Е. С. Березанская

Тригонометрические уравнения и методика их преподавания

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 50
ББК 22
Е11

Е. С. Березанская
Е11 Тригонометрические уравнения и методика их преподавания / Е. С. Березанская – М.: Книга по Требованию, 2021. – 68 с.

ISBN 978-5-458-27105-9

Вопрос о тригонометрических уравнениях полностью рассматривается с учащимися в 10 классе средней школы. Ранее, в 9 классе, при изучении формул гониометрии, выполняя упражнения, наряду с соответствующими тождественными гониометрическими преобразованиями, учащиеся решают и уравнения. Но лишь в 10 классе можно поставить систематический просмотр всего вопроса, в частности вопрос о решении уравнений в тех случаях, когда в процессе решения нарушается равносильность между полученным уравнением (или совокупность их) и данным.

ISBN 978-5-458-27105-9

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

II. Понятия „решить тригонометрическое уравнение“, „найти корень тригонометрического уравнения“ не отличаются от аналогичных понятий в теории алгебраических уравнений. Но неизвестным аргументом в тригонометрическом уравнении является угол (дуга), содержащийся под знаком тригонометрической функции, и при решении уравнения сначала приходится определять тригонометрическую функцию аргумента. А так как каждому значению тригонометрической функции соответствует неограниченное множество углов, то тригонометрическое уравнение имеет неограниченное множество решений (в отличие от алгебраического уравнения). Лишь в том случае, когда имеется какое-либо дополнительное условие, данное задачей, число решений тригонометрического уравнения ограничивается (напр., надо найти только острый угол; только углы в одном треугольнике и т. п.).*

Кроме того, бывают тригонометрические уравнения, для которых нет соответствующего угла, удовлетворяющего уравнению, как напр. в случае $2\sin x = 3$, где $\sin x = \frac{3}{2}$ и т. п.

Таким образом, тригонометрические уравнения в отличие от алгебраических уравнений или не имеют решений в области действительных чисел (в данной работе рассматриваются только действительные значения корней), или имеют неограниченное множество решений в силу периодичности тригонометрических функций. В последнем случае решения выражаются общей формулой.

III. Процесс решения тригонометрического уравнения, аналогично процессу решения алгебраического уравнения, заключается в приведении данного уравнения к простейшему виду путем последовательной замены данного уравнения равносильными ему уравнениями.

§ 2. Формулы общего вида

1. Прежде всего, до решения тригонометрических уравнений, следует повторить с учащимися основное свойство всех тригонометрических функций, а именно их периодичность, т. е. свойство функций не изменяться ни по величине, ни по знаку, при изменении аргумента на определенную величину. Поэтому тригонометрические функции называются периодическими. Наименьшее абсолютное значение величины, прибавление которой к аргументу не влечет изменения функции, называется периодом функции. Для функций тангенса и котангенса период

---

* Некоторые авторы различают «тригонометрические» уравнения и «гониометрические», считая, что углы, входящие в тригонометрическое уравнение —это углы треугольника, а углы в гониометрическом уравнении следует рассматривать с общей точки зрения, как аргумент круговой функции.

равен π; период остальных четырех тригонометрических функций равен 2π;

$$\sin(2k\pi + a) = \sin a \qquad \operatorname{ctg}(k\pi + a) = \operatorname{ctg} a$$
$$\cos(2k\pi + a) = \cos a \qquad \sec(2k\pi + a) = \sec a$$
$$\operatorname{tg}(k\pi + a) = \operatorname{tg} a \qquad \operatorname{cosec}(2k\pi + a) = \operatorname{cosec} a,$$

где k произвольное целое положительное и отрицательное число или нуль.

Следует тщательно повторить общие формулы углов (дуг), для которых тригонометрическая функция имеет данное значение.

1) Все углы, имеющие одинаковое значение синуса могут быть записаны формулами: $2k\pi + x_0$ и $(2k+1)\pi - x_0$ или, объединяя обе формулы:

$$\boxed{m\pi + (-1)^m x_0}$$

Объяснение. В первой окружности всегда найдется угол (дуга), обозначим его x_0 (часто обозначают его греческой буквой a), синус которого равен данному числу, если это число по абсолютному значению не превышает единицы. В первой окружности имеется еще одни угол (дуга) с таким же значением синуса $(\pi - x_0)$. Через x_0 обозначен меньший (по абсолютному значению) из этих двух углов в одной окружности, имеющих одинаковые значения синуса. Все остальные углы (дуги) получаются из найденых по свойству периодичности функций:

$$2k\pi + x_0; \quad 2k\pi + (\pi - x_0) = (2k+1)\pi - x_0.$$

Выражение $m\pi + (-1)^m x_0$ включает обе формулы; при m четном имеем одну и при m нечетном—другую формулу.

