Н. Бурбаки

Группы и алгебры Ли

Часть 3

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Бурбаки Н.

Б91 Группы и алгебры Ли: Часть 3 / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2012. – 342 с.

ISBN 978-5-458-31407-7

Книга входит во всемирно известную энциклопедию современной математики Основы математики>, созданную группой французских ученых, выступающих под псевдонимом Н. Бурбаки. Ряд томов этой энциклопедии уже вышел в русском переводе и получил высокую оценку читателей. Перевод первых глав Групп и алгебр Ли> был выпущен в издательстве Мир> в 1972 и 1975 гг., а сейчас предлагаются очередные две главы. Книга посвящена изучению полупростых алгебр Ли. Она содержит обширный материал по теории подалгебр Картана, автоморфизмам алгебр Ли, теории представлений полупростых алгебр Ли. Книга предназначена для широкого круга математиков различных специальностей и разного уровня подготовки - от студентов до научных работников.

ISBN 978-5-458-31407-7

ГЛАВА VII

ПОДАЛГЕБРЫ КАРТАНА, РЕГУЛЯРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

На протяжении этой главы символом k обозначается некоторое поле. Выражение „векторное пространство" означает „векторное пространство над полем k"; аналогичным образом обстоит дело с выражениями „алгебра Ли" и т. п. Все алгебры Ли предполагаются конечномерными.

§ 1. Примарное разложение линейных представлений

1. Примарное разложение для семейства эндоморфизмов

Пусть V — векторное пространство, S — некоторое множество и r — отображение множества S в множество $\mathrm{End}(V)$. Обозначим через P множество всех отображений множества S в k. Для каждого элемента $\lambda \in P$ будем обозначать через $V_\lambda(S)$ (соотв. через $V^\lambda(S)$) множество таких элементов $v \in V$, что равенство $r(s)v = \lambda(s)v$ выполняется для всех $s \in S$ (соотв. равенство $(r(s) - \lambda(s))^n v = 0$ выполняется для достаточно больших n и всех $s \in S$). Множества $V_\lambda(S)$ и $V^\lambda(S)$ являются подпространствами векторного пространства V, причем $V_\lambda(S) \subset \subset V^\lambda(S)$. Подпространство $V_\lambda(S)$ называется *собственным подпространством* пространства V, отвечающим отображению λ (и r), а $V^\lambda(S)$ — *примарным подпространством* пространства V, отвечающим отображению λ (и r). Подпространство $V^0(S)$ называется *нильпространством* пространства V (относительно действия r). При этом говорят, что отображение λ является *весом* действия множества S на пространстве V, если $V^\lambda(S) \neq 0$.

В том частном случае, когда S состоит из одного элемента s, множество P отождествляют с полем k и вместо обозначений $V_\lambda(\{s\})$ и $V^\lambda(\{s\})$ используют обозначения $V_{\lambda(s)}(s)$ и $V^{\lambda(s)}(s)$ или $V_{\lambda(s)}(r(s))$ и $V^{\lambda(s)}(r(s))$; при этом говорят о собственных подпространствах, примарных подпространствах и нильпространстве эндоморфизма $r(s)$. Элемент v подпространства $V_{\lambda(s)}(s)$ называют *собственным вектором* эндоморфизма $r(s)$, а если $v \neq 0$, то $\lambda(s)$ называют его *собственным значением* (ср. *Алг.*, гл. VII, § 5).

Из данных определений непосредственно следует, что для любого элемента $\lambda \in P$ выполнены соотношения

$$V^{\lambda}(S) = \bigcap_{s \in S} V^{\lambda(s)}(s), \tag{1}$$

$$V_{\lambda}(S) = \bigcap_{s \in S} V_{\lambda(s)}(s). \tag{2}$$

Пусть k' — расширение поля k. Каноническое отображение множества $\operatorname{End}(V)$ в множество $\operatorname{End}(V \otimes_k k')$ дает в композиции с отображением r некоторое отображение $r'\colon S \to \operatorname{End}(V \otimes_k k')$. Аналогичным образом, по любому отображению λ множества S в поле k канонически определяется отображение, которое мы снова обозначим через λ, множества S в поле k'. Используя эти обозначения, сформулируем следующее предложение:

