тем вступает в противоречие с заявлением, сделанным им в «Началах»: «Предельные отношения исчезающих количеств не суть отношения пределов этих количеств», на которое часто ссылаются как на отчётливую формулировку идеи предела [4]). Вместо этого в «квадратуре кривых» высказывается, правда не в достаточно развёрнутой форме, положение, что флюксия (производная) есть отношение нулей.

На эту точку зрения стал в своём «Дифференциальном исчислении» Эйлер.

8. Может показаться очень удивительным, что математическая мысль в течение многих десятилетий после Ньютона не могла стать на путь сколько-нибудь последовательного проведения идеи предела,

---

[1]) Н. Н. Лузин, Ньютонова теория пределов в сборнике «Исаак Ньютон, АН СССР, 1943, стр. 55.

[2]) Ньютон, Математические работы, стр. 168.

[3]) Курсив мой. *М. В.*

[4]) Как мы указывали, на самом деле и в «Началах» эта точка зрения не действенна.