

Э. Гурса

**Курс математического
анализа**

**Т. 3. Ч. 1. Бесконечно близкие
интегралы. Уравнения с
частными производными**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э1 **Э. Гурса**
Курс математического анализа: Т. 3. Ч. 1. Бесконечно близкие интегралы. Уравнения с частными производными / Э. Гурса – М.: Книга по Требованию, 2021. – 276 с.

ISBN 978-5-458-25171-6

По объему это руководство является одним из наиболее полных в современной мировой математической литературе. В то же время излагаемые факты выбраны не по принципу энциклопедичности, выбор проникнут одной руководящей мыслью - дать необходимый материал, на котором основывается разработка наиболее важных проблем современной науки.

ISBN 978-5-458-25171-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава XXIII.

БЕСКОНЕЧНО БЛИЗКИЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Стр.

I. Уравнения в вариациях.

457. Дополнения к теории линейных уравнений	9
458. Приложение к полулинейной системе	11
459. Интегралы как функции начальных значений	14
460. Распространение на уравнения, зависящие от параметров	13
461. Бесконечно близкие интегралы	19
462. Уравнения в вариациях	23
463. Теорема Пуанкаре	24

II. Периодические и асимптотические решения. Устойчивость.

464. Периодические решения	28
465. Устойчивые и неустойчивые решения	30
466. Общие теоремы относительно устойчивости	33
467. Приложение общих теорем	35
468. Устойчивость равновесия	40
469. Приложение к более общим системам	41
470. Асимптотические ряды. Условная устойчивость	42

Глава XXIV.

УРАВНЕНИЕ МОНЖА-АМПЕРА.

I. Характеристики. Промежуточные интегралы.

471. Задача Коши для уравнения второго порядка	45
472. Элементы соприкосновения. Многообразия M	50
473. Уравнения Монжа-Ампера. Характеристики	51
474. Свойства характеристик	55
475. Промежуточные интегралы	57
476. Различные приложения, примеры	62

II Метод Лапласа. Классификация линейных уравнений.

477. Промежуточные интегралы линейного уравнения	66
478. Преобразования Лапласа	68
479. Три типа линейных уравнений	71
480. Изучение задачи Коши в частном случае	75
Упражнения	77

Глава XXV.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С n ПЕРЕМЕННЫМИ.

I. Классификация уравнений с n переменными.

481. Характеристики уравнений с n переменными	79
482. Распространение посредством волны	82
483. Общие свойства вполне линейных уравнений	84

II. Приложения к некоторым примерам.

484. Уравнение звука	87
485. Цилиндрические волны	91
486. Распространение теплоты в неограниченной среде	93
487. Задача о кольце	96
488. Охлаждение сферы	97

Глава XXVI.

линейные уравнения гиперболического типа.

I. Изучение некоторых задач, относящихся к уравнению $z = f(x, y)$.

489. Определение интеграла по данным Коши	109
490. Смешанные задачи	104
491. Определение интеграла по его значениям вдоль двух кривых	107
492. Прямолинейное движение газа	108
493. Колеблющаяся струна	112

II. Последовательные приближения. Способ Римана.

494. Определение интеграла по его значениям на двух характеристиках	114
495. Функция Римана	118
496. Первое решение задачи Коши	121
497. Сопряженное уравнение	124
498. Способ Римана	126
499. Уравнения с постоянными коэффициентами	130
500. Другие задачи	133

III. Уравнения с несколькими переменными.

501. Основная формула	135
502. Способ Вольтерра	137
Дополнения и упражнения	141

Глава XXVII.

линейные уравнения эллиптического типа.

I. Гармонические функции. Интеграл Пуассона.

503. Общие свойства	143
504. Равномерно сходящиеся интегралы	148
505. Логарифмический потенциал	150
506. Вторая формула Грина	153
507. Приложения к гармоническим функциям	155
508. Интеграл Пуассона	157
509. Связь интеграла Пуассона с рядом Фурье	161
510. Теорема Гарнака	162
511. Аналитическое продолжение гармонической функции	164

II. Задача Дирихле. Функция Грина.

512. Доказательство Римана	167
513. Способ Неймана	170
514. Обобщение задачи	174
515. Альтернирующий метод Шварца	177
516. Внешняя задача	179
517. Конформное отображение	181
518. Функция Грина	184
519. Свойства функции Грина	187

III. Общее уравнение эллиптического типа.

520. Обобщение задачи Дирихле	189
521. Исследование уравнения $\Delta u = f(x, y)$	191

522. Метод Пикара	193
523. Функция Грина для общего уравнения эллиптического типа . . .	194
524. Смешанные эллиптические задачи	197
Дополнения и упражнения	198

Глава XXVIII.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ.