Замечание: Это объединение формул (в данном случае двух) крайне плодотворно; его следует проводить, где возможно, при решении уравнений*.

2) Все углы, косинус которых имеет данное значение, записываются формулой: $2k\pi \pm x_0$.

Объяснение: В первой окружности всегда найдется угол, x_0 (берем меньший), косинус которого имеет данное значение (если это значение не превышает единицы по абсолютной величине); это же значение косинуса в первой окружности имеет угол $(-x_0)$. Остальные решения получаются из найденых по свойству периодичности функций:

$$2k\pi + x_0; \quad 2k\pi - x_0.$$

Общая формула:

$$\boxed{2k\pi \pm x_0}$$

3) Общая формула углов, тангенс которых имеет данное значение $\boxed{m\pi + x_0}$, где m — любое целое относительное число.

---

* Без объединения формул может быть повторение одних и тех же значений неизвестного в полученных формулах.

Объяснение аналогично вышеприведенным: в первой окружности имеются углы x_0 и $\pi + x_0$, которые имеют одинаковое значение тангенса (без всяких ограничений).

4) Аналогично рассуждая, получается, что все углы, имеющие одинаковое значение котангенса, записываются формулой: $m\pi + x_0$.

5) Все углы, удовлетворяющие требованию иметь определенное значение секанса (за исключением значений, заключающихся между $+1$ и -1), записываются формулой:

$$2k\pi \pm x_0.$$

6) Общая формула углов (дуг), имеющих одинаковый косеканс (за исключением значений между $+1$ и -1): $m\pi + (-1)^m x_0$.

§ 3. Уравнения „простейшего вида": $\sin x = a$; $\cos x = b$; $\operatorname{tg} x = c$.

К решению уравнения простейшего вида: $\sin x = a$; $\cos x = b$; $\operatorname{tg} x = c$ приводится решение любого тригонометрического уравнения; поэтому учащимся необходимо приобрести большой навык в решении ур-ний простейшего вида, навык быстро и безошибочно решать их, и тем самым доводить до конца решение любого тригонометрического уравнения.

В зависимости от подготовки класса работа проводится на числовых и буквенных примерах в том или ином порядке: от числовых примеров—к буквенным, или наоборот, применяя общие решения к частным случаям.

Крайне важно в каждом случае указывать учащимся, что простейшие тригонометрические уравнения, как и любые тригонометрические уравнения или не имеют решений или имеют неограниченное число решений. 1. Уравнение $\sin x = a$. Если $|a| > 1$, — нет решений, если $|a| \leq 1$, имеет бесчисленное множество решений.

а) $\sin x = 0{,}5$.

$x_0 = 30°$;	$x_0 = \frac{\pi}{6}$;
$x = m \cdot 180° + (-1)^m \cdot 30°$;	$x = m\pi + (-1)^m \frac{\pi}{6}$;

$$x_0 = \arcsin 0{,}5;$$

$$x = m\pi + (-1)^m \arcsin 0{,}5,$$

где $\arcsin 0{,}5$ есть дуга в первой окружности, наименьшая по численному значению (x_0).

Если

$m = 0$	$x = 30°$	$x = \frac{\pi}{6}$
$m = 1$	$x = 150°$	$x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$
$m = 2$	$x = 390°$	$x = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13}{6}\pi$
$m = \ldots$	....	.....

Указание: Мы считаем полезным: 1) приучать учащихся по таблицам натуральных тригонометрических величин * отыскивать угол в градусах и минутах, переводить его в радианы и давать ответ во всех 3-х указанных формах. (Обычной ошибкой учащихся является то, что они пишут: $x = m\pi + (-1)^m 30°$, пользуясь в одной формуле и радианным и градусным выражением угла); 2) отыскивать некоторые частные значения углов, придавая коэфициенту m различные значения, хотя мы не приводим их в дальнейшем. Необходимость этого в отдельных случаях будет указана ниже.

