Г. Ламб

Теоретическая механика

Более сложные вопросы. Том 3

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
Г11

Г. Ламб
Г11 Теоретическая механика: Более сложные вопросы. Том 3 / Г. Ламб – М.: Книга по Требованию, 2014. – 292 с.

ISBN 978-5-458-34235-3

В этой книге излагаются кинематика, статика и динамика в наиболее естественной и удобной, по моему мнению, последовательности. Данную книгу можно рассматривать как продолжение двух предыдущих курсов на которые и делаются ссылки в отдельных случаях; но она независима от них, и я надеюсь, что по ней могут легко заниматься студенты, знакомые лишь с механикой плоских систем в обычном объеме.

ISBN 978-5-458-34235-3

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА I.

Кинематика твердого тела. Конечные перемещения.

1. Степени свободы. При составлении уравнений движения любой динамической системы мы начинаем с рассмотрения бесконечно малых изменений. Предполагая, что нам известны в данный момент времени t конфигурация системы и состояние движения, мы вычисляем те изменения, которые наступают за время δt под действием приложенных сил и наложенных на систему связей. Этот путь приводит к составлению уравнений движения при помощи метода, который в основных чертах уже знаком читателю. Таким образом все, что нам необходимо в качестве кинематического введения, — это исследование возможных бесконечно малых перемещений системы.

Однако в случае движения твердого тела исследование конечных перемещений (в отличие от бесконечно малых) приводит к некоторым теоремам, настолько простым и изящным, что обыкновенно принято посвящать этим теоремам немного места в самом начале исследования. Напомним, что тот же порядок изложения был нами принят и при рассмотрении частного случая: двухмерных перемещений („Статика“, §30)[1].

Положение твердого тела, движущегося в пространстве трех измерений, вполне определяется положением любых трех точек ABC тела, не лежащих на одной и той же прямой, так как если P есть какая-либо четвертая точка тела, то тетраэдр $PABC$ имеет неизменные размеры. Число координат (декартовых или иных), отнесенных к неподвижным осям, этих трех точек ABC тела равно девяти. Но эти координаты не являются независимыми друг от друга, так как они связаны соотношениями, выражающими, что расстояния AB, BC и CA имеют заданные неизменные значения. Число независимых переменных или координат (в обобщенном смысле слова), которые достаточны и необходимы для определения положения тела, равно, следовательно, шести. Согласно с этим и говорят, что твердое тело, положение которого ничем не связано, имеет шесть „степеней свободы“.

Обобщенные координаты могут быть выбраны различным способом и, вообще говоря, шесть любых независимых кинематических условий определяют такие положения тела, которые оно не может покинуть без нарушения этих условий.

Этот принцип, при всей своей простоте, имеет ценное практическое применение в разных случаях. Например, положение теодолита на подставке

[1]) Ссылки в этой форме будут делаться на „Статику“ автора (на английском языке).

определяется (по большей части) тем, что его три ножки с закругленными концами покоится в трех двугранных выемках (формы V), т. е. положение определяется шестью точками касания. При других способах установки одна из ножек покоится в трехгранной выемке, вторая — в двугранной, а третья просто стоит на ровной поверхности.

Жесткое сооружение может быть установлено в неподвижном положении относительно земли с помощью шести снабженных шарнирами прямолинейных стержней, если только эти последние не имеют особого критического расположения, как в случае двух измерений („Статика", § 13, 15).

Твердое тело, положение которого определяется только пятью условиями, имеет одну степень свободы. Примером является тело, поддерживаемое в равновесии тремя закругленными на концах ножками, две из которых поставлены в двугранную выемку на горизонтальной плоскости, в то время как третья просто опирается на плоскость. Тело может передвигаться параллельно сделанной выемке и при сохранении пяти точек касания уже не может передвигаться в другом направлении. Такая установка принята в некоторых физических приборах.