Предложение 1. *Для любого элемента $\lambda \in P$ имеют место равенства*

$$(V \otimes_k k')^{\lambda}(S) = V^{\lambda}(S) \otimes_k k'$$

и

$$(V \otimes_k k')_{\lambda}(S) = V_{\lambda}(S) \otimes_k k'.$$

Пусть (a_i) — базис векторного k-пространства k'. Любой элемент $v \in V \otimes_k k'$ может быть единственным образом представлен в виде $\sum v_i \otimes a_i$, где (v_i) — семейство с конечным носителем векторов пространства V. Так как для любого элемента $s \in S$ выполняются равенства

$$(r'(s) - \lambda(s))^n(v) = \sum (r(s) - \lambda(s))^n v_i \otimes a_i,$$

то

$$v \in (V \otimes_k k')^{\lambda}(S) \Leftrightarrow v_i \in V^{\lambda}(S) \quad \text{при всех } i,$$
$$v \in (V \otimes_k k')_{\lambda}(S) \Leftrightarrow v_i \in V_{\lambda}(S) \quad \text{при всех } i,$$

что и доказывает предложение.

Предложение 2. *Пусть V, V', W — векторные пространства, а $r\colon S \to \operatorname{End}(V)$, $r'\colon S \to \operatorname{End}(V')$, $q\colon S \to \operatorname{End}(W)$ — отображения.*

(i) *Если $f\colon V \to W$ — линейное отображение, для которого $q(s) f(v) = f(r(s) v)$ при любых $s \in S$, $v \in V$, то оно переводит подпространство $V^{\lambda}(S)$* (соотв. $V_{\lambda}(S)$) *в $W^{\lambda}(S)$* (соотв. в $W_{\lambda}(S)$) *при любом $\lambda \in P$.*

(ii) *Если $\mathrm{B}\colon V \times V' \to W$ — билинейное отображение, для которого*

$$q(s)\mathrm{B}(v, v') = \mathrm{B}(r(s)v, v') + \mathrm{B}(v, r'(s)v')$$

при $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$, *то оно переводит* $V^{\lambda}(S) \times V'^{\mu}(S)$ (соотв. $V_{\lambda}(S) \times V'_{\mu}(S)$) *в* $W^{\lambda+\mu}(S)$ (соотв. в $W_{\lambda+\mu}(S)$) *для любых* λ, $\mu \in P$.

(iii) *Если* B: $V \times V' \to W$ — *билинейное отображение, для которого*

$$q(s)\,\mathrm{B}(v, v') = \mathrm{B}(r(s)\,v, r'(s)\,v')$$

при $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$, *то оно переводит* $V^{\lambda}(S) \times V'^{\mu}(S)$ (соотв. $V_{\lambda}(S) \times V'_{\mu}(S)$) *в* $W^{\lambda\mu}(S)$ (соотв. в $W_{\lambda\mu}(S)$) *для любых* λ, $\mu \in P$.

Утверждение (i) непосредственно вытекает из соотношения $(q(s) - \lambda(s))^n f(v) = f((r(s) - \lambda(s))^n v)$ для $s \in S$ и $v \in V$. В предположениях п. (ii) из соотношения

$$(q(s) - \lambda(s) - \mu(s))\,\mathrm{B}(v, v') = \\ = \mathrm{B}((r(s) - \lambda(s))\,v, v') + \mathrm{B}(v, (r'(s) - \mu(s))\,v')$$

для $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$ индукцией по n получаем

$$(q(s) - \lambda(s) - \mu(s))^n\,\mathrm{B}(v, v') = \\ = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} \mathrm{B}((r(s) - \lambda(s))^i\,v, (r'(s) - \mu(s))^j\,v'),$$

что непосредственно дает наше утверждение. В случае (iii) имеем

$$(q(s) - \lambda(s)\,\mu(s))\,\mathrm{B}(v, v') = \\ = \mathrm{B}((r(s) - \lambda(s))\,v, r'(s)\,v') + \mathrm{B}(\lambda(s)\,v, (r'(s) - \mu(s))\,v')$$

для $s \in S$, $v \in V$, $v' \in V'$, откуда индукцией по n получаем соотношение

$$(q(s) - \lambda(s)\,\mu(s))^n\,\mathrm{B}(v, v') = \\ = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} \mathrm{B}(\lambda(s)^j (r(s) - \lambda(s))^i\,v, r'(s)^i (r'(s) - \mu(s))^j\,v'),$$

из которого следует нужное утверждение.

