Нет автора

Вопросы философии и психологии: Книга 64

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 101
ББК 87
Н57

Нет автора
Н57 Вопросы философии и психологии: Книга 64 / Нет автора – М.: Книга по Требованию, 2021. – 272 с.

ISBN 978-5-458-04713-5

Вопросы философии и психологии. Состоит из 137 книг.

ISBN 978-5-458-04713-5

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

это было бы возможно въ томъ случаѣ, если бы можно было найти способъ переводить не-евклидовскія пространственныя отношенія на евклидовскія. Разумѣется, этотъ переводъ долженъ бы совершаться при предположеніи, что между переводимыми другъ на друга элементами существуетъ однозначное соотвѣтствіе, т.-е. чтобы напримѣръ, элементъ *a* не-евклидовскаго пространства переходилъ только въ *a* евклидовскаго и, наоборотъ, элементъ *a* евклидовскаго пространства только въ *a* не-евклидовскаго.

Этотъ принципъ перевода однихъ пространственныхъ отношеній на другія впервые былъ примѣненъ итальянскимъ геометромъ *Бельтрами*. Чтобы понять, въ чемъ состоитъ этотъ принципъ, возьмемъ простѣйшій случай, именно изображеніе шара на плоскости. Это можно сдѣлать такимъ образомъ, что каждой геодезической линіи на поверхности шара будетъ соотвѣтствовать прямая линія на плоскости, при чемъ это соотвѣтствіе будетъ однозначное: каждой точкѣ на плоскости будетъ соотвѣтствовать одна только точка на поверхности шара, каждой линіи на плоскости будетъ соотвѣтствовать только одна линія на поверхности шара. Такимъ образомъ мы можемъ всѣ линіи, находящіяся на поверхности шара, изобразить на плоской поверхности, при чемъ между линіями на поверхности шара и линіями на плоскости будетъ существовать однозначное соотвѣтствіе. Соотвѣтствіе это будетъ такого рода, что мы будемъ въ состояніи опредѣлять зависимость между построеніями на поверхности шара и построеніями на плоскости, а равнымъ образомъ мы будемъ въ состояніи дѣлать заключенія отъ однихъ построеній къ другимъ и переходить отъ теоремъ на плоскости къ теоремамъ на поверхности шара [1]).

Подобно тому какъ опредѣляется соотвѣтствіе между геометрическими образованіями на поверхности шара и плоскости, опредѣляется соотвѣтствіе и между другими поверхностями. Такъ напр., Бельтрами предложилъ изобра-

---

[1]) Ващенко-Захарченко. Геометрія Евклида. 1880 стр. 66—69.

женіе поверхности псевдосферы на плоскости. Само собою разумѣется, что разстояніе между точками на поверхности псевдосферы и на изображеніи ея на плоскости не равны, но между разстояніемъ на псевдосферѣ и разстояніемъ на плоскости есть однозначное соотвѣтствіе, а это для насъ самое существенное, потому, что благодаря этому мы можемъ переводить одни пространственныя отношенія на другія, и именно пространственныя отношенія на псевдосферѣ на пространственныя отношенія на плоскости.

Изъ такого соотвѣтствія можно было сдѣлать напр. слѣдующіе выводы. Геодезическія линіи на псевдосферѣ, подобно прямымъ на плоскости, могутъ быть продолжены неопредѣленно, не возвращаясь въ точку исхода. Черезъ каждыя двѣ точки на псевдосферѣ проходитъ только одна геодезическая линія. Черезъ каждую точку псевдосферы оказывается возможнымъ провести на ней цѣлый пучекъ геодезическихъ линій, не встрѣчающихъ данной геодезической линіи [1]). Такимъ образомъ геометрія на поверхности псевдосферы частью совпадаетъ съ геометріей на плоскости и уклоняется отъ нея въ томъ отношеніи. что на ней не дѣйствителенъ постулатъ Евклида. Отсюда Бельтрами сдѣлалъ выводъ, что геометрія на поверхности псевдосферы совпадаетъ съ планиметріей въ системѣ Лобачевскаго. Но изъ его изслѣдованій получился еще и другой важный выводъ. Если всѣ геометрическія отношенія на поверхности псевдосферы возможно представить такъ, какъ если бы они были геометрическими отношеніями на плоскости, то такъ какъ геометрія на плоскости свободна отъ какихъ бы то ни было противорѣчій, и такъ какъ она однозначно соотвѣтствуетъ псевдосферической геометріи, то вполнѣ по-

---

[1]) *Каганъ.* Геометрическая система Лобачевскаго 1900, стр. 195—200.