Далее, наложение четырех условий оставляет телу две степени свободы. Например, ружейный ствол, опирающийся на две рогатки, поставленные одна впереди другой, может передвигаться вдоль продольной оси и вращаться вокруг нее. Разумеется, ствол может иметь любое перемещение, которое сводится к комбинации только что указанных перемещений. Другим примером является труба универсального инструмента (альтазимута). Геометрические условия сводятся здесь к следующему. Определенная точка в теле, а именно точка пересечения оси трубы и оси цапф остается неподвижной; другим условием является условие горизонтальности оси цапф при всех перемещениях.

Простым примером тела с тремя наложенными связями, а потому и с тремя степенями свободы, может служить тело, опирающееся на неподвижную поверхность тремя ножками или подставками с закругленными концами. Если поверхность плоская, то мы имеем случай свободного двухмерного движения, случай, уже разобранный нами в плоской кинематике („Статика", § 13)[1].

2. Вращение около неподвижной точки. Теорема Эйлера. Перемещение твердого тела из одного заданного положения в другое может быть получено различными путями. В частности мы можем представить себе, что некоторая произвольная точка тела перемещается из своего первоначального положения в конечное O, причем все другие точки тела имеют простое поступательное движение и описывают прямолинейные параллельные траектории равной длины.

Далее, мы можем представить себе, что две другие произвольные точки тела, не лежащие на одной прямой с точкою O, приводятся в свое конечное положение путем вращения тела около точки O. По теореме, доказанной Эйлером, это второе перемещение равносильно простому вращению вокруг некоторой оси, проходящей через точку O[2].

Чтобы в этом убедиться, вообразим себе две совпадающие сферические поверхности с общим центром в точке O. Мы предположим, что одна из них неподвижна в пространстве, тогда как другая неизменно связана с твердым телом и, следовательно, перемещается вместе с ним. Перемещение вокруг точки O может рассматриваться, как

---

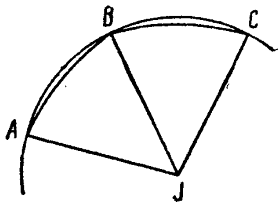
[1]) Значение для практических расчетов чисто геометрической теории связей и степеней свободы движения было особенно отмечено лордом Кельвином (Томсоном). См. Thomson and Tait, Natural philosophy, 2-е изд.; § 128.

[2]) Leonhard Euler родился в Базеле, умер в Ленинграде в 1783 г. Указанная теорема относится к 1776 г.

скольжение одной сферической поверхности по другой, как в идеальном шаровом шарнире (сочленение Кардана).

Теоретически говоря, явление подобно движению плоской фигуры в своей плоскости („Статика", § 14).

Предположим, что в результате перемещения некоторая точка подвижной сферы из положения A (фиг. 1) в пространстве переместилась в точку B, в то время как та точка, которая раньше находилась в B, заняла теперь новое положение C. Плоскость ABC пересекает неподвижную сферу по окружности (обыкновенно, но не обязательно, малого круга). Если J — один из полюсов этого круга на сфере, то равнобедренные сферические треугольники AJB и BJC конгруэнтны. Действительно, дуги AB и BC равны, так как они являются двумя положениями одной и той же дуги большого круга подвижной сферы. Таким образом дуга AB может быть совмещена с дугой BC при помощи вращения вокруг оси OJ на угол равный AJB [1]).



Фиг. 1.

Из этого следует, как это очевидно и само по себе, что твердое тело с одной неподвижной точкой имеет три степени свободы и, следовательно, для определения положения тела необходимы три независимые координаты. В качестве таких координат можно, например, принять: две угловые координаты той оси, поворот вокруг которой приводит тело из начального основного положения в заданное, и, наконец, самый угол этого поворота в качестве третьей. Другая система координат, более удобная для вычислений, будет описана ниже (§ 33).

3. Сложение конечных вращений. Далее, мы должны различать два направления, в которых может происходить вращение вокруг данной оси.