Предложение 3. *Суммы* $\sum_{\lambda \in P} V^{\lambda}(S)$ *и* $\sum_{\lambda \in P} V_{\lambda}(S)$ *прямые.*

Второе утверждение следует из первого, которое мы и будем доказывать. Рассмотрим несколько случаев.

а) *Множество* S *пусто.* Утверждение тривиально.

б) *Множество* S *состоит из одного элемента* s. Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — различные элементы поля k и $v_i \in V^{\lambda_i}(s)$,

$i=0, 1, \ldots, n$, — некоторые векторы. Предположим, что $v_0=v_1+\ldots+v_n$. Нам нужно доказать, что $v_0=0$. Для каждого $i=0, \ldots, n$ существует такое целое число $q_i>0$, что $(r(s)-\lambda_i)^{q_i} v_i=0$. Рассмотрим многочлены $P(X)=\prod_{i\geqslant 1}(X-\lambda_i)^{q_i}$ и $Q(X)=(X-\lambda_0)^{q_0}$. Тогда $Q(r(s))v_0=0$ и $P(r(s))v_0=\sum_{i=1}^{n} P(r(s))v_i=0$. Так как многочлены P и Q взаимно просты, то тождество Безу показывает, что $v_0=0$.

в) *S — непустое конечное множество.* Будем доказывать наше утверждение индукцией по числу элементов множества S. Выберем элемент $s\in S$ и положим $S'=S-\{s\}$. Пусть $(v_\lambda)_{\lambda\in P}$ — такое семейство с конечным носителем элементов пространства V, что $\sum_{\lambda\in P} v_\lambda=0$ и $v_\lambda\in V^\lambda(S)$. Выберем некоторый элемент $\lambda_0\in P$ и обозначим через P' множество тех отображений $\lambda\in P$, для которых $\lambda|S'=\lambda_0|S'$. Из предположения индукции, примененного к множеству S', следует, что $\sum_{\lambda\in P'} v_\lambda=0$. Если λ и μ — различные элементы множества P', то $\lambda(s)\neq\mu(s)$. Так как вследствие б) сумма $\sum_{\alpha\in k} V^\alpha(s)$ прямая и так как $v_\lambda\in V^{\lambda(s)}(s)$, то $v_\lambda=0$ для всех $\lambda\in P'$. В частности, $v_{\lambda_0}=0$, что и нужно было доказать.

г) *Общий случай.* Пусть $(v_\lambda)_{\lambda\in P}$ — семейство с конечным носителем элементов пространства V, такое, что $\sum_{\lambda\in P} v_\lambda=0$ и $v_\lambda\in V^\lambda(S)$. Обозначим через P' конечное подмножество тех элементов $\lambda\in P$, для которых $v_\lambda\neq 0$, и пусть S' — такое конечное подмножество в S, что из условий $\lambda\in P'$, $\mu\in P'$, $\lambda|S'=\mu|S'$ следует равенство $\lambda=\mu$. Тогда $v_\lambda\in V^{\lambda|S'}(S')$. Применяя в), мы получаем, что $v_\lambda=0$ для всех $\lambda\in P'$. Тем самым предложение доказано.

Напомним, что если $x\in\mathrm{End}(V)$, то через $\mathrm{ad}\,x$ обозначается отображение $y\mapsto xy-yx=[x, y]$ множества $\mathrm{End}(V)$ в себя.

Лемма 1. *Пусть $x, y\in\mathrm{End}(V)$.*

(i) *Предположим, что пространство V конечномерно. Для того чтобы эндоморфизм x можно было привести к треугольному виду, необходимо и достаточно, чтобы $V=\sum_{\alpha\in k} V^\alpha(x)$.*

(ii) *Если существует такое целое число n, что $(\mathrm{ad}\,x)^n y=0$, то каждое подпространство $V^\alpha(x)$ устойчиво относительно эндоморфизма y.*

(iii) *Предположим, что пространство V конечномерно. Если $V = \sum_{a \in k} V^a(x)$ и каждое подпространство $V^a(x)$ устойчиво относительно эндоморфизма y, то существует такое целое число n, что* $(\operatorname{ad} x)^n y = 0$.

Утверждение (i) следует из *Алг.*, гл. VII, § 5, n° 1, предложение 3.