На поверхности псевдосферы, черезъ точку внѣ данной геодезической можно провести двѣ геодезическія линіи, которыя пересѣкаются съ данной на безконечности. Первыя двѣ линіи могутъ быть названы параллельными въ собственномъ смыслѣ. Онѣ аналогичны параллельнымъ линіямъ евклидовской геометріи, которыя тоже встрѣчаются на безконечности. (См. *Couturat.* De l'infini mathematique. стр. 325).

нятный выводъ отсюда состоитъ въ томъ, что псевдосферическая геометрія никакихъ противорѣчій въ себѣ не содержитъ. Такимъ образомъ одинъ изъ видовъ не-евклидовской геометріи оказывается свободнымъ отъ противорѣчій.

Бельтрами указалъ, какимъ образомъ можно не-евклидовскую планиметрію соотвѣтственно перевести на геометрическія отношенія на плоскости; но этого было мало, нужно было показать, что точно такимъ же образомъ и не-евклидовскую стереометрію можно перевести на евклидовскія пространственныя отношенія. Этотъ вопросъ былъ рѣшенъ *Клейномъ* въ связи съ обобщеннымъ опредѣленіемъ разстоянія, которое далъ англійскій математикъ *Кейли* [1]).

Чтобы теорія Кейли-Клейна сдѣлалась для насъ понятной, нужно сначала познакомиться въ самыхъ общихъ чертахъ съ тѣмъ, что такое проективная геометрія, такъ какъ эта послѣдняя имѣетъ возможность показать намъ, что между евклидовской геометріей и не-евклидовской есть связь и въ извѣстномъ смыслѣ и единство.

Отличіе *проективной* геометріи отъ обыкновенной или *метрической* заключается въ томъ, что эта послѣдняя *измѣряетъ* тѣ или другія пространственныя образы, она старается опредѣлить, во сколько разъ больше или меньше одинъ образъ въ сравненіи съ другимъ. Проективная геометрія не заботится о мѣрахъ, она имѣетъ въ виду опредѣлить только *положеніе*, мѣсто, почему называется также и „геометріей положенія".

Метрическая геометрія занимается, напримѣръ, опредѣленіемъ величины разстоянія между двумя точками. Проективная геометрія совершенно игнорируетъ разстояніе между двумя точками; она собственно никогда не опредѣляетъ отношенія между двумя точками, а опредѣляетъ отношеніе между четырьмя точками. Для поясненія этого приведу примѣръ.

---

[1]) Въ русской литературѣ эта теорія была изложена проф. П. А. Некрасовымъ въ «Приложеніи алгебры къ геометріи». М. 1897 и г. *Каганомъ*. Указ. соч. стр. 200—212.

Возьмемъ на прямой линіи четыре точки: A, B, C, D, которыя дѣлятъ данную линію на три отрѣзка. Частное двухъ отношеній $\frac{AB}{BC}:\frac{AD}{CD}$ называется *двойственнымъ* или *анармоническимъ* отношеніемъ четырехъ точекъ прямой. Пусть изъ какой-нибудь точки O выходятъ линіи; о нихъ говорятъ. что онѣ образуютъ пучокъ, а каждая линія называется лучомъ. (См. черт. 1-й.) Если мы четыре луча пересѣчемъ въ точкахъ A, B, C, D, то между этими точками можетъ существовать указанное выше отношеніе. Если мы проведемъ сѣкущую въ другомъ мѣстѣ, то у насъ получатся другія точки пересѣченія A′, B′, C′, D′. Между ними будетъ тоже существовать анармоническое отношеніе, и что для насъ всего важнѣе, такъ это то, что первое отношеніе вполнѣ равно второму. Такое отношеніе между четырьмя точками называютъ также *проективнымъ соотвѣтствіемъ*. Въ немъ каждой точкѣ одного ряда соотвѣтствуетъ опредѣленная и единственная точка другого ряда. Отношеніе между данными четырьмя точками не измѣняется, въ какомъ бы мѣстѣ мы ни пересѣкали данный пучокъ.