Пусть O и A — две любые точки на оси вращения; мы будем считать вращение положительным вокруг OA, если его можно связать с направлением от O к A так же, как поворот винта с правым ходом связан с поступательным перемещением. Вращение в обратном направлении мы будем считать отрицательным. Так, если мы обозначим через N и S северный и южный полюсы Земли, то суточное движение можно рассматривать, как положительное вокруг SN и как отрицательное вокруг NS.

Для того чтобы получить результат сложения двух вращений: одного на угол α вокруг оси OA и затем последующего вращения на угол β вокруг оси OB, можно сделать следующее построение, повидимому, данное впервые О. Родригом (O. Rodrigues, 1840) [2]).

---

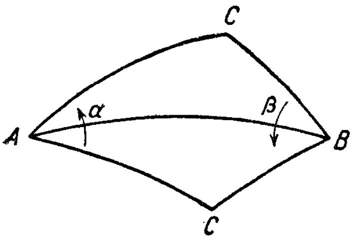
[1]) Случай, когда точки C и A совпадают, может рассматриваться как предельный случай, при котором ось вращения делит дугу AB пополам, а угол поворота равен π.

Если A и B — диаметрально противоположные точки на сфере, то построение делается неопределенным. В таком случае вместо A следует выбрать другую точку тела.

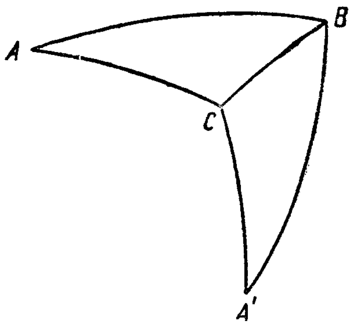
[2]) Оно было впоследствии приведено Сильвестром (Sylvester, Phil. Mag. (3) т. XXXVII, 1850) и Гамильтоном (Hamilton, Lectures on Quaternions, 1853, стр. 332).

Обозначим через A и B точки, в которых соответствующие оси вращения пересекают неподвижную сферическую поверхность с центром в точке O. На дуге AB строим сферические треугольники ACB и $AC'B$, каждый из которых имеет: угол, равный $\frac{1}{2}\alpha$, при A и угол, равный $\frac{1}{2}\beta$, при B.

Из чертежа (фиг. 2) ясно, что вращение на угол α вокруг оси OA переместит точку тела, находившуюся в C, в положение C', а последующее затем вращение на угол β вокруг оси OB приведет ее обратно в положение C. Следовательно, OC есть ось вращения, которое само



Фиг. 2.



Фиг. 3.

равносильно двум предыдущим вращениям. Заметим при этом, что если бы мы изменили порядок вращений вокруг OA и OB, то в результате мы получили бы эквивалентное им вращение вокруг оси OC'. Мы имеем здесь пример двух операций, не удовлетворяющих закону коммутативности (переместительности).

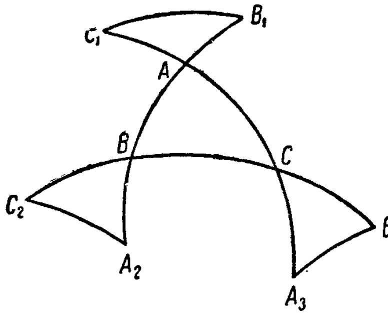
Чтобы найти угол конечного поворота вокруг оси OC, мы по другую сторону BC (фиг. 3) строим треугольник $A'BC$, равный треугольнику ABC и симметрично расположенный. Вращение вокруг OA оставляет точку, совпадающую в начале с A, в покое, а вращение вокруг OB приводит ее в положение A'. Следовательно, искомый угол равен ACA', т. е. $2(\pi - C)$, а так как поворот на четыре прямых угла (2π) не изменяет положения тела, то вращение равносильно повороту на угол $-2C$.

