П.Ф. Папкович

Теория упругости

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
П11

П.Ф. Папкович

П11 Теория упругости / П.Ф. Папкович – М.: Книга по Требованию, 2023. – 641 с.

ISBN 978-5-458-26489-1

Книга эта утверждена в качестве учебника для кораблестроительных втузов, но по характеру своего содержания может служить пособием по теории упругости для студентов и других технических учебных заведений, где этот предмет проходится, а также аспирантов тех втузов, где он не читается. Особенностью книги является сделанная в ней попытка изложить все задачи теории упругости не разрозненно, а в свете общих решений основной системы дифференциальных уравнений этой дисциплины. В конце каждой главы приведен ряд вопросов, самостоятельное получение ответов на которые может облегчить читателю усвоение курса. Книга предполагает у читателя знакомство с теоретической механикой и математикой в объеме нормальных вузовских программ.

ISBN 978-5-458-26489-1

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ВСТУПЛЕНИЕ

Как и теория сопротивления материалов, математическая теория упругости ставит своею основною целью определение тех внутренних усилий, которые возникают в упругом теле под действием приложенных к нему внешних сил. Ставя себе задачу, на первый взгляд общую, эти две науки пользуются однако для ее разрешения различными методами и в сущности ставят себе даже разные цели.

Теория сопротивления материалов стремится дать в руки инженера хотя бы и не вполне точные, но зато простые расчетные формулы, позволяющие во всяком практическом вопросе принять достаточно осторожное решение. Дисциплина эта принуждена поэтому схематизировать до крайних пределов иногда весьма сложные явления и вводить для решения почти каждой практической задачи свои более или менее обоснованные, но не вполне доказанные рабочие гипотезы, степень точности которых остается в сущности неизвестной.

В отличие от этого математическая теория упругости ставит своею целью получить возможно более строгое решение хотя бы части тех вопросов которые в области изучения усилий, вызываемых в упругом теле внешними силами, могут возникнуть перед инженером, а также решать такие вопросы, которые не могут быть решены элементарно.

Отказываясь от ряда рабочих гипотез теории сопротивления материалов и ставя себе отчасти даже целью проверку и оценку степени точности этих гипотез, теория упругости не может, конечно, обойтись сама без своей основной рабочей гипотезы. Такой ее основной рабочей гипотезой является понятие об идеально упругом теле, применительно к которому и строит все свои выводы эта наука. Тело это является абстрагированной от живой действительности моделью тех тел, из которых возводятся современные инженерные сооружения, и, как такая модель, должно быть наделено нами мысленно всеми свойствами, которые являются основными и общими свойствами тех реальных тел, на которые предполагаем мы распространить наши выводы.

Чем полнее и ближе охватят реальную действительность свойства, приписываемые исследуемой нами модели, тем ценнее будут наши выводы, тем лучше будут они согласовываться с действительностью, тем глубже охватят они сущность рассматриваемого явления и тем шире может оказаться область их применения.

Наделить исследуемую модель всеми свойствами реальных тел, однако, мы не можем, так как различные тела обладают не вполне одинаковыми свойствами. Нам приходится при выборе свойств, приписываемых нашей основной модели, отличать главное от второстепенного. В определенной обстановке мы можем рассматривать некоторые из свойств реальных тел как свойства главные, некоторые — как свойства второстепенные. Но обстановка меняется, и модель, абстрагированная однажды от живой действительности, может постепенно перестать отражать нам некоторые такие стороны явления, которыми в одной обстановке можно было и не интересоваться, но которым в другой обстановке мы должны уделять уже исключительное внимание.

Тогда приходится менять нашу основную модель, наделяя ее новыми свойствами. Обычно всякая такая замена основной модели новою рассматривается как появление в данной области знания, наряду с классической наукой, новой науки, отражающей новые стороны явления. Этой, общей всему естествознанию, участи не избегла и теория упругости, несмотря на всю свою относительную молодость[1], и сейчас наметились уже совершенно отчетливо новые течения в этой науке, наделяющие основную подлежащую исследованию модель деформируемого твердого тела несколько иными свойствами, чем то делается в классической теории упругости. Поэтому, характеризуя ту модель идеально упругого тела, с которой мы будем во всем дальнейшем оперировать, мы постараемся охарактеризовать в самых общих чертах и те тенденции к видоизменению этой модели, которые уже наметились в относительно новых разделах теории упругости.

