

Ширяев А.Н.

Вероятность

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ш64

Ш64 **Ширяев А.Н.**
Вероятность / Ширяев А.Н. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 580 с.

ISBN 978-5-458-31916-4

Настоящее учебное пособие представляет расширенный трёхсеместровый курс лекций по теории вероятностей. Первая часть посвящена элементарной теории вероятностей и предназначена для первичного ознакомления с предметом. Во второй части излагаются математические основания теории вероятностей, базирующиеся на аксиоматике А.Н. Колмогорова. В третьей части рассматриваются случайные процессы с дискретным временем - случайные последовательности (стационарные, марковские, мартингалы). Во введении дан исторический очерк становления теории вероятностей. В историко-библиографической справке приводятся источники результатов и указывается дополнительная литература. В конце каждого параграфа даются задачи. Книга рассчитана на студентов и аспирантов математических отделений университетов.

ISBN 978-5-458-31916-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

- подстановка 225
- Интерполяция 450
- Испытание 41
- Исход 14, 150
- Квадратическая вариация 489
 - характеристика 475
- Класс, оиределяющий сходимость 335
- Ковариационная матрица 249
 - функция 326, 403
- Ковариация 52, 249, 312, 403
- Компактность 337
- Компенсатор 475
- Конечномерные функции
 - расиределения 261
- Корреляционная функция 403
- Коэффициент корреляции 52, 249
 - — максимальный 259
- Кривая регрессии 253
- Критерий Карлемана 315
 - сходимости Коши 274, 275, 276
- Кумулянты 308
- Лебеговская мера 169
- Лебеговское множество 169
- Лемма Бореля — Кантелли 271
 - Бореля — Кантелли — Леви 506
 - Кронекера 378
 - Пратта 226
 - Теплица 377
 - Фату 203
- Линейная независимость 282, 283
- Линейное многообразие 281, 284
 - — замкнутое 284
- Локальная абсолютная
 - неирерывность мер 511
- Локальная иредельная теорема 68
- Марковская цепь 121, 124, 267, 529
 - — однородная 530
 - — стационарная 132
- Марковский момент 469
 - ироцесс 263
- Марковское свойство 124, 529
- Мартингал 114, 467
 - квадратично интегрируемый 475
 - локальный 470
 - обобщенный 469
 - обращенный 476
 - равномерно интегрируемый 498, 500
- Мартингал-разность 474
- Мартингалное иреброзование 471
- Математическое ожидание 48, 197, 199
- Матрица ковариации 249
 - неотрицательно определенная 305
 - переходных вероятностей 124
 - псевдообратная 327
- Мера абсолютно неирерывная 170, 511
 - вероятностная 147
 - дискретная 169
 - конечно-аддитивная 146
 - Лебега 168, 169, 176, 178
 - Лебега — Стилтеса 173
 - полная 169
 - сингулярная 171
 - счетно-аддитивная 146
 - конечная 146
- Метод моментов 342
 - Монте-Карло 239, 383
 - наименьших квадратов 508
 - характеристических функций 343
- Момент остановки 96, 116, 469
- Моменты 199
 - абсолютные 199, 210
 - смешанные 308
- Монотонный класс 153
- Паборы неупорядоченные 15, 17, 183
 - упорядоченные 15, 17, 183
- Пезависимость 34, 39
 - алгебр 39
 - линейная 282, 283
 - случайных величин 46, 195
 - — элементов 195

- событий 39
- прращений 326
- Некоррелированность 53, 249
- Неравенства Бесселя 281
- Буркхольдера 489
- Гельдера 210
- Дворецкого 496
- Дуба 485
- Дэвиса 490
- Иенсена 209
- Колмогорова 371, 487
- Коши — Буняковского 49, 209
- Леви 389
- Ляпунова 210
- Неравенства Маркова 563
- Марцинкевича — Зигмунда 489
- Минковского 211
- Рао — Крамера 83
- Оттавиани 496
- Чебышева 58, 209
- Хинчина 489
- Норма 276
- Нормальные числа 382
- Обобщенная теорема Байеса 245
- функция распределения 173
- Обновляющая последовательность 439
- Обратное уравнение 129
- Оператор сдвига 533
- Определяющий класс 335
- Ортогонализация Грама — Шмидта 283
- Ортогональные меры 511
- Относительная компактность 338
- Отношение правдоподобия 121
- Отображение измеримое 391
- сохраняющее меру 391
- Оценивание ковариационной функции 430
- спектральной плотности 432
- Оценка 53, 81, 251, 465
- несмещенная 81
- оптимальная 53, 54, 251, 281, 441
- состоятельная 81
- эффективная 81
- Оценки спектральной плотности Бартлета 435
- — — Журбенко 435
- — — Нарзена 435
- Неремешивание 395
- Нересечение множеств 20, 150
- Нереходная вероятность 124, 263, 531
- Нериодограмма 433
- Нерпендикуляр 281
- Плотность 170, 176, 177, 213
- Плотность семейств распределений 338
- Нолиномы Бернштейна 66
- Нуассона — Шарлье 286, 287
- Эрмита 285, 286
- Полнота 169, 276, 277, 279
- Полунорма 276
- Последовательности почти-периодические 404
- регулярные 438
- сингулярные 438
- скользящего среднего 406
- стационарные в узком смысле 390
- — в шпроком смысле 402
- частично-наблюдаемые 453
- Ночи на верное (почти всюду) 201
- Предсказуемая последовательность 467
- Представления Леви — Хинчина 360, 364
- Принцип отражения 107
- подходящих множеств 154
- Продолжение меры 224
- Проекция 281
- Производная Радона — Никодима 213
- Простое случайное блуждание 554
- Пространство исходов 14