б) $\sin x = -0{,}5$

$$x_0 = 180° + 30° = 210°$$
$$x = m \cdot 180° + (-1)^m \cdot 210;$$
$$m = 0 \quad x = 210°$$
$$m = 1 \quad x = -30°$$
$$m = 2 \quad x = 570°$$
$$m = 3 \quad x = 330°$$
$$\cdot \; \cdot \quad \cdot \; \cdot \; \cdot$$

или

$$\cdot \; \cdot \; \cdot \quad \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot$$
$$x_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$$
$$x = m\pi + (-1)^m \frac{7}{6}\pi;$$

или (предпочтительно)

$$\sin x = -0{,}5$$
$$x_0 = -\frac{\pi}{6}$$
$$x = m\pi - (-1)^m \frac{\pi}{6}$$

или $\sin x = -0{,}5$

$$x_0 = -30°$$
$$x = m \cdot 180° + (-1)^m (-30°)$$
$$x = m \cdot 180° - (-1)^m \cdot 30°.$$

Корни те же:

при

$$m = 0 \quad x = -30°$$
$$m = 1 \quad x = 210°$$
$$m = 2 \quad x = 330°$$
$$m = 3 \quad x = 570°$$

или

$$x_0 = \arcsin(-0{,}5)$$
$$x_0 = -\arcsin 0{,}5$$
$$x = m\pi - (-1)^m \arcsin 0{,}5.$$

---

* В случае, напр., когда $\sin x = 0{,}6$, и т. п.

Общий случай

в) $\sin x = a;\quad 0 \leqslant a \leqslant 1$

$x_0 = \arcsin a$

$x = m\pi + (-1)^m \arcsin a,$

где $\arcsin a = x_0$

$\sin x = -a;\quad 0 \leqslant a \leqslant 1$

$x_0 = -\arcsin a$

$x = m\pi - (-1)^m \arcsin a$

II. Уравнение $\cos x = b$, при $0 \leqslant b \leqslant 1$

а) $\cos x = 0{,}5$

$x_0 = 60°$	$x_0 = \frac{\pi}{3}$	$x_0 = \arccos 0{,}5$
$x = 2k \cdot 180° \pm 60°$	$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$	$x = 2k\pi \pm \arccos 0{,}5$

б) $\cos x = -0{,}5$

$x_0 = 180° - 60° = 120°$

$x = 2k \cdot 180° \pm 120°$

$x_0 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

$x = 2k\pi \pm \frac{2}{3}\pi$

$x_0 = \arccos(-0{,}5)$

$x_0 = \pi - \arccos 0{,}5$

$x = 2k\pi \pm (\pi - \arccos 0{,}5)$

Общий случай:

в) $\cos x = b;\quad 0 \leq b \leq 1$

$x_0 = \arccos b$

$x = 2k\pi \pm \arccos b$

$\cos x = -b;\quad 0 \leq b \leq 1$

$x_0 = \pi - \arccos b$

$x = 2k\pi \pm (\pi - \arccos b)$

III. Общий случай:

Уравнение $\operatorname{tg} x = c;\quad c \geqslant 0$

$x_0 = \operatorname{arc\,tg} c$

$x = m\pi + \operatorname{arc\,tg} c$

$\operatorname{tg} x = -c;\quad c > 0$

$x_0 = -\operatorname{arc\,tg} c$

$x = m\pi - \operatorname{arc\,tg} c$

Указания. 1) Решение простейших уравнений $\operatorname{ctg} x = c$; $\sec x = b$ и $\operatorname{cosec} x = a$ не представляет новых трудностей.

2) Случаи $\sin x = -a$, $\cos x = -a$, $\operatorname{tg} x = -a$ можно опустить для более подготовленных учащихся.

§ 4. Частные случаи „уравнений простейшего вида“

I. Случай, когда тригонометрическая функция угла равна 0.

1) $\sin x = 0$

$x = m\pi$

2) $\operatorname{tg} x = 0$

$x = m\pi$

$$\boxed{x = m\pi}$$

3) $\cos x = 0$

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

4) $\operatorname{ctg} x = 0$

$x = m\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{x = (2k+1)\frac{\pi}{2}}$$

5) $\sec x = 0$ — нет решений;

6) $\operatorname{cosec} x = 0$ — нет решений.

Обычно решения уравнений 1) и 2) записывают формулой $x = m\pi$ и решения уравнений 3) и 4) записывают формулой $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, так как обе последние формулы говорят о нечетном числе $\frac{\pi}{2}$ *.

II. Случай равенства тригонометрических функций **

1) Если 2 угла имеют равные синусы (или косекансы), то они или отличаются друг от друга на четное число полупериодов, или в сумме составляют нечетное число полупериодов (π).