Классическая теория упругости предполагает прежде всего, что идеально упругое тело, с которым она оперирует, является телом *вполне упругим*, т. е. после удаления приложенных к телу внешних сил всегда возвращающимся в одно и то же исходное состояние, именуемое обычно *естественным* состоянием тела. Допущением этим исключаются из рассмотрения все так называемые *остаточные* деформации тела, и круг вопросов, подлежащих исследованию, сужается в весьма значительной мере. Поскольку, однако, при проектировании реальных сооружений мы стремимся избегать появления у них остаточных деформаций и располагаем материалами, позволяющими при умеренных нагрузках удовлетворить этому условию, это сужение круга исследования не лишает его еще практического интереса.

В понятие о *полной упругости* исследуемого тела, помимо способности тела возвращаться в исходное состояние,

[1] Первой работой по теории упругости принято считать мемуар Навье „Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques", представленный им Парижской Академии Наук 14 мая 1821 г.

теория упругости вкладывает еще и другое содержание: предполагается, что *идеально упругое тело, возвращаясь в свое естественное состояние, возвращает полностью всю работу, затраченную на его деформацию.*

Этим свойством, также если и не в полной, то в весьма значительной мере, обладают очень многие строительные материалы, притом именно те металлы, которые в практическом отношении представляют наибольший интерес.

Более или менее полной упругостью реальные тела обладают, однако, лишь при умеренных нагрузках. Поэтому если теория упругости еще и позволяет судить о тех напряжениях, которые возникают в теле в его рабочем состоянии, то она совершенно уже не способна дать нам представление о той нагрузке тела, при которой наступает его разрушение, так как разрушению всякого реального тела обычно предшествует появление тех или иных остаточных деформаций.

Изучением поведения тела при больших нагрузках, вызывающих у него появление пластических деформаций, занята теория пластических деформаций, в настоящее время развивающаяся параллельно с теорией упругости, как дальнейшая стадия исследования вопроса.

Вторым основным свойством, обычно приписываемым в теории упругости идеально упругому телу, является *линейность* зависимости между нагрузкой тела и его деформацией. Этим свойством главнейшие современные строительные материалы обладают при умеренных нагрузках в достаточно большой степени. Наделяя идеально упругое тело этим свойством, или, как часто принято выражаться, считая идеально упругое тело подчиненным *закону Гука*, мы хотя и сужаем круг исследуемых вопросов, но не больше, чем при наделении идеально упругого тела свойством полной упругости.

В качестве третьего основного свойства мы будем наделять в теории упругости исследуемое тело *однородностью*, под которой принято подразумевать, что во всех своих точках тело под действием одних и тех же напряжений деформируется одинаково. Этим свойством также обладают такие материалы, как, например нецементованная сталь.

Обычно в теории упругости идеально упругому телу приписывают в качестве четвертого основного свойства еще и *изотропность*, под которым принято подразумевать независимость связи между деформациями каждого элемента тела и приложенными к нему усилиями от направления действующих на этот элемент усилий. Наиболее интересные в техническом отношении тела имеют аморфную структуру и обладают этим свойством. Примером тела, не обладающим изотропностью, являются цельные кристаллы.

Если бы мы хотели распространить выводы наших исследований и на кристаллы, то нам пришлось бы исключить изотропность из числа основных свойств идеально упругого тела. Это иногда и делается, и теория деформации анизотропных тел считается входящей в классическую теорию упругости в качестве одного из ее разделов.

В нашем курсе мы не будем касаться теории деформации анизотропных тел, так как большинство строительных материалов, из которых строятся современные инженерные сооружения, можно принимать за тела изотропные.

Идеально упругому телу приписывают далее в теории упругости **относительную жесткость**, подразумевая под таковой, что отдельные точки тела под действием приложенной к нему внешней нагрузки получают перемещения, лишь весьма малые по сравнению с размерами тела. Основывается это допущение на том, что даже у таких материалов, как лучшая сталь, допускаемое относительное удлинение не превосходит 0,1 — 0,2%. Поэтому если все размеры тела являются величинами одного порядка, то перемещениями отдельных точек тела можно по сравнению со всеми размерами тела пренебречь. Допущение это вносит весьма существенные упрощения в систему основных уравнений теории упругости, так как отказ от него заставил бы отказаться от линейности системы основных уравнений теории упругости. Оно, однако, совершенно исключает из рассмотрения классической теории упругости все вопросы устойчивости деформации. Поэтому за последнее время участились попытки освободить теорию упругости от этого весьма существенного ограничения общности ее выводов, но попытки эти приводят к такому усложнению теории, что в начальном курсе теории упругости, каковым является настоящий, останавливаться на их рассмотрении невозможно.

