Г. Оуэн

Теория игр

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Г11

Г. Оуэн
Г11 Теория игр / Г. Оуэн – М.: Книга по Требованию, 2023. – 228 с.

ISBN 978-5-458-49745-9

Предлагаемое издание представляет собой краткое и сравнительно элементарное учебное пособие, пригодное как для первоначального, так и для углубленного изучения теории игр. Для его чтения достаточно знания элементов математического анализа и теории вероятностей. Работа делится на две части, первая из которых посвящена играм двух лиц, а вторая - играм n лиц. Она охватывает большинство направлений теории игр. В частности, рассмотрены антагонистические игры, игры двух лиц с ненулевой суммой и основы классической кооперативной теории. Каждая глава снабжена задачами разной степени сложности. Книга вполне доступна студентам и аспирантам университетов, технических и экономических высших учебных заведений. Она представляет интерес не только для математиков, но и для специалистов в области исследования операций, военного дела, теории управления и математической экономики.

ISBN 978-5-458-49745-9

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДМЕТ И СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ ИГР

Н. Н. Воробьев

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Разумная человеческая деятельность в большинстве случаев состоит в том, что человеку для достижения тех или иных целей приходится принимать решения. При этом представляется вполне естественным стремление принимать оптимальные решения, которые реализуют поставленные цели в наибольшей степени. Научные постановки вопроса о выборе оптимальных решений встречались и встречаются в различных теоретических и прикладных дисциплинах — медицине, праве, военном деле, экономике, технике и т. д. По мере развития и математизации этих дисциплин соответствующие процессы принятия решений формализуются и приобретают характер математических моделей. Теория математических моделей принятия оптимальных решений составляет ныне обширную отрасль науки, называемую исследованием операций.

Особое место среди условий, в которых приходится принимать решения, занимают условия конфликта. Это особое положение определяется, во-первых, практической важностью, которую имеют конфликты в жизни и развитии общества, и, во-вторых, специфической сложностью конфликта как явления, в связи с которым приходится принимать решение. Дело в том, что в условиях конфликта принимающему решения субъекту приходится считаться не только со своими собственными целями, но также с теми целями, которые ставят перед собой его партнеры. Помимо этого, он должен учитывать, кроме объективных, известных ему обстоятельств конфликта, еще и те решения, которые принимают его противники и которые ему самому, вообще говоря, неизвестны. Из сказанного вытекает, что раздел исследования операций, занимающийся теорией математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов, является весьма специфическим и весьма сложным. Этим разделом является теория игр.

Поскольку теория игр есть теория моделей принятия решений, она не занимается этими решениями как психологическими, волевыми актами; не занимается она и вопросами их фактической реализации. В рамках теории игр принимаемые решения выступают как достаточно упрощенные и идеализированные схемы реальных явлений. При этом, разумеется, степень этого упрощения не должна превосходить известных пределов, за которыми модель уже утрачивает существенные черты явления.

Далее, теория игр есть теория *математических* моделей; она является разделом математики. Это значит, что конструируемые в ней модели являются формальными, знаковыми (а не, скажем, макетными или аналоговыми) моделями и их формирование и средства их анализа также формальны. В частности, формально должны вводиться в рассмотрение и основные понятия теории игр. Практически это означает, что эти понятия должны задаваться своими основными свойствами, которым тем самым придается смысл аксиом. Дальнейшее образование понятий и установление свойств может вестись уже без повторного обращения к их содержательному смыслу и без того, чтобы прибегать к каким-либо «интуитивным» соображениям. Сказанное отнюдь не оспаривает практической целесообразности использования интуиции, особенно как способа практической проверки формально полученных результатов.

В соответствии со сказанным при построении теории игр с самого начала необходимо формализовать те понятия, которые входят в ее определение: *конфликта*, *принятия решения* и *оптимальности решения*. Этому в свою очередь должно предшествовать ясное содержательное представление о сущности этих понятий и их основных структурных компонентах.

§ 2. КОНФЛИКТ И ЕГО ФОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Конфликтом естественно называть всякое явление, применительно к которому имеет смысл говорить, кто и как в этом явлении участвует, каковы его возможные исходы, кто в этих исходах заинтересован и, наконец, в чем состоит эта заинтересованность. Таким образом, в формальное определение конфликта должны входить те или иные формальные задания только что перечисленных его компонент. Достаточно общая постановка вопроса состоит в том, чтобы описать наиболее простым образом каждую из пяти указанных компонент конфликта в терминах первичных математических понятий, а именно — в терминах абстрактных множеств и отношений.

