Д. Холл

Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Д11

Д. Холл
Д11 Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Д. Холл – М.: Книга по Требованию, 2021. – 312 с.

ISBN 978-5-458-28251-2

Коллективная монография, содержит обстоятельное изложение теории и практического применения методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В ней представлен полный набор лучших из существующих алгоритмов решения, а также обзор последних достижений теории как для начальных, так и для краевых задач. Рассмотрены уравнения с запаздывающим аргументом, интегродифференциальные уравнения Вольтерра, задача Коши для жёстких систем уравнений.Книга адресована широкому кругу специалистов по вычислительной математике, интересующихся численными методами.

ISBN 978-5-458-28251-2

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Одним из важнейших факторов происходящей в настоящее время научно-технической революции является создание быстродействующих электронных вычислительных машин, призванных расширить возможности человеческого интеллекта. Возникшая при этом необходимость «математического обеспечения» бесперебойной и эффективной работы ЭВМ привела к бурному развитию как математики в целом, так и отдельных ее разделов, особенно тех, которые связаны с проблемами управления и оптимального поиска, а также тех, которые посвящены методам дискретизации задач или методам решения дискретных задач.

В этой связи большое значение приобрели разностные методы решения многих типов задач, восходящие еще к великому Эйлеру. Важная особенность разностных методов состоит в том, что они, как правило, допускают простую алгоритмизацию, причем полученные алгоритмы могут быть эффективно реализованы на ЭВМ.

Предлагаемая вниманию читателя книга содержит краткое описание современных разностных методов решения основных задач, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. В ней в достаточной мере представлены теоретические и прикладные результаты, полученные за последние годы. Это — коллективная монография (помимо редакторов Дж. Холла и Дж. Уатта в ней приняли участие одиннадцать авторов). Однако главы, написанные различными авторами, настолько согласованы, что книга практически не содержит повторений и воспринимается как единое целое.

В первой части, посвященной решению задачи Коши, наибольший интерес представляет описание методов с переменным порядком, а также методов интегрирования устойчивых систем на больших интервалах времени. Эти вопросы недостаточно освещены в существующей литературе.

Методы решения задачи Коши для жестких систем выделены в отдельную (вторую) часть. Это наиболее важный раздел книги. В нем дается полное систематическое описание соответствующих методов. Несколько особняком стоит здесь глава 14, в которой речь идет не об обыкновенных дифференциальных уравнениях, а об уравнениях в частных производных.

Материал, включенный в третью и четвертую части книги (методы решения краевых задач и методы решения уравнений с запаздывающим аргументом и интегродифференциальных уравнений соответственно), в большей мере отражен в имеющейся литературе. Здесь он излагается сжато (но отнюдь не конспективно) и систематически, что, несомненно, весьма удобно для читателя. Из общего стиля книги отчасти выпадает глава 20, носящая почти чисто обзорный характер.

В заключение несколько слов о терминологии. Заметим, что с терминологией авторов полностью согласиться нельзя. В частности, представляются логически неоправданными термины «одношаговые методы» в применении к методам Рунге — Кутты и типа Рунге — Кутты и «многошаговые методы» в применении к методам Адамса и типа Адамса. Несмотря на это, мы в основном использовали именно авторские термины, поскольку их замена могла бы породить «цепную реакцию» и сделать книгу вообще неудобочитаемой.

Думается, что книга в целом будет полезна научным работникам и инженерам, а также преподавателям высших учебных заведений, аспирантам и студентам, интересующимся вычислительной математикой.

А. Д. Горбунов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга ставит своей целью дать инженерам, научным работникам и преподавателям высших учебных заведений достаточно полное представление о теории и практическом применении современных численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Она включает подробное описание лучших существующих алгоритмов решения как задачи Коши, так и краевых задач, а также обсуждение последних достижений в теории численных методов.