Мы получаем следующую теорему, впервые сформулированную в 1844 г. Гамильтоном[1]). Если ABC — произвольный сферический треугольник на сфере с центром в O, то три последовательных вращения вокруг осей OA, OB и OC с соответствующими углами поворота $2A$, $2B$ и $2C$ в направлении, обратном порядку букв A, B, C, приведут тело в его первоначальное положение.

[1]) W. R. Hamilton (1805—1861), ирландский астроном (1827—1865). См. его „Lectures on Quaternions“, стр. 334.

4. Теорема Донкина (Donkin). Перемещение твердого тела вокруг одной его неподвижной точки было нами в предыдущем изложении определено осью и углом равносильного ему вращения.

Вращение около диаметра неподвижной сферы с радиусом, равным единице, может быть определено также дугой большого круга этой сферы в плоскости нормальной к оси вращения. Так, если P и Q суть две точки этого круга, а вращение перемещает точку тела из положения P в положение Q, то это вращение может быть определено дугой PQ. Важен, конечно, порядок букв P и Q, положение же самой дуги PQ на окружности этого большого круга не существенно [1]).



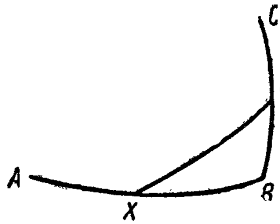
Фиг. 4.

При этом соглашении имеем следующую теорему, найденную независимо друг от друга Донкиным [2]) и Гамильтоном. Если ABC — произвольный сферический треугольник, то три последовательных вращения, представляемые дугами 2BC, 2CA и 2AB, возвращают тело в его первоначальное положение. Рассмотрение полярного треугольника показывает, что эта теорема равносильна теореме конца § 3. Донкин (Donkin), однако, дал следующее прямое доказательство [3]).

Продолжим стороны треугольника ABC, как указано на чертеже (фиг. 4), так, чтобы

$$C_2B = BC = CB_3,\ A_3C = CA = AC_1,\ B_1A = AB = BA_2.$$

Треугольники AB_1C_1, A_2BC_2, A_3B_3C равны и конгруэнтны друг другу и „симметрично" равны треугольнику ABC. Вращение 2BC приведет треугольник A_2BC_2 в положение A_3B_3C, а вращение 2CA приведет его затем в положение AB_1C_1. В результате же последующего вращения 2AB треугольник возвратится в первоначальное положение A_2BC_2.



Фиг. 5.

Из этого следует, что два последовательные вращения, представляемые двумя дугами больших кругов AB и BC (см. фиг. 5), равносильны вращению 2XY, где X и Y представляют собою, соответственно, середины дуг AB и BC.

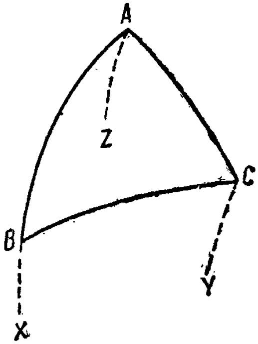
---

[1]) Употребляемые в этом смысле дуги, обозначаемые нами прямыми латинскими буквами, имеют некоторую аналогию со скользящими векторами в плоскости, хотя, как показывает нижеследующая теорема, закон их сочетания иной.

[2]) M. J. Donkin, профессор астрономии в Оксфорде (1842—1869). Теорема опубликована в 1850 г.

[3]) Phil. Mag. (4), т. I, 1851.

С другой стороны, можно видеть, что три последовательные вращения, представляемые самими дугами AB, BC и CA (не удвоенными), равносильны одному повороту вокруг оси OA на угол, равный сферическому избытку треугольника ABC [1]), ибо очевидно, что точка, находившаяся первоначально в положении A, в результате снова возвращается в начальное свое положение. Чтобы определить угол равносильного результирующего поворота, достаточно рассмотреть последовательные положения дуги, которая первоначально совпадала с дугою AB. Первое вращение (AB) совмещает ее с дугою BX (фиг. 6), второе переносит ее в положение CY таким образом, что угол BCY равен углу B сферического треугольника. Наконец, третье вращение приводит эту дугу в положение AZ, причем