- элементарных событий 14
- Процесс броуновского движения 326
- ветвящийся 126
- винеровский 326
- гауссовский 326
- гауссовско-марковский 326
- марковский 263
- с независимыми прращениями 326
- условно винеровский 326
- Прямое произведение мер 41
- — пространств 41, 165
- Прямое произведение σ -алгебр 158
- уравнение 129
- Пустое множество 21, 150
- Равенство Парсевала 285
- Равномерная интегрируемость 204
- Разбиение 21, 311
- Разложения Вольда 441
- Дуба 475
- Крикеберга 495
- Лебега 512
- Размещения 16
- Разность множеств 21, 150
- Распределение безгранично делимое 357
- бернуллиевское 45, 170
- бета 172
- биномиальное 28, 45, 170
- гамма 172
- гауссовское 172, 177
- геометрическое 170
- гипергеометрическое 32
- двустороннее экспоненциальное 172
- дискретное 169
- — равномерное 170
- инвариантное 131
- Коши 172
- логарифмически нормальное 255
- многомерное 46, 175
- — гипергеометрическое 32
- мультиномиальное 31
- нормальное 172, 177
- отрицательно биномиальное 170
- Пуассона 77, 170
- равномерное 172
- сингулярное 171
- стационарное 131, 132
- Стьюдента 172, 258
- устойчивое 357
- хи 258
- хи-квадрат 172, 258
- экспоненциальное 172
- Распределение вероятностей процесса 194
- — случайной величины 45, 186
- Расстояние Леви 337
- Распренная случайная величина 188
- Регулярные условные вероятности 240
- — распределения 241
- функции распределения 241
- Свертка распределений 256
- Секвенциальная компактность 339
- Семиинварианты 308
- Симметрическая разность множеств 55, 150
- Сингулярные меры 511
- Система ортонормированная 280
- Скалярное произведение 279
- Слабая сходимость 329, 331
- Случайная величина 43, 186
- — абсолютно непрерывная 187
- — дискретная 186
- — инвариантная 394
- — комплексная 194
- — непрерывная 187
- — иростая 186
- Случайное блуждание 94, 105
- Случайные векторы 46
- последовательности 194, 326
- процессы с дискретным временем 194

- с непрерывным временем 194, 326
- с ортогональными проращениями 416
- Случайные элементы 192
- Смешанная модель авторегрессии и скользящего среднего 409
- Событие 20
- Событие достоверное 21
 - невозможное 21
- События перестановочные 370
- Согласованности свойство 178
 - условие 261
- Состояния цепи аperiodические 537
 - возвратные 539
 - достижимые 535
 - невозвратные 539
 - несущественные 534
 - нулевые 539
 - положительные 539
 - сообщающиеся 535
 - существенные 535
- Сочетания 16
- Спектральная мера 410
 - плотность 411
 - функция 410
- Спектральное представление
 - ковариационной функции 409
 - стационарной последовательности 418
- Спектральные окна 435
- Среднее значение 48
- Средняя длительность блуждания 94, 101
- Стандартное отклонение 248
- Статистика Бозе — Эйнштейна 18, 19
 - Максвелла — Больцмана 18, 19
 - Ферми — Дирака 18, 19
- Статистическая независимость 34
- Стохастическая матрица 124
 - дважды 553
 - мера 412
 - конечно-аддитивная 413
 - ортогональная 413
 - элементарная 413
 - последовательность 467
- Стохастический интеграл 415
- Строго марковское свойство 139
- Структурная функция 414
- Субмаргингал 467
- Сужение меры 181
- Сумма множеств 21, 150
- Супермаргингал 468
- Схема Бернулли 57
 - серий 348
- Сходимость в основном 331, 336
 - в среднем квадратическом 268
 - — порядка p 268
 - в смысле L^p 268
 - с вероятностью единица 268
 - по вероятности 268
 - по распределению 268
 - почти всюду 268
 - почти наверное 268
 - рядов 371
- σ -алгебра 146, 152, 190
 - остаточная 367
 - хвостовая 367
- Теоремы Берри — Эссеена 75, 356
 - Бпркофа — Хинчина 396
 - Бохнера — Хинчина 305
 - Вейерштрасса 66
 - Герглотца 409
 - Дуба 477, 485, 494
 - Ионеску Тулчи 264
 - Кантелли 376
 - Каратеодори 167
 - Колмогорова 178, 182, 261, 374, 377, 379, 444, 451
 - Колмогорова — Хинчина 371
 - Лебега о мажорпруемой сходимости 204
 - Леви 499
 - Макмиллана 65