Первая часть книги посвящена общей теории методов решения задачи Коши и содержит подробное описание применения алгоритмов к нежестким системам дифференциальных уравнений. Во второй части рассматривается задача Коши для жестких систем. Разбираются специфические трудности, связанные с жесткостью, после чего дается описание практического применения методов. В заключительных главах этой части рассматриваются жесткие дифференциальные уравнения, возникающие в двух важных областях приложений.

Краевые задачи составляют содержание третьей части. После вводной главы о конечно-разностных методах подробно излагаются новые применения метода пристрелки. Изучаются некоторые особенности применения этого метода к линейным задачам на собственные значения и к обобщенным краевым задачам, в том числе к уравнениям с особыми точками. В последней главе этой части описываются методы разложения и указываются специальные условия, при которых применение этих методов может быть особенно успешным. В заключительной, четвертой части содержится обзор существующих методов в недавно развитых областях дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и интегродифференциальных уравнений Вольтерра.

В основу этой книги положены лекции, прочитанные в объединенной Летней школе, организованной факультетом вычислительной математики и статистики Ливерпульского университета и факультетом математики Манчестерского университета в июле 1975 г. Ниже приводится полный список авторов.

Пользуясь случаем, выражаем свою благодарность за внимательную и искусную перепечатку текста г-же Б. Ли, г-же Д. Мэнли, г-же Дж. О'Коннор из Ливерпуля, а также г-же Э. Бишоп, г-же Р. Хортон и г-же К. Литлер из Манчестера.

Дж. Холл
Дж. М. Уатт

АВТОРЫ

Проф. Дж. К. Батчер (главы 5, 10)
факультет математики, Оклендский университет, Новая Зеландия.

Д-р Дж. Л. Лэмберт (глава 2)
факультет математики, университет Данди, Шотландия.

Д-р А. Протеро (главы 9, 11)
Торнтонский исследовательский центр компании Шелл Ризорч, Честер, Англия.

Д-р Х. Х. Робертсон (глава 13)
лаборатория корпорации Империэл кемикал индастрис, Ранкорн, Чешир, Англия.

Д-р С. Т. Х. Бейкер (главы 20, 21)

Д-р Я. Гладуэлл (главы 12, 16, 17)

Д-р Дж. Холл (главы 6, 8)

Проф. Дж. Э. Уолш (главы 16, 18)

Д-р Дж. Уилльямс (глава 1)
факультет математики, Манчестерский университет, Англия.

Проф. Л. М. Делвс (глава 19)

Д-р М. А. Хеннел (глава 15)

Д-р Р. Уэйт (главы 7, 14)

Дж. М. Уатт (главы 3, 4, 15)
факультет вычислительной математики и статистики, Ливерпульский университет, Англия.

Часть 1

ЗАДАЧА КОШИ

1

ВВЕДЕНИЕ В ДИСКРЕТНЫЕ МЕТОДЫ

1. ВВЕДЕНИЕ

Нашей целью является рассмотрение теории и практического применения численных методов решения задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \\ y(a) = y_0, \tag{1.1}$$

где $y = [y^1(x), y^2(x), \ldots, y^s(x)]^T$, y_0 задано.

Все обсуждаемые здесь численные методы известны как дискретные методы, т. е. такие методы, посредством которых вычисляется последовательность приближений $y_n \approx y(x_n)$ на множестве точек $x_{n+1} = x_n + h_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, $x_0 = a$, $x_N = b$, где $h_n > 0$ — шаг сетки. В большинстве представленных здесь математических исследований будет рассматриваться случай, когда $h_n = h$, где h — постоянная. Однако в последних главах, посвященных применению методов, будет рассматриваться случай переменного шага. Теоретические исследования в этом случае, как правило, труднее; см., например, Гир [1971] и более позднюю работу Гира и Ту [1974].