I. Задача Дирихле в пространстве.

525. Общие свойства	204
526. Ньютонов потенциал простого слоя	206
527. Потенциал двойного слоя	209
528. Вторая формула Грина	212
529. Внутренняя и внешняя задача	215
530. Решение задачи для шара	218
531. Функции Лапласа	220
532. Свойства функций U_n	223
533. Метод Неймана	215
534. Функция Грина	229

II. Ньютонов потенциал.

535. Потенциал объема	231
535. Формула Пуассона	234
537. Формула Гаусса	237
538. Нормальные производные потенциала простого слоя	237
539. Ньютонов потенциал двойного слоя	241
Дополнения и упражнения	241

Глава XXIX.

УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ.

540. Общие положения	243
541. Аналитические интегралы	245
542. Фундаментальное решение	248
543. Формула Пуассона	250
544. Интегралы, аналогичные потенциалу	255
545. Распространение формулы Грина. Приложения	260
546. Свойства интегралов	265
547. Граничные задачи	267
Указатель	273

ГЛАВА XXIII.

БЕСКОНЕЧНО БЛИЗКИЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Изучение функций, определенных дифференциальным уравнением, во всей области их существования является задачей, полное разрешение которой невозможно при современном состоянии анализа. Однако, ограничившись изучением интегралов, бесконечно близких к уже известному интегралу, удалось получить чрезвычайно интересные результаты. Именно таким путем А. Пуанкаре в своих замечательных работах, посвященных „Задаче о трех телах“*, доказал существование бесконечного множества периодических решений и решений асимптотических к периодическим. Разыскание решений, бесконечно-близких к известному решению, привело его к системе линейных дифференциальных уравнений, которые он называет *уравнениями в вариациях*; аналогичная система для уравнений с частными производными была ранее рассмотрена Г. Дарбу** под названием *вспомогательной системы*. Результаты А. Пуанкаре были с тех пор использованы Пенлеве*** и другими математиками при решении задачи чистого анализа, а именно при образовании дифференциальных уравнений с неподвижными критическими точками.

В этой главе после изучения интегралов системы дифференциальных уравнений, рассматриваемых как функции начальных значений, мы докажем основную теорему А. Пуанкаре. Это исследование было уже проделано (II, § 387) в случае, когда правые части являются аналитическими функциями. Мы возвращаемся к нему в общем случае, пользуясь методом последовательных приближений Пикара, который требует наименьшего числа предположений и очень просто приводит к цели.

1. УРАВНЕНИЯ В ВАРИАЦИЯХ.

457. Дополнения к теории линейных уравнений. Изложим сначала несколько замечаний о приложении метода Пикара к линейным уравнениям. Рассмотрим для определенности систему двух линейных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = ay + bz + c, \quad \frac{dz}{dx} = a_1y + b_1z + c_1, \quad (1)$$

где a, b, c, a_1, b_1, c_1 — непрерывные функции действительного пере

* *Acta mathematica*, t. XIII, 1890; Les mémoires nouvelles de la Mécanique céleste, t. I et III.

** *Comptes rendus*, t. XCVI, 19 mars 1893, p. 766; Note XI du Tome IV des „Leçons sur la théorie générale des surfaces“, p. 505—516. В мемуаре XXIII тома *Annales de l'Ecole Normale* (3-я серия, 1903) я распространил основную теорему А. Пуанкаре на некоторые системы уравнений с частными производными.