Пусть $E = \operatorname{End}(V)$ и B — билинейное отображение $(u, v) \mapsto u(v)$ произведения $E \times V$ в пространство V. По определению отображения $\operatorname{ad} x$

$$x(\mathrm{B}(u, v)) = \mathrm{B}(u, x(v)) + \mathrm{B}((\operatorname{ad} x)(u), v),$$

где $x \in E$, $u \in E$, $v \in V$. Отображение $\operatorname{ad} x$ задает действие элемента x на пространстве E. Применяя предложение 2 (ii), получим, что $\mathrm{B}(E^0(x), V^a(x)) \subset V^a(x)$ для всех $a \in k$. Так как $(\operatorname{ad} x)^n y = 0$, то $y \in E^0(x)$ и, следовательно, $y(V^a(x)) \subset V^a(x)$, что и доказывает утверждение (ii).

Для доказательства утверждения (iii) достаточно рассмотреть случай, когда пространство V совпадает с $V^a(x)$. Тогда, заменяя x на $x - a$, мы можем считать эндоморфизм x нильпотентным. Значит, $(\operatorname{ad} x)^{2 \dim V - 1} = 0$ (гл. I, § 4, n° 2), что и доказывает наше утверждение.

Замечание. Приведенное доказательство показывает, что если пространство V конечномерно и существует такое целое число n, что $(\operatorname{ad} x)^n y = 0$, то $(\operatorname{ad} x)^{2 \dim V - 1} y = 0$.

В дальнейшем мы будем говорить, что отображение $r\colon S \to \operatorname{End}(V)$ удовлетворяет условию (ПК) („почти коммутативности“), если

(ПК) *Для любой пары (s, s') элементов множества S существует такое целое число n, что*

$$(\operatorname{ad} r(s))^n r(s') = 0.$$

Теорема 1. *Предположим, что пространство V конечномерно. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *Имеет место условие* (ПК), *и для любого $s \in S$ эндоморфизм $r(s)$ можно привести к треугольному виду.*

(ii) *Для всех элементов $\lambda \in P$ подпространство $V^\lambda(S)$ устойчиво относительно $r(S)$, и $V = \sum_{\lambda \in P} V^\lambda(S)$.*

Если $V = \sum_{\lambda \in P} V^\lambda(S)$, то $V = \sum_{a \in k} V^a(s)$ для любого $s \in S$, и вследствие леммы 1 из условия (ii) следует условие (i).

Предположим, что условие (i) выполнено. Лемма 1 и формула (1) показывают, что подпространство $V^\lambda(S)$ устойчиво относительно $r(S)$. Остается доказать, что $V = \sum_{\lambda \in P} V^\lambda(S)$. Проведем индукцию по $\dim V$. Возможны два случая:

а) Для каждого элемента $s \in S$ эндоморфизм $r(s)$ имеет единственное собственное значение $\lambda(s)$. Тогда $V = V^\lambda(S)$.

б) Существует элемент $s \in S$, для которого эндоморфизм $r(s)$ имеет по крайней мере два различных собственных значения. В этом случае пространство V есть прямая сумма подпространств $V^a(s)$, где $a \in k$ и $\dim V^a(s) < \dim V$ для всех элементов a. Каждое подпространство $V^a(s)$ устойчиво относительно эндоморфизмов из $r(S)$, и для завершения доказательства достаточно применить предположение индукции.

Следствие 1. *Предположим, что пространство V конечномерно и выполняется условие* (ПК). *Пусть k' — расширение поля k. Предположим, что эндоморфизм $r(s)$ можно привести к треугольному виду при любом $s \in S$. Обозначим через P' множество всех отображений множества S в поле k'. Тогда*

$$V \otimes_k k' = \sum_{\lambda' \in P'} (V \otimes_k k')^{\lambda'}(S).$$

Пусть $r'\colon S \to \mathrm{End}(V \otimes_k k')$ — отображение, канонически определенное отображением r. Если $s_1, s_2 \in S$, то для некоторого целого числа n имеет место равенство $(\mathrm{ad}\, r(s_1))^n r(s_2) = 0$, откуда $(\mathrm{ad}\, r'(s_1))^n r'(s_2) = 0$. Теперь для доказательства следствия достаточно применить теорему 1.