- Марцинкевича 306
- Теоремы Муавра — Лапласа 73
- непрерывности 343
- о баллотировке 118
- о двух рядах 373
- о замене переменных под знаком интеграла Лебега 213
- о монотонной сходимости 202
- о нормальной корреляции 323
- о сходимости под знаком условных математических ожиданий 232
- о трех рядах 374
- Пойа 305
- Прохорова 338
- Пуассона 76, 349
- Радона — Пикодима 213
- Фубини 215
- Хелли 340
- центральная предельная 343, 347, 350
- эргодическая 130, 396, 400
- Тождества Вальда 480
- Уравнение Колмогорова — Чэпмена 128, 263, 531
- обратное 129
- прямое 129
- Уровень значимости 84
- Усиленный закон больших чисел 376, 379
- Условие Линдберга 350
- Ляпунова 354
- Условная вероятность 34
- — относительно разбиений 87
- — — случайных величин 87, 88, 229
- — — σ -алгебр 226, 228
- — регулярная 240
- Условное математическое ожидание 86
- — — в шпроком смысле 281
- — — относительно разбиений 89
- — — — случайных величин 92, 229
- — — — событий 226, 234
- — — — σ -алгебр 226, 227
- Фазовое пространство 124
- Фильтр 423
- Калмана — Бьюси 457
- физически осуществимый 423
- Фильтрация 453
- Формула обращения 301 .
- полной вероятности 36, 87, 90
- Формула связи моментов и семинвариантов 309
- Сеге — Колмогорова 456
- Стпрлинга 33
- умножения вероятностей 37
- Фундаментальное тождество Вальда 481
- Фундаментальность в среднем 269, 276
- по вероятности 269, 275
- с вероятностью единица 269, 274
- Функции верхние 384
- нижние 384
- Радемахера 287
- распределения 45, 46, 166, 187, 261
- Хаара 288, 289
- Характеристика взаимная 476
- квадратическая 475
- Характеристическая функция 292
- — множеств 44
- Центральная предельная теорема 343, 347, 350
- Цепь Маркова 529
- — аperiodическая 538
- — возвратная 546, 547
- — дискретная 530
- — конечная 530
- — неразложимая 535, 547
- — однородная 530
- — положительная 546

Цепь Маркова
— — стационарная 132
— — эргодическая 534, 547
Циклические подклассы 536
Цилиндрические множества 160, 162
Частота 57
Частотная характеристика фильтра
423
Эквивалентные меры 511

Экран отражающий 558, 559
— поглощающий 555, 557
Экстраполяция 445
Элементарное событие. 14, 150
Энтропия распределения 63
Эргодическая теорема 130, 396, 400
Эргодичность 130, 394

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу настоящего учебного пособия положен трехсеместровый курс лекций, который читался автором в течение ряда лет на механико-математическом факультете Московского государственного университета и был частично издан ротационным способом под названием «Вероятность, статистика, случайные процессы, I, II», изд-во МГУ.

В соответствии с традицией первая часть курса (примерно один семестр) отводится на элементарную теорию вероятностей (глава I). Изложение начинается с построения вероятностных моделей с конечным числом исходов и введения основных вероятностных понятий таких, как элементарные события, события, вероятность, независимость, случайные величины, математические ожидания, корреляция, условные вероятности и др.

Многие вероятностно-статистические закономерности хорошо прослеживаются уже на примере простейшего случайного блуждания, порожденного схемой Бернулли. В связи с этим для этого случая излагаются как классические результаты (закон больших чисел, локальная и интегральная теоремы Муавра и Лапласа), так и более современные результаты (например, закон арксинуса).