Будем в соответствии с этим считать, что принимающие участие в конфликте стороны суть элементы некоторого абстрактного множества. (Это значит, что мы априори не предполагаем, что они наделены какими-либо содержательными или хотя бы формальными свойствами.) Часто оказывается целесообразным считать их подмножествами некоторого универсального множества; элементы последнего принято называть *игроками*, а подмножества игроков, которые являются действующими сторонами в конфликте, — *коалициями действия* (различные коалиции действия могут пересекаться и даже содержаться одна в другой). Множество всех коалиций действия в конфликте далее будет обозначаться через $\mathfrak{K}_\partial$.

Каждая из коалиций действия K принимает некоторое решение из некоторого множества S_K доступных для нее решений .Будем пока считать, что множество S_K является абстрактным, и процесс принятия решения сводится к формальному и притом произвольному выбору элемента из этого множества. Элементы множества S_K называются стратегиями коалиции K.

Выбор каждой из коалиций действия некоторой стратегии определяет то, что естественно назвать *исходом* конфликта. При этом не обязательно, чтобы этот исход понимался как однозначно определенное детерминированное явление. Допустимо, чтобы тот или иной из этих исходов был множеством физических явлений или же случайным явлением, т. е. множеством явлений с вероятностной мерой на нем. Кроме того, некоторые комбинации выбранных коалициями действия стратегий могут оказаться несовместимыми и потому неосуществимыми. В этом случае можно считать, что конфликт не состоялся (в применении к салонным или спортивным играм это может выражаться в появлении некоторой помехи, воспрепятствовавшей окончанию игры).

Все исходы конфликта называются *ситуациями*. Из сказанного выше следует, что ситуации составляют некоторое множество S, являющееся подмножеством множества всех комбинаций стратегий коалиций действия, т. е. декартова произведения множеств стратегий: $S \subset \prod_{K \in \mathfrak{K}_\partial} S_K$.

По поводу заинтересованных в исходах конфликта сторон можно повторить почти все, сказанное в связи с коалициями действия. Их естественно называть коалициями интересов, и они считаются элементами некоторого абстрактного множества, которое далее будет обозначаться через $\mathfrak{K}_u$. Обычно достаточно считать, что коалиции интересов суть подмножества того же множества игроков, что и коалиции действия.

В нашем изложении множества коалиций действия и множества коалиций интересов рассматриваются как различные. Это сделано не ради одной лишь формальной общности. Во многих реальных конфликтах могут встречаться коалиции действия, не являющиеся коалициями интересов, и наоборот. Например, наблюдающий за футбольным матчем по телевидению болельщик заинтересован в исходе матча, но не может влиять на его ход. Наоборот, судья этого матча может весьма существенно влиять на его ход, но не имеет права обнаруживать заинтересованность в его исходе.

Рассмотрим, наконец, форму выражения заинтересованности для коалиций интересов. Эта заинтересованность проявляется в том, что каждая из этих коалиций предпочитает одни исходы конфликта другим. Это описывается в виде некоторого отношения предпочтения — абстрактного бинарного отношения $\succ_K$ на множестве всех ситуаций. Тот факт, что коалиция интересов K предпочитает ситуацию x ситуации y, обозначается как $x \succ_K y$.

Вообще говоря, никаких свойств у отношения $\succ_K$ (кроме его бинарности) не предполагается, хотя обычно оно считается транзитивным (т. е. из $x \succ_K y$ и $y \succ_K z$ следует $x \succ_K z$). В частности, не требуется, чтобы отношение было линейным, т. е. чтобы любые две ситуации были сравнимы друг с другом (в формальной записи для любых двух различных ситуаций x и y либо $x \succ_K y$, либо $y \succ_K x$). Допускается даже, чтобы некоторые ситуации вообще не поддавались сравнению по предпочтительности с какими-либо другими ситуациями.

Нередко отношение предпочтения задается следующим образом. На множестве ситуаций S определяется функция H_K, принимающая вещественные значения и называемая *функцией выигрыша* коалиции интересов K. Ее значение $H_K(x)$ понимается как выигрыш, который коалиция K получает в ситуации x. Естественно принять, что $x \succ_K y$, если $H_K(x) > H_K(y)$.