Следствие 2. *Предположим, что пространство V конечномерно и имеет место условие* (ПК). *Обозначим через $V^+(S)$ векторное подпространство $\sum_{s \in S} \left(\bigcap_{i \geqslant 1} r(s)^i V \right)$. Тогда*

(i) *подпространства $V^0(S)$ и $V^+(S)$ устойчивы относительно $r(S)$;*

(ii) $V = V^0(S) \oplus V^+(S)$;

(iii) *каждое устойчивое относительно $r(S)$ подпространство W векторного пространства V, для которого $W^0(S) = 0$, содержится в подпространстве $V^+(S)$;*

(iv) $\sum_{s \in S} r(s) V^+(S) = V^+(S)$.

Кроме того, $V^+(S)$ — единственное подпространство векторного пространства V, обладающее свойствами (i) *и* (ii). *Если k' — некоторое расширение поля k, то $(V \otimes_k k')^+(S) = V^+(S) \otimes_k k'$.*

Последнее утверждение очевидно. При доказательстве остальных можно вследствие предложения 1 считать поле k алгебраически замкнутым. По теореме 1 $V = \sum_{\lambda \in P} V^{\lambda}(S)$ и подпространства $V^{\lambda}(S)$ устойчивы относительно $r(S)$. Для любого элемента $s \in S$ характеристический многочлен эндоморфизма $r(s) \mid V^{\lambda}(S)$ равен $(X - \lambda(s))^{\dim V^{\lambda}(S)}$. Поэтому пересечение $\bigcap_{i \geqslant 1} r(s)^i V^{\lambda}(S)$ равно нулю, если $\lambda(s) = 0$, и равно $V^{\lambda}(S)$, если $\lambda(s) \neq 0$. Таким образом,

$$V^{+}(S) = \sum_{\substack{\lambda \in P \\ \lambda \neq 0}} V^{\lambda}(S), \tag{3}$$

что доказывает утверждения (i), (ii) и (iv). Если подпространство W векторного пространства V устойчиво относительно $r(S)$, то $W = \sum_{\lambda \in P} W^{\lambda}(S)$ и $W^{\lambda}(S) = W \cap V^{\lambda}(S)$. Если же $W^0(S) = 0$, то ясно, что $W \subset V^{+}(S)$, а это и доказывает утверждение (iii).

Пусть V' — устойчивое относительно $r(S)$ подпространство векторного пространства V, для которого $V' \cap V^0(S) = 0$. Тогда $V'^0(S) = 0$, и, согласно утверждению (iii), $V' \subset V^{+}(S)$. Если же при этом $V = V^0(S) + V'$, то ясно, что $V' = V^{+}(S)$. Ч. Т. Д.

Пару подпространств $(V^0(S), V^{+}(S))$ часто называют *разложением Фиттинга* пространства V, или отображения $r\colon S \to \operatorname{End}(V)$. Если множество S состоит из одного элемента s, то вместо $V^{+}(\{s\})$ пишут $V^{+}(s)$ или $V^{+}(r(s))$. При этом $V = V^0(s) \oplus V^{+}(s)$, подпространства $V^0(s)$ и $V^{+}(s)$ устойчивы относительно эндоморфизма $r(s)$, ограничение $r(s) \mid V^0(s)$ — нильпотентный, а ограничение $r(s) \mid V^{+}(s)$ — биективный эндоморфизмы.

Следствие 3. *Пусть V и V' — конечномерные векторные пространства, $r\colon S \to \operatorname{End}(V)$ и $r'\colon S \to \operatorname{End}(V')$ — отображения, удовлетворяющие условию* (ПК). *Пусть $f\colon V \to V'$ — такое линейное сюръективное отображение, что $f(r(s)v) = r'(s) f(v)$ для $s \in S$ и $v \in V$. Тогда $f(V^{\lambda}(S)) = V'^{\lambda}(S)$ для всех $\lambda \in P$.*

Вследствие предложения 1 достаточно доказать утверждение при условии, что поле k алгебраически замкнуто. При этом по теореме 1 $V = \bigoplus_{\lambda \in P} V^{\lambda}(S)$, $V' = \bigoplus_{\lambda \in P} V'^{\lambda}(S)$ и $V' = f(V) = \sum_{\lambda \in P} f(V^{\lambda}(S))$. Наконец, по предложению 2 (i) имеет место включение $f(V^{\lambda}(S)) \subset V'^{\lambda}(S)$, и утверждение доказано.