Основной элементъ проективной геометріи, исходный пунктъ ея, есть *точка*, которая представляетъ собою только положеніе. Проективная геометрія обращаетъ вниманіе только на положеніе точекъ, а отнюдь не на мѣровыя отношенія.

Для поясненія этого приведемъ примѣръ.

Указанное выше отношеніе между четырьмя точками A, B, C, D можетъ быть таково, что двойственное отношеніе между ними будетъ равняться—1. Такое отношеніе называется *гармоническимъ*.

Намъ можетъ быть предложена слѣдующая задача. Даны три точки A, B, C на одной прямой; нужно построить четвертую гармоническую къ нимъ точку D. Положеніе этой искомой четвертой точки, какъ мы сейчасъ увидимъ, находится въ зависимости отъ положенія данныхъ трехъ точекъ.

Черезъ прямую линію, (см. черт. 2) на которой находятся данныя точки А, В, С, проведемъ произвольную плоскость и возьмемъ на этой послѣдней какую-либо точку к. Проведемъ линію Ак и Вк. Пересѣчемъ обѣ линіи въ точкахъ α и β прямою, выходящею изъ С; проведемъ затѣмъ линіи $A\beta$ и $B\alpha$, которыя пересѣкутся въ λ и, наконецъ, проведемъ $k\lambda$, которая съ прямой А В пересѣчется въ точкѣ D. Эта точка и будетъ искомая. Именно отношеніе между этими четырьмя точками будетъ равняться—1. Обратимъ вниманіе на то, что положеніе этой точки не находится въ зависимости отъ того, какую плоскость мы проведемъ черезъ линіи А, С; не зависитъ также отъ того, какія мы проводимъ вспомогательныя линіи. Мы, напр., избрали для точки *к* то мѣсто, которое оно занимаетъ на чертежѣ, но мы могли бы ему указать совсѣмъ другое мѣсто и тѣмъ не менѣе искомая точка D оказалась бы въ томъ самомъ мѣстѣ, въ какомъ она находится теперь. Если мы проведемъ вторую плоскость, возьмемъ на ней какую-нибудь произвольную точку k', пересѣчемъ прямыя Ak' и Bk' прямою, выходящею изъ С, въ α' и β', проведемъ $A\beta'$ и $B\alpha'$, которые пересѣкаются въ λ, то мы увидимъ, что $k'\lambda'$ пройдетъ черезъ D.

Эти четыре точки А, В, С, D, съ тѣмъ относительнымъ положеніемъ, которое только что было объяснено, называются гармоническими [1]).

Этотъ примѣръ особенно хорошо иллюстрируетъ сущность проективной геометріи. Въ ней положеніе той или другой точки опредѣляется положеніемъ другихъ точекъ. Точка D, гармоническая къ тремъ даннымъ, всегда занимаетъ одно и тоже положеніе, какія бы вспомогательныя точки мы ни избирали; но, что для насъ всего важнѣе, мы опредѣляемъ положеніе этой точки посредствомъ простого проведенія линій, безъ какихъ бы то ни было *измѣреній*.

---

[1]) *Killing*. Einführung in die Grundlagen d. Geometrie I. 99—101. Доказательство этого положенія можно найти въ любомъ учебникѣ проективной геометріи.

Мы видѣли, что въ проективной геометріи не разсматривается отношеніе между двумя точками, а всегда разсматривается отношеніе между четырьмя, при чемъ само собою разумѣется, что мы можемъ брать какія намъ угодно точки, какъ находящіяся на конечномъ разстояніи, такъ и безконечно удаленныя.