Итак, формальное описание конфликта состоит в задании системы

$$\Gamma = \langle \mathfrak{K}_\partial, \{S_K\}_{K \in \mathfrak{K}_\partial}, S, \mathfrak{K}_u, \{\succ_K\}_{K \in \mathfrak{K}_u} \rangle,$$

где перечисленные в ломаных скобках множества и отношения связаны друг с другом, как это было описано выше. Такая система является формальной моделью конфликта. Она называется *игрой*. Теория игр занимается изучением игр именно в этом поиимании.

Разумеется, приведенное определение игры является чрезвычайно общим. Фактически приходится иметь дело со значительно более узкими классами игр. Некоторые из этих классов рассматриваются в книге Оуэна.

Физическая и социальная природа компонент игры и, в частности коалиций действия, коалиций интересов и игроков, может быть весьма разнообразной: юридические лица, спортивные команды, конкурирующие фирмы, воюющие стороны, биологические виды в борьбе за существование и т. д.

Некоторые заинтересованные стороны могут даже не существовать реально, а являться лишь отражением определенных представлений, которые могут возникать в тех или иных условиях у реальных заинтересованных сторон. Этот случай, как это ни покажется на первый взгляд странным, является достаточно распространенным.

Предположим для простоты, что мы имеем дело с единственным субъектом, принимающим решения и притом недостаточно осведомленным об обстановке, в которой ему приходится это делать. Он допускает наступление различных последствий в результате принятия каждого своего решения, и эти последствия имеют для него различную предпочтительность. На самом деле наступление тех или иных последствий зависит от некоторой неизвестной ему закономерности природы. Поэтому он может допустить, что истинная закономерность природы является для него наименее благоприятной. Это значит, что субъект представляет себе дело так, *как будто* вместо объективной, но непознанной природы ему противостоит сознательный противник, стремящийся к ситуациям, наименее предпочитаемым субъектом. В этом смысле мы можем иногда причислять к участникам конфликта *природу*. Очевидно, в этом не заключено никакой антропоморфизации природы. Описанная форма принятия решения обычно называется принятием решений в условиях неопределенности. Оно носит конфликтный характер и формализуется в виде игры. Таким образом, математическое моделирование принятия оптимальных решений в условиях иеопределенности также можно естественным образом отнести к теории игр («игры против природы»).

Столь же разнообразной может быть и природа отношений предпочтения. Очевидно, что при рассмотрении вопроса в наиболее общем виде доказательствам поддаются лишь отдельные, и притом не слишком глубокие утверждения. В целях построения содержательной теории желателен переход к более конкретным отношениям предпочтения. Очень часто в теории игр отношения предпочтения сводятся к функциям выигрыша. Некоторые вопросы, касающиеся возможности такого сведения, рассматриваются в гл. VI.

Вопрос о природе стратегий действующих сторон рассматривается в следующем параграфе.

§ 3. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ

Мы рассмотрим два аспекта этого вопроса. Для того чтобы без каких-либо специальных оговорок говорить о выборе стратегии из множества всех стратегий как о выборе элемента из множества, необходимо представлять себе, в каком смысле и до какой степени эта коалиция в состоянии отличать свои стратегии как одну от другой, так и от иных объектов, не являющихся ее стратегиями. Если множество стратегий у коалиции действия конечно, то такого рода различения для нее во всяком случае потенциально осуществимы и эта сторона вопроса о выборе стратегии отпадает. В противном же случае некритические представления о неограниченных возможностях выбора стратегии приводят к слишком большой свободе в конструировании самих игр и как следствие этого — к построению игр, анализ которых приводит к парадоксальным явлениям. Следует подчеркнуть, что получаемые в теории игр парадоксы противоречат не только сложившейся математической практике, но и представлениям житейского здравого смысла; поэтому анализ и раскрытие этих парадоксов оказывается особенно важным и актуальным.