Завершается первая глава рассмотрением зависимых случайных величин, образующих мартингал и марковскую цепь.

Главы II—IV являются расширенным изложением второй части курса (второй семестр). Здесь излагается (глава II) ставшая общепринятой аксиоматика теории вероятностей А. Н. Колмогорова и дается математический аппарат, составляющий арсенал средств современной теории вероятностей (σ -алгебры, меры и способы их задания, интеграл Лебега, случайные величины и случайные элементы, характеристические функции, условные математические ожидания относительно σ -алгебр, гауссовские системы и др.). Следует отметить, что два результата теории меры — теорема Каратеодори о продолжении меры и теорема Радона-Никодима — принимаются без доказательства.

Третья глава посвящается вопросам слабой сходимости вероятностных распределений и методу характеристических функций в доказательстве предельных теорем. Вводятся понятия от-

носительной компактности и плотности семейства вероятностных распределений и доказывается (для случая числовой прямой) теорема Ю. В. Прохорова об эквивалентности этих понятий.

К этой же части курса отнесено рассмотрение свойств «с вероятностью единица» для последовательностей и сумм независимых случайных величин (глава IV). Приводятся доказательства законов «нуля или единицы» (Колмогоров, Хьюитт и Сэвидж), критерии сходимости рядов и даются условия справедливости усиленного закона больших чисел. Закон повторного логарифма формулируется для произвольных последовательностей независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным вторым моментом и доказывается в предположении, что эти величины имеют гауссовское распределение.

Наконец, третья часть курса (главы V—VIII) отводится случайным процессам с дискретным временем (случайным последовательностям). Главы V и VI посвящены теории стационарных случайных последовательностей, где стационарность понимается как в узком, так и широком смыслах. Изложение теории стационарных в узком смысле случайных последовательностей ведется с привлечением понятий эргодической теории: сохраняющее меру преобразование, эргодичность, перемешивание. ... Приводится простое доказательство (данное А. Гарсия) максимальной эргодической теоремы, что позволяет дать и простое доказательство эргодической теоремы Биркгофа — Хинчина.

Рассмотрение стационарных в широком смысле случайных последовательностей начинается с доказательства спектрального представления для ковариационной функции. Затем вводятся ортогональные стохастические меры, интегралы по ним и доказывается спектральное представление для самих последовательностей. Рассмотрен также ряд статистических задач: оценивание ковариационной функции и спектральной плотности, экстраполяция, интерполяция и фильтрация. В эту же главу включен также материал, относящийся к фильтру Калмана — Бьюси и его обобщениям.

В седьмой главе рассматриваются основные результаты теории мартингалов и родственных понятий. Излагаемый здесь материал стал включаться в традиционные курсы теории вероятностей лишь сравнительно недавно. В последней главе, посвященной марковским цепям, основное внимание уделяется вопросам асимптотического поведения цепей Маркова со счетным множеством состояний.

В конце каждого параграфа приводятся задачи, значимость которых может быть различной: в одних из них предлагается доказать утверждения, сформулированные, но не доказанные в основном тексте, другие содержат утверждения, используемые

в последующем изложении, третьи преследуют цель дать дополнительные сведения к рассматриваемому кругу вопросов и, наконец, некоторые носят характер простых упражнений.

При составлении курса и настоящего пособия автор использовал разнообразную литературу по теории вероятностей. В историко-библиографической справке указываются как источники приводимых результатов, так и дополнительная литература, относящаяся к рассматриваемому материалу.

В книге применяется следующая нумерация и система ссылок. Каждый параграф содержит свою нумерацию теорем, лемм и формул (без указания номера главы и параграфа). При ссылке на соответствующий результат из другого параграфа той же главы применяется двойная нумерация, где первая цифра указывает номер параграфа (так, ссылка на формулу (2.10) означает формулу (10) из § 2). При ссылке на результаты из другой главы используется тройная нумерация (так, формула (II.4.3) означает формулу (3) из § 4 главы II).

Автор пользуется здесь случаем поблагодарить А. Н. Колмогорова, Б. В. Гнеденко, Ю. В. Прохорова, которые его учили и у которых он учился теории вероятностей и советами которых он имел возможность пользоваться. Автор приносит также свою признательность сотрудникам кафедр теории вероятностей и математической статистики механико-математического факультета МГУ и сотрудникам отдела теории вероятностей Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР за обсуждения и советы.

Москва,
декабрь 1979

Л. Ширяев