Въ тѣхъ вопросахъ, которые насъ интересуютъ, употребляются между прочимъ отношенія къ точкамъ безконечности и къ мнимымъ точкамъ.

То обобщенное понятіе разстоянія, о которомъ я говорилъ выше, было предложено англійскимъ математикомъ *Кейли*, который показалъ, что оно получается изъ обыкновеннаго понятія разстоянія, если только мы будемъ разсматривать данныя двѣ точки въ отношеніи къ такъ называемымъ „круговымъ“ точкамъ и къ линіямъ на безконечности или въ отношеніи къ нѣкоторому коническому сѣченію, которое онъ называетъ „абсолютомъ“.

Это отношеніе данныхъ точекъ къ абсолюту *Клейнъ* поясняетъ слѣдующимъ образомъ.

„Чтобы опредѣлить разстояніе двухъ точекъ,—говоритъ онъ,—я представляю ихъ себѣ соединенными прямой линіей. Эта линія пересѣкаетъ основную поверхность (Fundamentalfläche) или „абсолютъ“ Кейли въ двухъ точкахъ, которыя съ двумя данными составляютъ нѣкоторое двойственное отношеніе. Если логарифмъ этого двойственнаго отношенія помножить на произвольное постоянное, то получится то, что я называю разстояніемъ двухъ точекъ“ [1]).

Такимъ образомъ если въ метрической геометріи разстояніе есть длина линіи, соединяющей двѣ точки, то въ проективной геометріи разстояніе есть извѣстное двойственное отношеніе между четырьмя точками. Обобщенное понятіе разстоянія можетъ также примѣняться и въ не-евклидовской геометріи. Оно является какъ бы аналогомъ разстоянія

---

[1]) Аналогично съ этимъ опредѣляется также и уголъ. См. *Klein*. Mathematische Annalen. B. IV, 574. *Killing*. l. c. B. I. 14—15; 155—162.

въ евклидовскомъ пространствѣ. При помощи этого понятія можно показать, что существуетъ тѣсная связь между различными геометрическими системами.

Указанная выше основная поверхность можетъ быть реальной, мнимой и т. п. Смотря по тому, къ какой основной поверхности будетъ относиться данная пара точекъ, мы будемъ получать ту или другую геометрическую систему. „Къ *параболической* или къ обыкновенной геометріи мы приходимъ въ томъ случаѣ, если основная поверхность Кейлевскаго мѣроопредѣленія дегенерируется въ мнимое коническое сѣченіе. Если за основную поверхность взять собственно поверхность второго порядка, но которая будетъ мнимой, то мы получимъ *эллиптическую* геометрію. Наконецъ, *гиперболическую* геометрію мы получимъ въ томъ случаѣ, если за основную поверхность возьмемъ дѣйствительную, но не прямолинейную поверхность второго порядка....“ [1]).

„Эти три геометріи оказываются частными случаями общаго Кейлевскаго мѣроопредѣленія“, говоритъ Клейнъ тамъ же.

Такимъ образомъ при проективномъ опредѣленіи разстоянія мы изъ одной и той же общей формулы, получаемъ формулы той или другой геометріи. Если между геометрическими системами существуетъ связь такого рода, что формулы одной геометріи переходятъ въ формулы другой, то ясно, что всѣ эти три геометріи *равноправны.* Мы совершенно не имѣемъ никакихъ основаній отдавать преимущество одной геометріи передъ другой [2]).

---

[1]) *Klein.* Nicht-Euclidische Geometrie. Math. Ann. IV. 577. Ср. его Gött. gel. Anz. 1871. Стр. 428—9.

[2]) Какъ мы видѣли, къ этому выводу метагеометрія уже раньше пришла, исходя изъ совсѣмъ иныхъ соображеній.

Евклидовская геометрія исходитъ изъ предположенія, что прямая линія безконечна, но можно исходить изъ другого предположенія, именно, что прямая линія конечна, тогда мы получили бы сферическую геометрію. Въ сферической геометріи прямая линія не имѣетъ безконечныхъ точекъ, или, на языкѣ математики, имѣетъ двѣ мнимыхъ точки. Наконецъ, въ геометріи Лобачевскаго прямая линія имѣетъ двѣ различныхъ безконечныхъ точки.