Далее, в представлении о решении как об элементе абстрактного множества никак не отражается возможный динамический характер решения, когда оно принимается не каким-либо однократным актом, а вырабатывается постепенно, шаг за шагом. Для того чтобы учесть этот динамический характер, необходимо конкретизировать понятие стратегии, рассматривая ее не просто как элемент абстрактного множества, а как объект, имеющий внутреннюю структуру и конструируемый в некотором процессе, причем результаты отдельных шагов этого процесса могут изменяться в зависимости от тех или иных обстоятельств, являясь тем самым ф у н к ц и я м и этих обстоятельств. Областью задания каждой такой функции является множество всех представлений принимающего решения субъекта (т. е. коалиции действия) об обстановке, в которой приходится принимать решения. Здесь важно отметить, что аргументом функции-стратегии является не истинное состояние субъекта, а его с у б ъ е к т и в н о е представление о нем (его и н ф о р м а ц и о н н о е состояние). Каждое информационное состояние субъекта можно понимать как некоторый класс его истинных состояний, в который объединяются состояния, не различаемые субъектом в момент принятия им решения. Возможными значениями функции на каждом из информационных состояний являются те частичные решения, которые субъект в состоянии принять в этот момент. Очевидно, область значений функции-решения в различных информационных состояниях определяется теми же внешними по отношению к субъекту обстоятельствами, что и сами информационные состояния.

Описанное представление о стратегии как о функции, заданной на множестве информационных состояний субъекта, весьма характерно для бо́льшинства салонных и спортивных игр, а также для большинства конфликтов, моделями которых призваны быть игры. Поэтому в ряде руководств по теории игр и в том числе в данной книге изложение начинается с описания игр именно такой динамической природы (см. § I.2).

§ 4. ОПТИМАЛЬНОСТЬ

Понятие о п т и м а л ь н о с т и принимаемого решения значительно труднее поддается формализации, чем понятия конфликта и принятия решения. Эта задача является сейчас одной из основных в теории игр.

При современном состоянии теории игр представляется наиболее естественным следующий подход к вопросам такого рода.

Отвлечемся на мгновение от теоретико-игровых сложностей и рассмотрим обычную задачу экстремального типа. Пусть мы хотим максимизировать значение интересующей нас функции f, которая задана на некотором множестве M и принимает вещественные значения. При этом будем предполагать, что в нашей власти выбрать любую точку или любые точки множества M.

Поставленную задачу можно сформулировать несколькими, как легко видеть, эквивалентными способами. Например:

1) найти точки x, в которых значение функции f не меньше ее значений в каких-либо других точках M:

$$f(x) \geqq f(y) \qquad (y \in M);$$

2) найти такие точки x, что любое отклонение от них в пределах множества M не увеличивает значения функции f;

3) найти такое множество точек R, что для произвольных x, $y \in R$ не может быть $f(x) > f(y)$, а для любой точки $z \notin R$ найдется такая точка $x \in R$, что $f(x) > f(z)$.

Ясно, что если мы вместо максимизации значения функции будем заниматься поисками наиболее предпочтительной точки в множестве M в условиях линейного отношения предпочтения (см. § 2) на этом множестве, то эти формулировки останутся эквивалентными. Но если отношение предпочтения не линейно, а носит более сложный характер, то приведенные формулировки уже перестают быть эквивалентными.

Рассмотрим, например, трехмерное евклидово пространство. Его точками являются тройки вещественных чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$. Возьмем в качестве множества M треугольник $P_1P_2P_3$ с вершинами $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ (см. рис. 1).

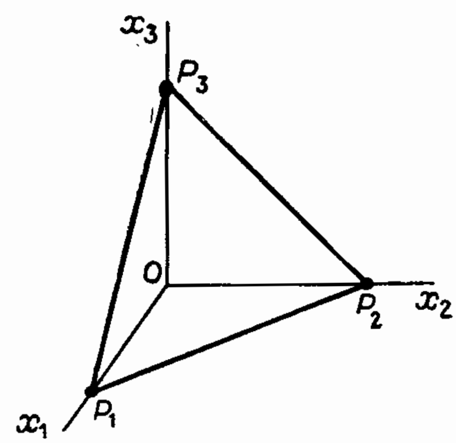

Рис. 1.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ — две точки этого треугольника. Положим $x \succ y$ и будем говорить, что т о ч к а x п р е д п о ч т и т е л ь н е е, ч е м т о ч к а y, если выполняется хотя бы одна из следующих троек неравенств:

$$x_1 + x_2 \leqq {}^2/_3, \quad x_1 > y_1, \quad x_2 > y_2, \tag{1}$$

или

$$x_1 + x_3 \leqq {}^2/_3, \quad x_1 > y_1, \quad x_3 > y_3, \tag{2}$$

или, наконец,

$$x_2 + x_3 \leqq {}^2/_3, \quad x_2 > y_2, \quad x_3 > y_3. \tag{3}$$

Наглядная интерпретация такого понимания предпочтения разбирается в § 5 этого введения, а также в § VIII.4 книги.