Фиг. 6.

$$ZAC = \pi - ACY = \pi - B - C.$$

Таким образом угол между конечным и начальным положением дуги равен

$$BAZ = A + B + C - \pi.$$

Теорема Донкина и Гамильтона имеет интересное применение к кинематике глаза. Движение глаза рассматривается относительно головы, которую мы можем считать неподвижной. С большой степенью точности можно сказать, что глаз вращается вокруг неподвижной точки O и, поскольку речь идет о мускулах, приводящих его в движение, он имеет три степени свободы. Однако при его нормальной подвижности возможны только две степени свободы, так как положение глаза уже полностью определяется осью зрения, т. е. направлением прямой, соединяющей O с той точкой зрительного поля, которая является объектом прямого зрения.

Это ограничение является существенным условием того, чтобы один и тот же предмет, видимый в том же положении относительно головы, вызывал раздражение всегда той же самой части ретины всякий раз, когда взгляд направлен на ту же точку предмета [2]).

Закон, определяющий положение глазного яблока в зависимости от направления оси зрения, был формулирован Листингом (Listing, 1857). Различные положения этой оси могут быть определены точкой ее пересечения со сферической поверхностью произвольного радиуса и с центром в O. При этом существует определенное „начальное" положение A этой оси [3]), относительно которого ориентируются все остальные направления.

Упомянутый закон состоит в том, что когда ось зрения перемещается из „начального" положения A в другое положение P, то перемещение глазного яблока равносильно повороту, представляемому дугою AP большого круга. Разумеется, само перемещение глаза не должно в точности совпадать с таким вращением, но на основании закона Дондера результат необходимо будет тот же, каковы бы ни были предшествовавшие положения глаза.

---

[1]) Hamilton, Lectures on Quaternions, стр. 335. Простое доказательство приводимое нами, принадлежит Ганкелю [Hankel (1847)].

[2]) Это условие известно, как закон Дондера [Donder (1847)].

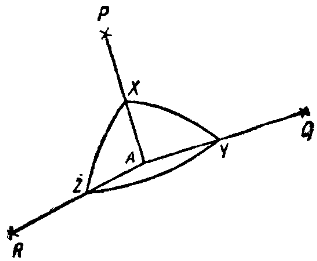
[3]) Это то положение, которое принимает глаз, когда, стоя прямо с поднятой головой, мы смотрим на очень отдаленный предмет на горизонте, находящийся прямо впереди нас

Из этого следует, что переход из одного положения P в другое Q равносилен повороту XY, где X и Y являются соответственно серединами дуг AP и AQ, так как перемещение может быть сведено к переходу из положения P в положение A, а затем к переходу от A к Q. Таким образом переход от P к любому другому положению (к положению Q или R) (фиг. 7) может быть представлен дугою большого круга, проходящего через X, т. е. равносилен повороту вокруг некоторой оси нормальной к OX. Прямая OX называется поэтому „атропической прямой" для положения P (Гельмгольц).

5. Наиболее общее перемещение твердого тела. Мы видели, что всякое перемещение твердого тела может быть сведено:

1) к чисто поступательному движению, при котором произвольно выбранная точка переходит из своего первоначального в конечное положение O, и

2) к вращению вокруг некоторой оси, проходящей через точку O.



Фиг. 7.

Очевидно, что порядок, в котором следуют одно за другим эти перемещения, не имеет значения.

Направление и длина пути поступательного движения будут изменяться при выборе различных точек, но направление оси вращения и угол поворота не будут зависеть от этого выбора.

Существует семейство плоскостей неизменно связанных с телом, остающихся параллельными своим первоначальным положениям, а именно семейство плоскостей, нормальных к оси вращения. Пусть σ и σ' обозначают произвольную фигуру на одной из этих плоскостей в начальном и конечном ее положениях. Простое поступательное движение, параллельное оси вращения, приведет фигуру σ в плоскость фигуры σ'. Пусть σ'' — это новое положение фигуры. Известно, что σ'' совмещается с σ' после некоторого вращения в своей плоскости вокруг определенной точки I („Статика", § 14).