В самом деле, если $\underline{\sin x = \sin a}$, то

все углы x находятся по формуле $x = m\pi + (-1)^m a$, так как одно из решений данного уровнения (частный случай) будет при равенстве углов x и a, т. е. $x_0 = a$, тогда

при m четном, $x = 2k\pi + a$;

при m нечетном, $x = (2k+1)\pi - a$,

Можно записать

$$\boxed{\begin{aligned} &x - a = 2k\pi; \\ &x + a = (2k+1)\pi. \end{aligned}}$$

Пример:

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{7};$$

$$x - \frac{\pi}{7} = 2k\pi; \quad x = 2k\pi + \frac{\pi}{7};$$

$$x + \frac{\pi}{7} = (2k+1)\pi; \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{7};$$

или сразу:

$$x = m\pi \pm (-1)^m \frac{\pi}{7}.$$

2) Если 2 угла имеют равные косинусы (или секансы), то и в сумме и в разности они дают четное число полупериодов (π).

$$\underline{\cos x = \cos a.}$$

Рассуждая попрежнему, мы имеем:

$$x = 2k\pi \pm a \quad \text{или} \quad x \pm a = 2k\pi.$$

Пример:

$$\cos x = \cos 17^\circ$$

$$x \pm 17^\circ = 2k \cdot 180^\circ$$

$$x = 2k \cdot 180^\circ \pm 17^\circ.$$

---

* $2k\pi \pm \frac{\pi}{2} = (4k \pm 1)\frac{\pi}{2}$; $m\pi + \frac{\pi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$.

** Иногда говорят „освобождение обеих частей от знака тригонометрических функций".

3) Если 2 угла имеют равные тангенсы (или котангенсы), то они отличаются на целое число полупериодов:

$\underline{\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha.}$ Все углы x записываются формулой:

$$x - \alpha = m\pi$$

Пример:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{2}{3} \pi$$

$$x = m\pi + \frac{2}{3}\pi.$$

§ 5. Простейшее уравнение в случае, когда неизвестиое входит в состав аргумента

Последним этапом в подготовительной работе к решению уравнений является решение уравнений простейшего вида в том случае, когда неизвестный угол входит в состав аргумента. В этом случае возможны разнообразнейшие комбинации. Рассмотрим некоторые из них как в общем виде, так и в частных случаях.

1) Уравнение $\sin(x + \alpha) = a$

Определяем аргумент $(x + \alpha)$.

Решение:

$$(x + \alpha) = \arcsin a$$

$$x + \alpha = m\pi + (-1)^m \arcsin a$$

$$x = m\pi + (-1)^m \arcsin a - \alpha$$

2) Уравнение $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

Определяем аргумент $\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение:

$$x_0 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$x - \frac{\pi}{2} = m\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$x = m\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2},$$

$$x = m\pi + \frac{3}{4}\pi$$

3) Уравнение $\cos 2x = 1$

Решение:

$$(2x)_0 = 0$$

$$2x = 2k\pi$$

$$x = k\pi$$

4) Уравнение $\cos(mx + n) = 0$

Решение:

$$(mx + n)_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$mx + n = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$mx = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} - n$$

$$x = \frac{1}{m}\left(2k\pi \pm \frac{\pi}{2} - n\right).$$

5) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$$2x_0+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}$$
$$2x+\frac{\pi}{2}=m\pi-\frac{\pi}{4}$$
$$2x=m\pi-\frac{3}{4}\pi$$
$$x=\frac{m\pi}{2}-\frac{3}{8}\pi.$$

К этим же простейшим уравнениям следует отнести уравнения вида

$a\sin(kx\pm m)=b$ или $a\sin(kx\pm m)+b=c$ и т. п.

Пример:

$$3\operatorname{tg}(2x-\pi)+0{,}4=2{,}8$$
$$\operatorname{tg}(2x-\pi)=0{,}8$$
$$2x_0-180^\circ=38^\circ$$
$$2x-180^\circ=m\cdot180^\circ+38^\circ;$$
$$2x=(m+1)\,180^\circ+38^\circ;$$
$$x=m\cdot90^\circ+109^\circ.$$

Замечания:

Обычными ошибками учащихся при решении рассмотренных выше уравнений вида

$$\sin(x\pm a)=b$$
$$\sin(a\pm x)=b$$
$$\sin kx=c$$
$$\sin(kx\pm m)=c$$
$$\sin\left(\frac{x}{k}\pm m\right)=c \text{ и т. п.}$$

1) является то, что они при решении стремятся использовать известные им формулы гониометрии, как напр. функции суммы, разности углов и т. д., что является совершенно излишним;

2) то, что учащиеся часто не пишут значений для всего аргумента в общем виде, а находят сперва численное значение для x, входящего в аргумент, и затем присоединяют к нему период.