*** *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVIII, p. 201; *Acta mathematica*, t. XXV, 1902, p. 1—85.

менного x в интервале от x_0 до $x_1 > x_0$. Для приложения метода Пикара к определению интегралов, принимающих значения y_0 и z_0 при $x = x_0$, можно взять за первые приближенные значения этих интегралов вместо самих начальных значений две произвольные функции $u(x)$ и $v(x)$, непрерывные в интервале (x_0, x_1) . Итак, мы полагаем

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x [au(t) + bv(t) + c] dt,$$

$$z_1(x) = z_0 + \int_{x_0}^x [a_1u(t) + b_1v(t) + c_1] dt,$$

причем в a, b, c, a_1, b_1, c_1 x заменено через t ; далее, для $n > 1$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x [ay_{n-1}(t) + bz_{n-1}(t) + c] dt,$$

$$z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^x [a_1y_{n-1}(t) + b_1z_{n-1}(t) + c_1] dt.$$

Все эти функции y_n, z_n очевидно, непрерывны в интервале (x_0, x_1) . Пусть M будет верхней границей абсолютных величин коэффициентов a, b, a_1, b_1 в интервале (x_0, x_1) , а H — верхней границей абсолютных величин $y_1 - u$ и $z_1 - v$ в том же интервале. Отсюда непосредственно следует, что в любой точке интервала (x_0, x_1) мы имеем

$$|y_2(x) - y_1(x)| < 2MH(x - x_0),$$

$$|z_2(x) - z_1(x)| < 2MH(x - x_0);$$

далее, можно последовательно удостовериться, что, каково бы ни было n ,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < H \frac{[2M(x - x_0)]^{n-1}}{(n-1)!},$$

$$|z_n(x) - z_{n-1}(x)| < H \frac{[2M(x - x_0)]^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Рассуждение заканчивается, как в общем случае (II, § 389); y_n и z_n равномерно стремятся к пределам $y(x)$ и $z(x)$, которые являются интегралами системы (1), принимающими значения y_0 и z_0 при $x = x_0$.

Для краткости назовем функцию $F(x)$ действительного переменного x *преобладающей (доминантой)* относительно другой функции $f(x)$ в интервале (a, β) , если $F(x)$ положительна и превосходит абсолютную величину $f(x)$ для любого значения x в этом интервале. Заменим в системе (1) коэффициенты a, b, c, a_1, b_1, c_1 непрерывными функциями A, B, C, A_1, B_1, C_1 , которые были бы соответственно преобладающими

(доминантами) для предыдущих в интервале (x_0, x_1) , и займемся разысканием интегралов новой системы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= AY + BZ + C, \\ \frac{dZ}{dx} &= A_1Y + B_1Z + C_1, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

которые при $x = x_0$ принимают положительные значения Y_0 и Z_0 , соответственно большие, чем $|y_0|$ и $|z_0|$. Если взять за первые приближенные значения функции $U(x)$ и $V(x)$, которые были бы соответственно преобладающими для $u(x)$ и $v(x)$, то легко шаг за шагом проверить, что все последовательные приближенные значения $Y_n(x)$, $Z_n(x)$ интегралов новой системы положительны в интервале (x_0, x_1) и являются преобладающими для приближенных значений того же порядка $y_n(x)$ и $z_n(x)$ интегралов первоначальной системы. Интегралы $Y(x)$ и $Z(x)$ системы (2), принимающие при $x = x_0$ значения Y_0 и Z_0 , являются вследствие этого во всем интервале (x_0, x_1) преобладающими для первоначальных интегралов $y(x)$ и $z(x)$ системы (1). Выбирая A, B, C, A_1, B_1, C_1 положительными постоянными, получаем вспомогательную систему с постоянными коэффициентами, из которой легко вывести границы для абсолютных значений интегралов системы (1) в интервале (x_0, x_1) . Заметим также, что это рассуждение без труда распространяется на комплексную область, когда a, b, c, a_1, b_1, c_1 — голоморфные функции от x в этой области.

Добавим еще последнее замечание, которое можно распространить на систему любого числа линейных уравнений. Пусть будет $y' = ay + b$ линейное уравнение, причем коэффициенты a и b — непрерывные функции в интервале (x_0, x_1) , $x_1 > x_0$, и первая *положительна*, и пусть $Y(x)$ есть интеграл этого уравнения, равный y_0 при $x = x_0$. Если за первое приближенное значение взять функцию $u(x) \leq Y(x)$ во всякой точке интервала, то *все остальные приближенные значения y_n будут также меньше или в крайнем случае равны $Y(x)$* . Это свойство немедленно следует из рекуррентного соотношения

$$Y(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^x a(t) [Y(t) - y_{n-1}(t)] dt$$

и из предположения относительно первого приближенного значения.