Шестым свойством, приписываемым в теории упругости рассматриваемому телу, является **сплошность**, т. е. способность заполнять весь объем, занимаемый материалом тела, без всяких пустот. С точки зрения физики твердого тела эта наша абстракция является едва ли не наиболее рискованной и уязвимой изо всех тех, к которым мы прибегаем в теории упругости в настоящее время, чтобы сделать исследование себе посильным. Самый факт деформируемости упругого тела свидетельствует о том, что тело это состоит из множества мельчайших частиц, удерживаемых какими-то внутренними силами в естественном состоянии тела на неизменном друг от друга расстоянии, при деформации же тела перемещающихся друг по отношению к другу.

Изучение законов молекулярной физики не доведено, несмотря на всю давность этого рода попыток, в настоящее время до такого совершенства, чтобы на них можно было построить теорию упругости. Нам на помощь приходит, однако, та самая многочисленность частиц, из которой слагается упругое тело, которая как-раз служит основным препятствием для возможности изучения индивидуального сцепления этих частиц друг с другом.

Частиц этих во всяком теле настолько много, что у нас нет ни практической возможности, ни практической необходимости индивидуального рассмотрения сил сцепления каждой частицы тела со всеми ее окружающими: нам достаточно рассмотреть среднюю величину изменений во взаимодействии всех частиц, лежащих по одну сторону какого-либо ограниченного разреза, мысленно проведенного в теле, со всеми частицами, лежащими по другую сторону этого разреза. Следуя Коши, мы так и поступаем до сих пор в теории упругости и принимаем, что мы можем разбить мысленно исследуемое тело на бесконечное множество элементарных объемов, внутри каждого из которых, как бы мал он ни был, будет заключаться все же множество материальных частиц, взаимодействующих с внешней по отношению к этому элементарному объему средой. Мы характеризуем сцепление каждого такого элементарного объема с соседними среднею величиною усилия, передаваемого через каждое мысленно проведенное в теле сечение от всех частиц тела, лежащих по одну сторону этого сечения, частицам, лежащим по другую его сторону.

Так как изменение расстояния между центрами каждых двух смежных бесконечно малых объемов тела должно быть у тела, не получающего разрывов, малым по сравнению с исходной величиною этого расстояния, то мы можем при указанных выше условиях, интересуясь опять-таки лишь средними перемещениями частиц, заключенных в отдельных элементарных параллелепипедах тела, с ч и т а т ь э т и п е р е м е щ е н и я н е п р е р ы в н ы м и ф у н к ц и я м и о т к о о р д и н а т. В таком именно смысле мы и будем подразумевать свойство сплошности, которым мы наделяем мысленно рассматриваемое нами идеально упругое тело.

Наконец, последним основным допущением теории упругости является допущение о применимости всех законов статики и динамики твердого тела к равновесию и соответственно движению всякой частицы рассматриваемого тела, как бы мала она ни была.

Метод, которым пользуется теория упругости для решения своей основной задачи, состоит в следующем.

Все формулированные выше основные допущения переводятся на язык математических формул. К полученной таким образом системе уравнений применяется затем математический аппарат. Если ту или иную задачу удается решить, не прибегая ни к каким новым рабочим гипотезам, то решение признается строгим. Упрощения получаются вообще не за счет принятия каких-либо новых рабочих гипотез, а лишь за счет ограничения круга вопросов, подлежащих рассмотрению, а также за счет предугадывания части решения. Все предположения, делаемые для последней цели, носят, однако, характер не положений, принимаемых за истину, а положений, проверяемых в процессе дальнейшего решения задачи и отбрасываемых, если они не согласуются с системой основных уравнений теории упругости или не приводят к решению поставленной задачи.

При изложении материала будем придерживаться следующего плана. Первые четыре главы будут посвящены изложению общих основ теории упругости, причем в главе I будут изложены основные положения статики упругого тела, в главе II — кинематика упругого тела, в главе III — физические основы теории упругости и в главе IV — схемы решения задач теории упругости. В дальнейших главах будут рассмотрены приложения теории упругости к различным частным задачам.

ГЛАВА 1

ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

§ 1. Основные определения и обозначения

Следует различать две категории внешних сил, которые могут действовать на упругое тело: 1) силы объемные т. е. приложенные ко всем точкам объема занятого телом, и 2) силы поверхностные, приложенные к поверхности тела.

Примерами объемных сил являются сила тяжести, центробежные силы, развивающиеся в теле при его вращении, сила магнитного тяготения, если тело находится под действием соответствующего поля, и т. п. Силы эти по тому или иному закону распределяются по всему объему тела. Вектор объемной силы будем характеризовать величиной силы, приходящейся на единицу объема тела возле данной точки. Проекции его на координатные оси ox, oy, oz, будем обозначать через X, Y, Z.