Геометрія Лобачевскаго называется *гиперболической* геометріей, геометрія

Если изъ общаго опредѣленія разстоянія евклидовское разстояніе получается при одномъ частномъ предположеніи, то очевидно, что параболическая или евклидовская геометрія является только частнымъ видомъ болѣе общей геометріи.

Кромѣ того, благодаря обобщенному понятію разстоянія у насъ получается одно изъ рѣшеній той задачи, на которую я указывалъ выше, именно задачи изобразить не-евклидовское пространство при помощи евклидовской геометріи. Вслѣдствіе этого разсмотрѣніе образовъ, не-евклидовской геометріи можно свести на разсмотрѣніе образовъ евклидовской геометріи.

Неевклидовскую геометрію, такимъ образомъ оказалось возможнымъ перевести вполнѣ на евклидовскую геометрію, а изъ этого можно видѣть, что не-евклидовская геометрія не содержитъ никакого противорѣчія, потому если бы такое противорѣчіе на самомъ дѣлѣ существовало, то оно было бы обнаружено при переводѣ [1]).

Риманна (сферическая) называется *эллиптической*, а геометрія евклидовская называется *параболической* вслѣдствіе аналогіи съ формулами гиперболы, эллипса и параболы въ ихъ отношеніи къ безконечнымъ точкамъ. Какъ извѣстно, гипербола имѣетъ двѣ безконечныхъ точки, эллипсъ не имѣетъ безконечно удаленныхъ точекъ, парабола имѣетъ двѣ совпадающихъ точки.

Если говорятъ, что въ евклидовскомъ пространствѣ прямая имѣетъ двѣ совпадающихъ точки, въ пространствѣ Лобачевскаго двѣ безконечныхъ точки, то это нужно понимать слѣдующимъ образомъ. Какъ извѣстно, параллельныя линіи разсматриваются какъ пересѣкающіяся на безконечности. Такъ какъ въ пространствѣ Лобачевскаго возможны двѣ параллельныхъ въ двухъ противоположныхъ направленіяхъ, то очевидно, что возможны также двѣ различныхъ безконечныхъ точки. Въ евклидовской геометріи двѣ параллельныхъ составляютъ одну, а потому двѣ безконечныхъ точки сливаются въ одну. Въ сферической геометріи нѣтъ никакихъ безконечныхъ точекъ, въ ней черезъ данную точку къ данной прямой нельзя провести ни одной параллельной.

Можно сказать, что евклидовская геометрія съ ея двумя совпадающими безконечными точками составляетъ переходный случай между гиперболическимъ пространствомъ, въ которомъ двѣ различныхъ безконечныхъ точки, и между эллиптическимъ пространствомъ, въ которомъ нѣтъ ни одной точки (или двѣ мнимыхъ). См. *Klein*. Math. Ann. IV, 577 и *Frischauf*. Absolute Geometrie. 1876, §§ 40 и 104.

[1]) Можно, конечно, сказать, что такой переводъ есть аналитическая интерпретація не-евклидовской геометріи, которую въ извѣстномъ смыслѣ можно

Пуанкаре [1]) находитъ, что можно составить полный переводъ однихъ пространственныхъ отношеній на другія. На этомъ основано его сравненіе соотвѣтствія двухъ пространственныхъ формъ со словаремъ.

„Построимъ,—говоритъ онъ,—нѣчто вродѣ словаря, заставляя соотвѣтствовать другъ другу два ряда терминовъ, написанныхъ въ двухъ столбцахъ такимъ же способомъ, какимъ соотвѣтствуютъ въ обыкновенныхъ словаряхъ слова двухъ языковъ, значеніе которыхъ одно и то же.

„Возьмемъ затѣмъ теоремы Лобачевскаго и переведемъ ихъ при помощи этого словаря, подобно тому, какъ мы переводимъ нѣмецкій текстъ при помощи нѣмецко-французскаго словаря. Мы получимъ такимъ образомъ теоремы евклидовской геометріи.