458. Приложение к полулинейной системе. Рассмотрим систему следующего частного вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y), \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y)z + \psi(x, y), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ — три функции переменных x и y , непрерывные при изменении x и y в интервалах $(x_0, x_0 + a)$, $(y_0 - b, y_0 + b)$; a и b — два положительных числа; кроме того, предположим, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет относительно y условию Липшица в этой области. Чтобы получить интегралы системы (3), принимающие

соответственно значения y_0 и z_0 при $x = x_0$, естественно поступить следующим образом. Будем искать сначала, например методом Пикара, интеграл первого уравнения, равный y_0 при $x = x_0$. Пусть этот интеграл, непрерывный в интервале $(x_0, x_0 + h)$, есть $Y(x)$; здесь h положительное число меньше или равно a . Заменяя затем y через $Y(x)$ в $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, получим при помощи квадратур интеграл $Z(x)$ второго уравнения, принимающий значение z_0 при $x = x_0$.

Но можно также приложить метод последовательных приближений ко всей системе (3), принимая y_0 за первое приближенное значение y , и произвольную постоянную K — за первое приближенное значение z ; т. е. мы полагаем:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt, \quad z_1 = z_0 + \int_{x_0}^x [\varphi(t, y_0) K + \psi(t, y_0)] dt$$

и вообще

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f[t, y_{n-1}(t)] dt,$$

$$z_n(x) = z_0 + \int_{x_0}^x \{ \varphi[t, y_{n-1}(t)] z_{n-1}(t) + \psi[t, y_{n-1}(t)] \} dt.$$

Когда n безгранично возрастает, y в интервале $(x_0, x_0 + h)$ равномерно стремится к $Y(x)$; мы хотим показать, что z_n тоже стремится равномерно к $Z(x)$. Это, несомненно, справедливо вследствие общей теоремы (§ 389), если $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют условию Липшица относительно y , но это последнее предположение не нужно, и достаточно предположить, что функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывны. В самом деле, мы имеем

$$Z(x) = z_0 + \int_{x_0}^x \varphi[t, Y(t)] Z(t) dt + \int_{x_0}^x \psi[t, Y(t)] dt;$$

сравнивая эту формулу с формулой для $z_n(x)$, получаем:

$$Z(x) - z_n(x) = \int_{x_0}^x \{ \varphi[t, Y(t)] Z(t) - \varphi[t, y_{n-1}(t)] z_{n-1}(t) \} dt +$$

$$+ \int_{x_0}^x \{ \psi[t, Y(t)] - \psi[t, y_{n-1}(t)] \} dt;$$

полагая $Z(x) - z_n(x) = \delta_n(x)$, можем переписать предыдущее соотношение в таком виде:

$$\delta_n(x) = \int_{x_0}^x \varphi[t, y_{n-1}(t)] \delta_{n-1}(t) dt +$$

$$+ \int_{x_0}^x \{ \varphi[t, Y(t)] - \varphi[t, y_{n-1}(t)] \} Z(t) dt +$$

$$+ \int_{x_0}^x \{ \psi[t, Y(t)] - \psi[t, y_{n-1}(t)] \} dt.$$

Коэффициент при $\delta_{n-1}(t)$ под знаком $\int$ по абсолютной величине меньше некоторого положительного числа M , так как $y_{n-1}(t)$ остается между $y_0 - b$ и $y_0 + b$; с другой стороны, сумма остальных членов под знаком $\int$ равномерно стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает, потому что y_n равномерно стремится к Y . Выберем теперь целое число p так, чтобы абсолютная величина выражения

$$\{\varphi[t, Y(t)] - \varphi[t, y_{n-1}(t)]\} Z(t) + \phi[t, Y(t)] - \phi[t, y_{n-1}(t)]$$

была меньше данного положительного числа λ , каково бы ни было t , если только $n \geq p$. Выбрав число p таким образом, рассмотрим последовательность функций $\Delta_{p-1}(x)$, $\Delta_p(x)$, ..., $\Delta_n(x)$, ..., определенных рекуррентным соотношением

$$\Delta_n(x) = \int_{x_0}^x [M\Delta_{n-1}(t) + \lambda] dt \quad (n = p, p+1, \dots),$$