Отсюда следует, что в общем случае всякое перемещение твердого тела может быть сведено:

1) к переносу параллельно определенной оси,

2) к вращению вокруг этой оси [1]).

Перемещение получается такое же, как если бы тело было неизменно связано с гайкой, вращающейся на винте, резьба которого имеет надлежащий шаг. Простыми частными случаями общего перемещения являются: чистое вращение и чисто поступательный перенос тела. В последнем случае точка I, о которой мы говорили при выводе теоремы, лежит в бесконечности.

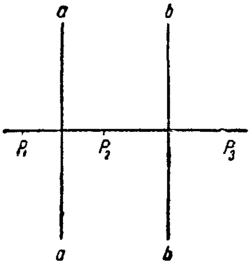
Существуют разные другие элементарные перемещения, на которые можно разложить общее перемещение твердого тела.

---

[1]) Эта теорема была доказана в 1830 г. Шалем (Chasles), известным своими работами по новой геометрии. Приводимое доказательство принадлежит Томсону и Тэту (Thomson, Tait).

Одним из таких наиболее интересных элементарных перемещений является „полуоборот", т. е. вращение вокруг оси на два прямых угла [1]).

Это элементарное перемещение особенно просто тем, что достаточно указать ось вращения, направление же поворота безразлично.



Фиг. 8.

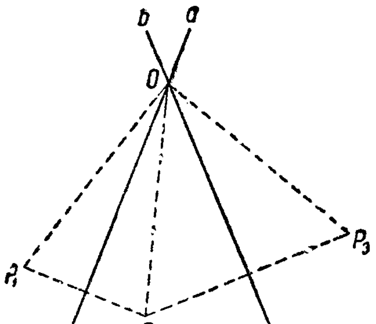
Метод разложения перемещения на такие элементарные основан на следующих леммах:

1. Полуоборот вокруг оси a с последующим полуоборотом вокруг оси b, которая ей параллельна, равносилен поступательному перемещению вдоль направления (от a к b) кратчайшего расстояния между осями и на расстояние, равное удвоенной длине этого кратчайшего расстояния. Это ясно из рассмотрения перемещения, которое получает любая точка P в плоскости (a, b) (фиг. 8).

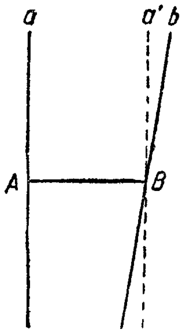
2. Полуоборот вокруг оси a с последующим полуоборотом вокруг оси b, пересекающей ось a, равносилен повороту вокруг общего перпендикуляра к обеим осям на угол, равный удвоенному углу между ними, в направлении от оси a к оси b. Доказывается подобно тому, как и в первом случае (фиг. 9).

3. Чтобы найти результат последовательных полуоборотов вокруг двух осей a и b, скрещивающихся, но не пересекающихся, проведем через точку B, находящуюся на оси b на кратчайшем расстоянии AB от оси a, ось a', параллельную оси a (фиг. 10).

Не изменяя результата, мы можем добавить два полуоборота вокруг a'. Полуоборот вокруг a и последующий полуоборот вокруг a' дают перемещение



Фиг. 9.



Фиг. 10.

вдоль AB на расстояние $2AB$. Полуоборот вокруг a' и затем следующий полуоборот около b дают поворот около оси AB на угол, равный удвоенному углу между a и b.

Мы выводим отсюда заключение, что всякое перемещение твердого тела равносильно последовательным полуоборотам вокруг двух осей.

---

[1]) Перемещения такого рода рассматривались Гамильтоном при исследовании вращения твердого тела вокруг одной неподвижной точки. Дальнейшие подробности можно найти у Бёрнсайда [Burnside (1889)] и Винера [H. Wiener (1890)].