§ 6. Двучленные уравнения первой степени, содержащие одинаковые функции с численными коэфициентами, равными 1, причем неизвестное входит в состав аргумента

Эти уравнения также относятся к „простейшим“. Они решаются на основании сказанного в § 4, II и в § 5.

Пример 1.

$$\sin(8x+60^\circ)+\sin 2x=0$$

I прием:

$$\text{а)}\quad \sin(8x+60^\circ)=-\sin 2x$$
$$8x+60^\circ=m\cdot180^\circ-(-1)^m\cdot2x,$$

откуда имеем некоторые значения неизвестного:
при

$$m=0;\quad 8x+60^\circ=-2x;\quad x=-6^\circ$$
$$m=1;\quad 8x+60^\circ=180^\circ+2x;\quad 6x=120^\circ;\quad x=20^\circ$$
$$m=2;\quad 8x+60^\circ=360^\circ-2x;\quad 10x=300^\circ;\quad x=30^\circ$$
$$m=3;\quad x=80^\circ \text{ и т. д.}$$

б) Иная запись:

$$8x+60^\circ+(-2x)=(2k+1)\,180^\circ$$
$$8x+60^\circ-(-2x)=2k\cdot 180^\circ$$

Получаем те же решения

при $k=0,\ 1,\ 2\ldots$

Эти уравнения решаются несколько сложнее путем преобразования по соответствующим формулам гониометрии, а затем согласно теории решения аналогичных алгебраических уравнений, а именно:

II прием:

$$\sin(8x+60^\circ)+\sin 2x=0$$
$$2\sin(5x+30^\circ)\cos(3x+30^\circ)=0.$$

В данном случае произведение равняется нулю, и оба сомножителя определены при любых значениях аргумента, поэтому

$\cos(3x+30^\circ)=0$	$\sin(5x+30^\circ)=0$ (см. § 4,I)
$3x+30^\circ=(2k+1)\cdot 90^\circ$	$5x+30^\circ=m\cdot 180^\circ$

Получаем снова:
при

$$k=0;\quad 3x+30^\circ=90^\circ;\quad x=20^\circ$$
$$k=1;\quad 3x+30^\circ=270^\circ;\quad x=80^\circ \text{ и т. д.}$$

при

$$m=0;\quad 5x+30^\circ=0;\quad x=-6^\circ$$
$$m=1;\quad 5x+30^\circ=180^\circ;\quad x=30^\circ \text{ и т. д.}$$

Как уже сказано выше, полезно при обучении решению уравнений находить частные численные значения неизвестных, в особенности в случае, аналогичном данному, когда учащиеся, решив пример различными приемами, могут проверить правильность решения.

Пример 2.

$$\sin\alpha=\cos\beta$$
$$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$
$$\alpha=m\pi+(-1)^m\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right).$$

Вопрос может быть поставлен и иначе (см. § 4, II): найти зависимость между углами α и β.

Ответ:

$$\alpha-\beta=2k\pi$$
$$\alpha+\beta=(2k+1)\pi.$$

Пример 3.

$$\sin 13x = -\sin 5x$$

$$13x + (-5x) = (2k+1)\pi$$

$$13x - (-5x) = 2k\pi,$$

откуда

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$$

и

$$x = \frac{2k\pi}{18} \quad \text{или} \quad x = 20^\circ k.$$

Пример 4.

$$\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg} x,$$

$$4x - x = m\pi,$$

$$x = \frac{m\pi}{3}.$$

Обращаем внимание, что, решая указанные в этом § примеры путем тождественных преобразований по формулам, мы усложняем работу и часто приводим решение к необходимости дополнительно исследовать получающиеся корни. Так, в данном случае уравнение примет вид дроби

$$\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} x = 0$$

$$\frac{\sin 3x \cdot}{\cos 4x \cdot \cos x} = 0.$$

Соответствующее исследование указано ниже.

Замечания:

1) На основании вышеуказанного решается вопрос: при каких значениях x

$$\cos 5x = \cos 3x?$$

I прием:

$$5x = 2k\pi \pm 3x \quad (\S\ 4,\ \text{II})$$

$$2x = 2k\pi; \quad x = k\pi$$

$$8x = 2k\pi; \quad x = \frac{k\pi}{4}.$$

II прием:

$$\cos 5x - \cos 3x = 0$$

$$-2\sin 4x \sin x = 0$$

(исследование см. ниже)

$\sin 4x = 0$	$\sin x = 0$ (§ 4,I)
$4x = m\pi$	$x = m\pi$
$x = \frac{m\pi}{4}$	

2) более простой вопрос: при каких значениях угла, m раз взятое значение любой его тригонометрической функции можно приравнять n значениям той же функции?