Основное предположение относительно (1.1) состоит в том, что $f(x,y)$ удовлетворяет условию Липшица (в равномерной метрике)

$$\| f(x, y_1) - f(x, y_2) \| \leqslant L \| y_1 - y_2 \| \tag{1.2}$$

для всех $x \in [a, b]$ и всех s компонент векторов y_1 и y_2. При этом можно доказать единственность решения задачи (1.1), если оно существует. Константа Липшица L играет важную роль в теории и практическом использовании численных методов.

Цель этой главы состоит в том, чтобы кратко и неформально перечислить различные типы дискретных методов и обсудить источники погрешностей. Мы рассмотрим методы для скалярного случая (1.1) $s = 1$ с постоянным шагом h. Кроме того, термин «метод» будет использоваться в широком смысле, так как на данном этапе мы не стремимся точно определить, каким образом та или иная *формула* применяется на практике.

2. ДИСКРЕТНЫЕ МЕТОДЫ

(i) Методы разложения в ряд Тейлора

В принципе наиболее простым способом построения решения в точке x_{n+1}, если оно известно в точке x_n, является способ, основанный на разложении в ряд Тейлора (в предположении надлежащей дифференцируемости решения):

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h\Delta(x_n, y_n, h), \tag{2.1}$$

где

$$\Delta(x, y, h) = y'(x) + \frac{h}{2} y''(x) + \frac{h^2}{3!} y'''(x) + \ldots .$$

Если теперь этот ряд оборвать и заменить $y(x_n)$ приближенным значением y_n, то при помощи (1.1) получится следующая приближенная формула:

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.2}$$

где

$$\varphi(x, y, h) = f(x, y) + \frac{h}{2} f'(x, y) + \ldots + \frac{h^{p-1}}{p!} f^{p-1}(x, y).$$

Для $p = 1$ и $p = 2$ имеем формулы

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \quad \text{(метод Эйлера)},$$

$$y_{n+1} = y_n + h\left[f(x_n, y_n) + \frac{h}{2}(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n) f(x_n, y_n))\right],$$

по каждой из которых при заданном y_0 можно последовательно получить приближенное решение $\{y_n\}$. Такие формулы не требуют вычисления дополнительных начальных условий и позволяют легко менять шаг интегрирования. К сожалению, их практическое применение ограничено лишь теми задачами, для которых легко вычисляются полные производные высшего порядка. Благодаря современным достижениям в программировании в некоторых случаях оказывается возможным автоматически получать алгебраические выражения для f', f'', ... Таким образом, не исключено, что рассмотренные выше методы разложения в ряд Тейлора будут более широко использоваться в будущем; см. Бартон, Уиллерс и Захар [1971].

(ii) Методы Рунге — Кутты

Примерно в начале нашего века Рунге, а затем Хойн и Кутта предложили подход, основанный на построении формулы для φ, которая максимально близка к Δ и *не содержит* производных от функции f. Этот процесс «подгонки» рядов Тейлора можно продемонстрировать следующим образом. Положим

$$\varphi(x, y, h) = c_1 f(x, y) + c_2 f(x + ha_2, y + b_{21} f(x, y)), \tag{2.3}$$

где c_1, c_2, a_2 и b_{21} — постоянные, подлежащие определению. Разлагая φ и Δ по степеням h, получаем

$$\varphi(x, y, h) = (c_1 + c_2) f(x, y) + \\ + hc_2 [a_2 f_x(x, y) + b_{21} f_y(x, y) f(x, y)] + O(h^2),$$

$$\Delta(x, y, h) = f(x, y) + {}^1\!/_2 h [f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y)] + O(h^2),$$

что приводит к уравнениям

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_2 a_2 = {}^1\!/_2, \quad c_2 b_{21} = {}^1\!/_2.$$

Вследствие того что в общем случае нельзя найти никаких соотношений для членов порядка $O(h^2)$, получается семейство решений

$$c_1 = 1 - \alpha, \quad c_2 = \alpha, \quad a_2 = b_{21} = \frac{1}{2\alpha},$$

где $\alpha \neq 0$ — свободный параметр. При $\alpha = {}^1\!/_2$ мы имеем формулу

$$y_{n+1} = y_n + h [{}^1\!/_2 f(x_n, y_n) + {}^1\!/_2 f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))],$$

впервые полученную Хойном. Это *явная* формула, в которой требуются два вычисления функции f на шаге.