Величины X, Y и Z являются вообще некоторыми функциями от координат и в задачах теории упругости обычно бывают заданными функциями от x, y и z. Величина объемной силы, приходящейся на бесконечно малый элементарный параллелепипед, заключающий в себе данную точку, имеет своими проекциями на координатные оси величины

$X\,dx\,dy\,dz$ в направлении оси ox
$Y\,dx\,dy\,dz$ „ „ „ oy
$Z\,dx\,dy\,dz$ „ „ „ oz

Помимо сил объемных, к телу могут быть приложены, как сказано, силы поверхностные. Таковыми являются всевозможные нагрузки, являющиеся результатом воздействия на данное тело других тел, с ним соприкасающихся. По поверхности тела силы эти могут быть распределены различным образом. Величину их принято относить к единице площади поверхности тела возле данной его точки. К тому, как обозначаются эти силы, нам удобнее будет вернуться после рассмотрения возникающих в теле внутренних сил упругости.

Предположим, что на данное тело действует система взаимно уравновешивающихся объемных и поверхностных сил, под действием которых рассматриваемое тело находится в состоянии покоя. Отсечем мысленно какую-либо часть рассматриваемого тела. Отсеченная часть должна находиться в равновесии, для чего, однако, необходимо вообще существование каких-то усилий в проведенном нами мысленно сечении тела. Усилия эти принято называть силами упругости. Интенсивность этих усилий принято характеризовать напряжением в теле.

В простейшем случае равномерного растяжения призматического стержня напряжение есть величина силы, приходящейся на единицу площади поперечного сечения стержня. Если P есть величина силы, растягивающей стержень, а ω—площадь его поперечного сечения, то $\frac{P}{\omega}$ есть напряжение в этом сечении стержня.

В общем случае неравномерного распределения напряжений делением усилия, передаваемого через определенное сечение тела, на величину площади этого сечения мы получаем вектор, именуемый средним напряжением в данном сечении.

Если мы подсчитаем этим способом значения средних напряжений для различных частей рассматриваемого сечения, то в случае неравномерного распределения напряжений мы получим для каждой части сечения свое значение среднего напряжения.

Представим себе теперь в рассматриваемом сечении какую-либо точку и опишем вокруг этой точки в плоскости рассматриваемого сечения какую-либо фигуру.

Пусть площадь этой фигуры есть ω, а величина силы, передаваемой через нее, есть P. Тогда отношение $P:\omega$ будет по сказанному выше средним напряжением в рассматриваемой части рассматриваемого сечения тела. Если мы будем постепенно сужать площадь фигуры, описанной в рассматриваемом сечении тела вокруг данной точки, то величина среднего напряжения будет изменяться, стремясь при уменьшении площади ω к некоторому пределу. Предел этот принято называть напряжением в рассматриваемой точке данного сечения тела.

Внешние силы, приложенные к поверхности тела и распределенные по ней, можно охарактеризовать величиной напряжений, действующих в различных точках его поверхности. Чтобы напряжения эти могли нам представить усилия, приложенные к телу, не только по их величине, но и по направлению, напряжения принято считать векторами, направленными так же, как направлено то усилие, которое характеризуется данным напряжением. Для того, чтобы напряжениями, действующими в различных точках поверхности тела, могли быть охарактеризованы именно внешние силы, прикладываемые к данному телу извне, а не равные им, но противоположно направленные реактивные воздействия самого тела на внешнюю среду, принято для получения среднего напряжения в той или иной площадке тела делить на площадь этой площадки то усилие, которое прикладывается через эту площадку к рассматриваемой части тела извне.

§ 2. Обозначение напряжений

Напряжение, как всякий вектор в пространстве, может быть охарактеризовано тремя его составляюшими. Так как в различных точках тела напряжения вообще могут быть различны, то эти три составляющие напряжения должны быть вообще какими-то функциями от координат x, y, z.

Если бы напряжение было бы для всех площадок, проведенных через данную точку, одинаковым, то все три составляющие напряжения можно было бы считать зависящими лишь от координат x, y и z рассматриваемой точки. Как правило, однако, напряжения в различных площадках, проходящих через данную точку, получаются различными. Поэтому, говоря о напряжениях в какой-либо точке тела, мало задать точку тела, а надо еще указать, к какой из площадок, проходящих через данную точку тела, относится то напряжение, о котором идет речь в данном частном случае. Направление площадки может быть охарактеризовано направлением ее внешней нормали ν. В обозначение напряжений полезно поэтому ввести так или иначе знак этой нормали, чтобы из самого обозначения напряжения было видно, к какой площадке, проходящей через заданную точку тела, относится рассматриваемое напряжение или рассматриваемая его составляющая. Будем во всем дальнейшем выписывать этот знак в виде индекса внизу справа от основной буквы, которой мы будем обозначать напряжение.