Предложение 4. *Предположим, что поле k совершенно. Пусть V — конечномерное векторное пространство, u — произвольный элемент множества* $\operatorname{End}(V)$, *а u_s и u_n — полупростая и* *нильпотентная компоненты эндоморфизма* u (*Alg.*, chap. VII, § 5, n° 8) [1]).

(i) $V^\lambda(u) = V^\lambda(u_s) = V_\lambda(u_s)$ *для всех* $\lambda \in k$.

(ii) *Если пространство* V *снабжено структурой алгебры и отображение* u *— дифференцирование этой алгебры, то отображения* u_s *и* u_n *— также дифференцирования.*

(iii) *Если пространство* V *снабжено структурой алгебры и отображение* u *— автоморфизм этой алгебры, то отображения* u_s *и* $1 + u_s^{-1}u_n$ *— тоже автоморфизмы.*

Вследствие предложения 1 эти утверждения достаточно доказать в предположении, что поле k алгебраически замкнуто. Тогда

$$V = \sum_{\lambda \in k} V^\lambda(u).$$

Полупростая компонента эндоморфизма $u \mid V^\lambda(u)$ является гомотетией с коэффициентом λ в пространстве $V^\lambda(u)$. Это доказывает утверждение (i).

Предположим теперь, что пространство V снабжено структурой алгебры. Пусть $x \in V^\lambda(u)$, $y \in V^\mu(u)$.

Если эндоморфизм u является дифференцированием алгебры V, то $xy \in V^{\lambda+\mu}(u)$ (предложение 2 (ii)) и, следовательно,

$$u_s(xy) = (\lambda + \mu)(xy) = (\lambda x)y + x(\mu y) = (u_s x)y + x(u_s y).$$

Поэтому отображение u_s будет дифференцированием алгебры V. Тогда отображение $u_n = u - u_s$ также будет дифференцированием алгебры V.

Если отображение u является автоморфизмом алгебры V, то $\operatorname{Ker}(u_s) = V^0(u) = 0$ и отображение u_s биективно. С другой стороны, $xy \in V^{\lambda\mu}(u)$ (предложение 2 (iii)), поэтому

$$u_s(xy) = (\lambda\mu)(xy) = (\lambda x)(\mu y) = (u_s x) \cdot (u_s y).$$

Данное равенство показывает, что u_s — автоморфизм алгебры V. Следовательно, отображение

$$1 + u_s^{-1}u_n = u_s^{-1}u$$

тоже будет автоморфизмом.

---

[1]) См. также *Алг.*, гл. VII, § 5, n° 4, предложение 11, и *Алг.*, гл. VIII, § 9, n° 4. — *Прим. перев.*

2. *Примарное разложение для линейного семейства эндоморфизмов*

Предположим, что множество S обладает структурой *векторного пространства* и отображение $r\colon S \to \operatorname{End}(V)$ *линейно*. Предположим также, что векторные пространства V и S *конечномерны*.

Предложение 5. *Пусть выполняется условие* (ПК), *и пусть* $\lambda\colon S \to k$ — *такое отображение, для которого* $V^\lambda(S) \neq 0$. *Тогда если поле* k *имеет характеристику* 0, *то отображение* λ *линейно. Если поле* k *имеет характеристику* $p \neq 0$, *то существуют такая степень* q *простого числа* p, *делящая* $\dim V^\lambda(S)$, *и такая однородная полиномиальная функция* $P\colon S \to k$ *степени* q, *что для всех элементов* $s \in S$ *справедливо равенство* $\lambda(s)^q = P(s)$.

Так как подпространство $V^\lambda(S)$ устойчиво относительно $r(S)$ (лемма 1 и формула (1) из n° 1), то можно предположить, что $V = V^\lambda(S)$. Пусть $n = \dim V$. Тогда для любого $s \in S$

$$\det(X - r(s)) = (X - \lambda(s))^n.$$

С другой стороны, формула разложения определителя показывает, что

$$\det(X - r(s)) = X^n + a_1(s)X^{n-1} + \ldots + a_i(s)X^{n-i} + \ldots,$$

где $a_i\colon S \to k$ — однородная полиномиальная функция степени i. Можно записать $n = qm$, где q — степень характеристической экспоненты поля k и $(q, m) = 1$. Тогда $(X - \lambda(s))^n = (X^q - \lambda(s)^q)^m$, следовательно, $-m\lambda(s)^q = a_q(s)$. Из этого равенства уже вытекает доказываемое утверждение.