„Какъ бы далеко поэтому мы ни заходили съ гипотезами Лобачевскаго, мы никогда не придемъ къ противорѣчію. Въ самомъ дѣлѣ, если бы двѣ теоремы Лобачевскаго были противорѣчивы, то это же самое нужно было бы сказать относительно теоремъ, созданныхъ посредствомъ нашего словаря. Но это суть теоремы нашей обыкновенной геометріи". Изъ этого слѣдуетъ, что не-евклидовская геометрія никакого противорѣчія въ себѣ не содержитъ и поэтому она такъ же возможна, какъ и евклидовская геометрія.

Въ самой тѣсной связи съ теоріей Кейли-Клейна находится такъ называемая *теорія группъ преобразованій*. Это въ собственномъ смыслѣ не геометрическая теорія, а аналитическая, но она имѣетъ то значеніе, что даетъ возможность трактовать пространственныя формы въ самомъ общемъ видѣ.

назвать также и конкретной, такъ какъ въ ней формулы не-евклидовской геометріи переводятся на знакомыя намъ евклидовскія. П. А. Некрасовъ этотъ переводъ называетъ «*конкретнымъ* истолкованіемъ геометріи Лобачевскаго» (ук. соч., стр. 213 и слѣд.). *Клейнъ* въ этомъ случаѣ употребляетъ терминъ Versinnlichung. Math. Ann. IV, стр. 620—1.

[1]) См. его статью въ Revue de la Science pure et appliqué. 1891. 15. Dec. а также у *Lechalas*. Sur l'espace et le temps, стр. 44.

Общее понятіе о группѣ преобразованій можно дать слѣдующимъ образомъ. Мы знаемъ, что въ проективной геометріи та или другая геометрическая форма можетъ подвергаться тѣмъ или инымъ преобразованіямъ. „Пусть намъ будетъ данъ рядъ преобразованій A, B, C..... Если эти преобразованія обладаютъ такимъ свойствомъ, что сочетаніе двухъ какихъ-либо изъ нихъ даетъ снова преобразованіе, принадлежащее тому же ряду, то такой рядъ называется *группой преобразованій*“. [1])

При помощи аналитическаго изслѣдованія свойствъ группъ преобразованій математики могли показать, что существуетъ связь между различными пространственными формами.

„Мы должны, говоритъ Киллингъ [2]),—различать гиперболическое, параболическое пространство. Каждое изъ нихъ характеризуется той формой преобразованія, которую она допускаетъ“... „Группа представляетъ пространственную форму“, говоритъ онъ далѣе [3]).

„Теорія группъ преобразованій,—по его мнѣнію, иногда тѣсно другъ съ другомъ связываетъ такія формы, которыя, повидимому, имѣютъ совершенно различную природу. Если мы напр., вмѣсто точки будемъ разсматривать линію или плоскость въ качествѣ элемента въ трехмѣрномъ евклидовскомъ пространствѣ, то мы получимъ двѣ новыхъ пространственныхъ формы; ихъ родство съ первоначально даннымъ выступаетъ для насъ въ аналитически однородномъ строеніи соотвѣтствующихъ группъ преобразованій. Параболическая, эллиптическая и гиперболическая геометрія могутъ быть также разсматриваемы какъ *члены одного класса*“ [4]).

---

[1]) „Напр. совокупность всѣхъ движеній образуетъ группу, потому что сложеніе двухъ движеній даетъ новое движеніе“. *Klein*. Math. Ann. B. VI. Стр. 117—18.

[2]) Указ. соч. I. 157.

[3]) ib. B. II. 322. «Wie jede Raumform unter den gemachten Voraussetzungen auf eine Transformationsgruppe führt, kann umgekehrt jede stetige transitive Gruppe von Transformationen als Raumform im allgemeinen Sinne aufgefasst werden... die Gruppe stellt eine Raumform dar».

[4]) Killing l. c. B. II. 352—3.