Рассмотрим теперь три задачи:

а) найти точки x, каждая из которых более предпочтительна, чем какая-либо другая точка y из M:

$$x \succ y \quad (y \in M)$$

(очевидно, одинаково предпочтительных точек в рассматриваемых условиях не бывает);

б) найти такие точки x, что любое отклонение от x в пределах M не приводит к более предпочтительным точкам;

в) найти такое множество точек R, что для произвольных $x, y \in R$ не может быть $x \succ y$, а какова бы ни была точка $z \notin R$, найдется такая точка $x \in R$, что $x \succ z$.

Эти задачи в применении к исследованию предпочтительности точек в смысле своих формулировок полностью соответствуют приведенным выше трем задачам о нахождении экстремума функции f. Однако они уже не являются эквивалентными.

Действительно, задача а) вовсе не имеет решения. В самом деле, возьмем произвольную точку $x = (x_1, x_2, x_3)$. Пусть для определенности x_3 — отличная от нуля координата этой точки. Тогда у точки

$$y = (x_1 + x_3/2,\ x_2 + x_3/2,\ 0)$$

две координаты больше соответствующих координат точки x. Поэтому не может быть $x \succ y$.

Решение задачи б) состоит из единственной точки $(^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$. В самом деле, пусть $y = (y_1, y_2, y_3) \succ x$. По определению отношения предпочтения это значит, что либо

$$y_1 + y_2 \leqq {}^2/_3, \quad y_1 > {}^1/_3, \quad y_2 > {}^1/_3,$$

либо

$$y_1 + y_3 \leqq {}^2/_3, \quad y_1 > {}^1/_3, \quad y_3 > {}^1/_3,$$

либо

$$y_2 + y_3 \leqq {}^2/_3, \quad y_2 > {}^1/_3, \quad y_3 > {}^1/_3.$$

Но ни одна из этих троек неравенств, очевидно, не совместна.

Значит, $(^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$ является искомой точкой. Покажем, что иных точек с этим свойством нет. Действительно, пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \neq (^1/_3, {}^1/_3, {}^1/_3)$. Пусть для определенности x_3 — наибольшая из координат этой точки. Тогда, очевидно, $x_3 > {}^1/_3$, так что $x_1 + x_2 < {}^2/_3$. Возьмем теперь столь малое $\varepsilon > 0$, что

$$x_1 + x_2 + 2\varepsilon \leqq {}^2/_3, \quad x_3 - 2\varepsilon > 0,$$

и положим

$$x_1 + \varepsilon = y_1, \quad x_2 + \varepsilon = y_2, \quad x_3 - 2\varepsilon = y_3.$$

Мы получаем

$$y_1 + y_2 \leqq {}^2/_3, \quad y_1 > x_1, \quad y_2 > x_2,$$

т. е. $y \succ x$.

Решим, наконец, задачу в). Возьмем для этого точку $O=(^1/_3, ^1/_3, ^1/_3)$ и соединим ее с серединами всех трех сторон треугольника $P_1P_2P_3$, т. е. с точками $K=(^1/_2, ^1/_2, 0)$, $L=(^1/_2, 0, ^1/_2)$ и $M=(0, ^1/_2, ^1/_2)$, как это показано на рис. 2. Объединение трех отрезков OK, OL и OM обозиачим через R. Покажем, что множество R является искомым.

Возьмем некоторую точку $x=(x_1, x_2, x_3)$, для которой $x_1+x_2 \leqq {}^2/_3$. Это значит, что точка x иаходится в треугольнике ABP_3. Отношение $x_1 > y_1$ означает, что точка $y=(y_1, y_2, y_3)$ расположена дальше от вершины P_1, чем x, т. е. что она находится в трапеции CDP_2P_3. Точно так же $x_2 > y_2$ означает, что y находится в трапеции EFP_3P_1. Таким образом, для всех y, лежащих в параллелограмме $CxFP_3$ (считая, что стороны Cx и xF параллелограмму не принадлежат), $x \succ y$.