Предложение 6. *Пусть поле* k *бесконечно и выполняется условие* (ПК). *Пусть* k' — *расширение поля* k. *Положим* $V' = V \otimes_k k'$, $S' = S \otimes_k k'$. *Пусть* $r'\colon S' \to \operatorname{End}(V')$ — *отображение, полученное из* r *расширением поля скаляров. Тогда*

$$V^0(S) \otimes_k k' = V'^0(S) = V'^0(S').$$

Первое равенство следует из предложения 1. При доказательстве второго можно предположить, что $V = V^0(S)$, поэтому $V' = V'^0(S)$. Пусть $(s_1, \ldots, s_m)$ — некоторый базис пространства S и $(e_1, \ldots, e_n)$ — некоторый базис пространства V. Тогда существуют такие многочлены $P_{ij}(X_1, \ldots, X_m)$, что имеют место равенства

$$r'(a'_1 s_1 + \ldots + a'_m s_m)^n e_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}(a'_1, \ldots, a'_m) e_i$$

для $1 \leqslant j \leqslant n$ и $a'_1, \ldots a'_m \in k'$. По предположению $r'(s)^n = 0$ для всех $s \in S$, следовательно, $P_{ij}(a_1, \ldots, a_m) = 0$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и $a_1, \ldots, a_m \in k$. Так как поле k бесконечно, то $P_{ij} = 0$. Следовательно, каждый элемент множества $r'(S')$ — нильпотентный эндоморфизм и $V' = V'^0(S')$.

Предложение 7. *Предположим, что поле k бесконечно и имеет место условие* (ПК). *Обозначим через $\tilde{S}$ множество таких элементов $s \in S$, для которых $V^0(s) = V^0(S)$. Пусть $P(s)$ — определитель эндоморфизма пространства $V/V^0(S)$, задаваемого эндоморфизмом $r(s)$ при $s \in S$* (n° 1, следствие 2 (i) из теоремы 1).

(i) *Функция $s \longmapsto P(s)$ полиномиальна на пространстве S. При этом множество $\tilde{S}$ совпадает с $\{s \in S \mid P(s) \neq 0\}$ и открыто в S в топологии Зарисского* (дополнение I).

(ii) *Множество $\tilde{S}$ непусто, и если $s \in \tilde{S}$, то $V^+(s) = V^+(S)$.*

Утверждение о полиномиальности функции $s \longmapsto P(s)$ следует из линейности отображения r. Если $s \in S$, то $V^0(s) \supset V^0(S)$, причем равенство имеет место в том и только том случае, когда отображение $r(s)$ определяет автоморфизм пространства $V/V^0(S)$, что и доказывает утверждение (i).

Пусть k' — алгебраическое замыкание поля k. Так же как и в предложении 6, рассмотрим пространства V', S' и отображение r'. Заметим, что для отображения r' справедливо условие (ПК), так как верное для $s_1, s_2 \in S$ полиномиальное тождество $\operatorname{ad}(r(s_1))^{2 \dim V - 1} r(s_2) = 0$ (см. n° 1, *замечание*) продолжается на S'. По теореме 1 имеет место разложение

$$V' = V'^0(S') \oplus \sum_{i=1}^{m} V'^{\lambda_i}(S'),$$

где $\lambda_i \neq 0$ при $1 \leqslant i \leqslant m$. Существуют ненулевые полиномиальные функции P_i на пространстве S' и целые числа q_i, для которых $\lambda_i^{q_i} = P_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ (предложение 5). Так как поле k бесконечно, то $(P_1 \ldots P_m)(s) \neq 0$ для некоторого элемента $s \in S$ (см. *Alg.*, chap. IV, § 2, n° 3, corollaire 2 à la proposition 9)[1]. Тогда $\lambda_i(s) \neq 0$ для всех i, откуда $V'^0(S') = V'^0(s)$, и, следовательно, $V^0(S) = V^0(s)$ (предложение 6). Это показывает, что $\tilde{S} \neq \varnothing$. Пусть $s \in \tilde{S}$. Так как $V^+(S)$ является дополнительным подпространством к $V^0(s)$ в пространстве V и устойчиво относительно эндоморфизма $r(s)$, то $V^+(S) = V^+(s)$ (по следствию 2 теоремы 1).

---

[1] См. также *Алг.*, гл. IV, § 2, n° 5. — *Прим. перев.*