Выражение (2.3) и рассмотренный выше процесс подгонки рядов Тейлора можно обобщить, используя m вычислений функции f на одном шаге интегрирования. Таким образом получается общий *явный* m-*этапный* метод Рунге — Кутты:

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h), \\ \varphi(x, y, h) = \sum_{r=1}^{m} c_r k_r, \quad k_1 = f(x, y), \\ k_r = f\left(x + ha_r, y + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} k_s\right), \quad r = 2, 3, \ldots, m. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Формула этого метода идеально приспособлена для практических расчетов; она не требует вычисления дополнительных начальных значений и позволяет легко менять шаг интегрирования. Возможно, наиболее известной является формула четырехэтапного метода

$$\begin{gathered} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + {}^1\!/_2 h, y_n + {}^1\!/_2 hk_1), \\ k_3 = f(x_n + {}^1\!/_2 h, y_n + {}^1\!/_2 hk_2), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3). \end{gathered} \tag{2.4a}$$

Можно построить более точные формулы для бóльших значений m и на их основе создать высокоэффективные алгоритмы, имеющие большое практическое значение (см. гл. 5).

За счет вычислительного усложнения формул (2.4) можно получить более широкий класс методов, допуская, что коэффициенты $\{k_r\}$ определяются из системы m (в общем случае нелинейных) уравнений; см. Батчер [1964]. При этом так называемый *неявный* m-этапный метод Рунге — Кутты соответствует формулам

$$
\begin{aligned}
&y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h),\\
&\varphi(x, y, h) = \sum_{r=1}^{m} c_r k_r, \qquad\qquad (2.5)\\
&k_r = f\left(x + ha_r, y + h\sum_{s=1}^{m} b_{rs}k_s\right), \quad r = 1, 2, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Такие формулы являются в принципе более точными, чем соответствующие явные m-этапные формулы, поскольку они содержат больше параметров. Это, однако, достигается ценой значительного усложнения вычислительного алгоритма, и в настоящее время применение таких методов ограничено классом так называемых жестких задач (см. гл. 10).

Можно понизить степень неявности в (2.5), положив $b_{rs}=0$ при $s > r$. В качестве примера укажем *полуявный* трехэтапный метод, предложенный Батчером:

$$
\begin{aligned}
&y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3),\\
&k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + {}^1/_2 h, y_n + {}^1/_4 hk_1 + {}^1/_4 hk_2),\\
&k_3 = f(x_n + h, y_n + hk_2).
\end{aligned}
$$

Одна из основных проблем, связанных с применением методов Рунге — Кутты (а в действительности всех методов), состоит в выборе шага h. В решении данной проблемы для явных схем значительные успехи достигнуты за счет введения так называемых вложенных методов (см. гл. 3). Хорошее описание этого способа содержится в работе Лапидуса и Зейнфельда [1971]. Для m-этапных методов идея состоит в использовании дополнительных формул, содержащих лишь величины $k_1, k_2, \ldots$ $\ldots, k_m$ и также дающих приближение (повышенной точности) к $y(x_{n+1})$. Используя информацию, получаемую в процессе этих дополнительных вычислений, можно получить оценку погрешности для y_{n+1} и затем в соответствии с требованиями точности либо увеличить, либо уменьшить шаг интегрирования h.

(iii) Линейные многошаговые методы

После того как y_{n+1} получено каким-либо из рассмотренных выше методов, приближение y_n уже не используется в дальнейших расчетах. В этом пункте мы опишем подход, который со-