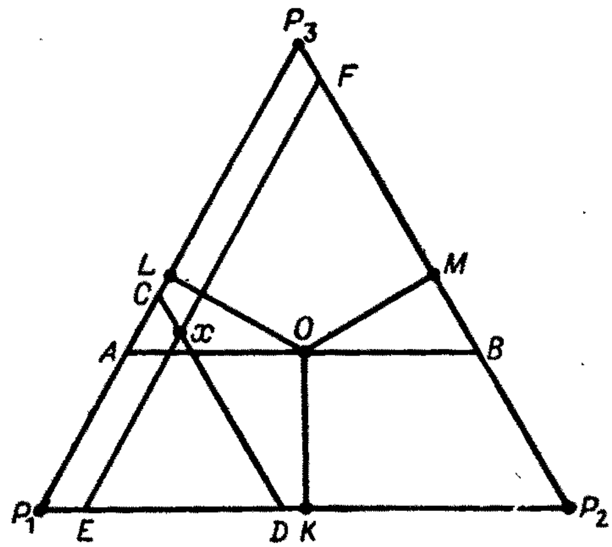

Рис. 2.

Построив такие параллелограммы из всех точек, лежащих на отрезках LO и OM, мы «заметем» весь четырехугольник OMP_3L. Значит, для каждой точки y из этого четырехугольника (за исключением точек на ломаной LOM, т. е. точек, принадлежащих R) иайдется такое $x \in R$, что $x \succ y$. Ввиду симметрии всей картины, такое $x \in R$ найдется и вообще для каждой точки треугольника, не принадлежащей R.

Вместе с тем ни одна из точек R в такой параллелограмм не попадет. Следовательно, для $x, y \in R$ отношение $x \succ y$ невозможно.

Мы видим, что незначительные различия в формулировках оптимальности для традиционных экстремальных задач превращаются в существенно разные концепции оптимальности для задач более широкого типа. Это показывает, в частности, что вопрос о формализации понятия оптимального решения ие может быть решен в рамках теории игр однозначно. Более того, оказывается, что для одиих классов игр естественно принимать одни принципы оптимальности, а для других — совсем иные и даже противоречащие первым.

Например, читатель может непосредственно обратиться к примеру VII. 1.4 (дилемма заключенного). В этой игре участвуют два игрока, которые одновремеино являются как коалициями действия, так и коалициями интересов. Стратегиями первого игрока являются строки матрицы, а стратегиями второго — ее столбцы. Пара чисел, написаная в каждой из четырех клеток матрицы, представляет собой выигрыш первого и второго игроков. Здесь выбор игроками их первых стратегий оптимален в том смысле, что оба они получают достаточно большие выигрыши. Вместе с тем никакая взаимная договоренность игроков выбирать именно первые стратегии не может считаться устойчивой, так как каждый нарушивший ее игрок получает от этого нарушения больший выигрыш. Наоборот, выбор игроками своих вторых стратегий приводит к устойчивой ситуации, но выигрыши игроков в ней малы.

§ 5. КЛАССИФИКАЦИЯ ИГР

Формальное определение игры, приведенное в § 2, оставляет весьма широкую свободу выбора конкретных возможностей для компонент, составляющих игру. Налагая на эти компоненты те или иные ограничения, мы можем получать различные классы игр.

В качестве первого классификационного признака возьмем множество коалиций интересов $\mathfrak{K}_u$. Если это множество пусто, то конфликт вырождается в явление, в исходах которого никто не заинтересован. Математические модели такого рода явлений составляют содержание традиционной описательной математики.

Если множество $\mathfrak{K}_u$ состоит из единственной коалиции интересов, то мы также утрачиваем конфликт в обычном смысле этого слова, а имеем дело с явлением, в котором единственная заинтересованная сторона стремится выбрать наиболее предпочтительную для себя ситуацию. Математическая трактовка этого круга вопросов сводится к разного рода экстремальным задачам, классическим, как, например, решаемые в дифференциальном или вариационном исчислениях, или современным, которые составляют предмет различных отраслей оптимального программирования (линейного, дискретного, динамического, стохастического программирования и т. д.).

Собственно теория игр начинается тогда, когда множество $\mathfrak{K}_u$ насчитывает не менее двух заинтересованных сторон. Далее мы будем все время считать, что имеем дело с этим случаем.

Следующим признаком, по которому естественно провести дальнейшую классификацию игр, является количество коалиций действия.

Прежде всего совершенно ясно, что рассмотрение игр с пустым множеством коалиций действия лишено смысла: здесь множество ситуаций состоит не более чем из одного элемента и вопрос об отношениях предпочтения вообще не возникает.

Если же в игре имеется хотя бы одна (и даже только одна) коалиция действия K, то исследование игры становится содержательным. В этом случае имеется единственное множество страте-