В качестве таких основных букв мы будем пользоваться буквой X, если речь идет о проекции напряжения на ось ox; Y, если желательно отметить, что речь идет о проекции напряжения на ось oy и Z, если напряжение проектируется на ось oz. Равнодействующей всех этих трех составляющих напряжения в данной точке данной площадки, т. е. полному напряжению в данной точке данной площадки, будет присвоена в качестве такой основной буквы буква F. В соответствии со сказанным, следовательно, F_ν будет полным напряжением в площадке, внешняя нормаль к которой есть ν;

X_ν	будет	проекцией	напряжения	на ось	ox
Y_ν	"	"	"	" "	oy
Z_ν	"	"	"	" "	oz

причем вообще все эти величины будут некоторыми функциями от координат x, y, z той точки, к которой относится данное напряжение.

Направление полного напряжения (рис. 1) может вообще не совпадать с направлением нормали к той площадке, в которой напряжение действует.

Его можно спроектировать вообще как на нормаль к площадке ν, так и на плоскость самой площадки. Первую из этих двух проекций (рис. 2) условимся называть **нормальным напряжением** в рассматриваемой точке данной площадки и обозначать через N_ν, вторую будем называть **скалывающим напряжением** в данной точке данной площадки и обозначать через T_ν.

На рис. 3, наряду с F_ν и его нормальной и касательной составляющими изображены также и три его составляющие X_ν, Y_ν и Z_ν, направленные соответственно по осям ox, oy и oz.

Так как мы предполагаем оси x, y, z взаимно перпендикулярными, то между величинами F_ν, N_ν, T_ν, X_ν, Y_ν и Z_ν должны существовать зависимости

$$F_\nu^2 = N_\nu^2 + T_\nu^2, \tag{1}$$

$$F_\nu^2 = X_\nu^2 + Y_\nu^2 + Z_\nu^2, \tag{2}$$

$$N_\nu = F_\nu \cos(F_\nu, \nu). \tag{3}$$

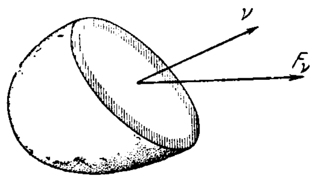

Рис. 1.

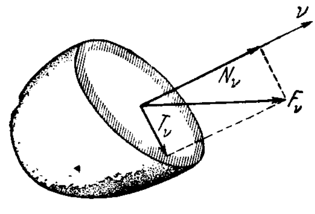

Рис. 2.

Обратимся к напряжениям, действующим в площадках, перпендикулярных к осям координат. Прилагая к ним установленное выше правило обозначения напряжений, мы должны считать, что F_x есть полное напряжение в площадке, перпендикулярной к оси ox,

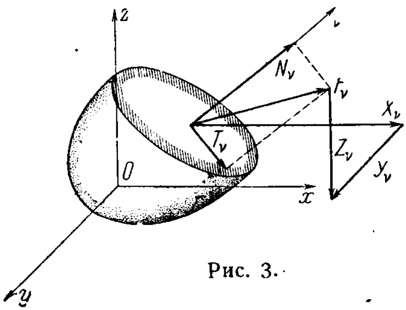

Рис. 3.

X_x его проекция иа ось ox
Y_x " " " " oy
Z_x " " " " oz

Из трех этих составляющих напряжения, составляющая X_x есть, очевидно, составляющая нормальная, так что

$$N_x = X_x,$$

две же остальные, т. е. Y_x и Z_x суть две составляющие скалывающего напряжения T_x, причем очевидно

$$T_x^2 = Y_x^2 + Z_x^2.$$

Соответствующие напряжения в площадках, перпендикулярных к оси oy, суть F_y, X_y, Y_y, Z_y. Из них Y_y есть напряжение нормальное, X_y же и Z_y — две составляющие скалывающего напряжения. Точно так же F_z, X_z, Y_z и Z_z суть соответственно полное и три составляющих напряжения, действующего в площадке, перпендикулярной к оси oz.

Девять составляющих напряжения

$$\begin{matrix} X_x, & X_y, & X_z, \\ Y_x, & Y_y, & Y_z, \\ Z_x, & Z_y, & Z_z, \end{matrix}$$