и предположим, что мы взяли $\Delta_{p-1}(x) \geq |\delta_{p-1}(x)|$. Можно шаг за шагом проверить, что все функции $\Delta_p(x)$, $\Delta_{p+1}(x)$, ... являются соответственно преобладающими для $\delta_p(x)$, $\delta_{p+1}(x)$, ... Но когда n неограниченно возрастает, $\Delta_n(x)$ равномерно стремится к тому интегралу линейного уравнения $y' = My + \lambda$, который обращается в нуль при $x = x_0$, т. е. к $\frac{\lambda}{M} \{e^{M(x-x_0)} - 1\}$. Можно, следовательно, найти целое число m , достаточно большое, чтобы при $n \geq p + m$ выполнялось неравенство

$$|\Delta_n(x)| \leq \frac{\lambda}{M} \{e^{M(x-x_0)} - 1\} + \epsilon,$$

где ϵ — произвольное положительное число. Это неравенство будет и по-прежнему справедливо, если заменить $\Delta_n(x)$ через $\delta_n(x)$. К тому же можно предположить, что p выбрано таким образом, что $\frac{\lambda}{M} \{e^{M(x_1-x_0)} - 1\}$ меньше ϵ , так как λ можно выбрать как угодно малым. Абсолютная величина $\delta_n(x) = Z(x) - z_n(x)$ таким образом меньше 2ϵ , если только $n \geq p + m$; следовательно, $z_n(x)$ равномерно стремится к $Z(x)$, когда n неограниченно возрастает. Ясно, что вместо интервала $(x_0, x_0 + h)$ этот метод можно также приложить к интервалу $(x_0 - h, x_0 + h)$; если приближения равномерно сходятся для y_n , то то же самое будет и для z_n . Теорема распространяется, очевидно, на систему $k + p$ уравнений такого вида:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (k = 1, 2, \dots, p) \\ \frac{dz_k}{dx} &= \varphi_{k1}(x, y_1, \dots, y_n) z_1 + \dots \\ &\quad \dots + \varphi_{kp}(x, y_1, \dots, y_n) z_p + \psi_k(x, y_1, \dots, y_n), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где функции f , φ , ψ непрерывны в некоторой области D , и где функции f удовлетворяют в этой области условию Липшица относительно y . Если применить к этой системе метод последовательных приближений, то они сходятся в том же интервале, как и приближения для одних y , причем сходимость равномерна*.

459. Интегралы как функции начальных значений. Вернемся для определенности к дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (5)$$

где по предположению $f(x, y)$ удовлетворяет обычным условиям в области D , определенной неравенствами

$$a - a \leq x \leq a + a, \quad \beta - b \leq y \leq \beta + b.$$

Возьмем систему начальных значений (x_0, y_0) , принадлежащую этой области. Последовательные приближенные значения интеграла, $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ остаются заключенными между $\beta - b$ и $\beta + b$, если только

$$|y_0 - \beta| + M|x - x_0| < b.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно повторить рассуждения § 389; точно так же доказывается, что $y_n(x; x_0, y_0)$ равномерно стремится к пределу $\psi(x; x_0, y_0)$ в области D' , определенной условиями

$$a - a \leq x \leq a + a, \quad a - a \leq x_0 \leq a + a, \quad \beta - b \leq y_0 \leq \beta + b, \\ |y_0 - \beta| + M|x - x_0| < b.$$

Эта область D' содержит в частности область D'' , определенную неравенствами

$$|x - a| < h; \quad |x_0 - a| \leq h; \quad |y_0 - \beta| < \frac{b}{2},$$

где h — меньшее из двух чисел a и $\frac{b}{4M}$. Последовательные приближенные значения $y_n(x; x_0, y_0)$ являются, очевидно, непрерывными функциями от x_0, y_0 в этой области, и, следовательно, интеграл $y = \psi(x; x_0, y_0)$, обращающийся в y_0 при $x = x_0$, является непрерывной функцией от x_0 и y_0 .

Для доказательства, что эта функция допускает производные по x_0 и y_0 , мы предположим, что $f(x, y)$ допускает непрерывную производную $f'_y(x, y)$. Пусть

$$z = \frac{\partial \psi}{\partial x_0}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y_0}$$

* Свойства, которые будут установлены в следующих параграфах, послужили темой для значительного количества работ, перечень которых можно найти в memoirе E. Cotton по этому вопросу (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXVII, 1909, p. 204 et t. XXXVII, 1910, p. 4). Метод, которому я следовал, не отличается существенно от метода Коттона.