

У.Р. Гамильтон

Избранные труды
Оптика, динамика, кватернионы

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
У11

У11 **У.Р. Гамильтон**
Избранные труды: Оптика, динамика, кватернионы / У.Р. Гамильтон – М.: Книга по Требованию, 2013. – 560 с.

ISBN 978-5-458-32855-5

В книгу выдающегося ирландского ученого У.Р. Гамильтона (1805-1865) включены основополагающие работы по геометрической оптике, физической оптике, оптико-механической аналогии, динамике, теории кватернионов. В Приложениях помещены статьи о жизни и творчестве ученого, комментарии к его работам, библиография трудов. Многие работы публикуются на русском языке впервые. Книга представляет интерес для математиков, механиков, физиков и историков науки.

ISBN 978-5-458-32855-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОТ РЕДАКТОРА

Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865) – замечательный ирландский математик, основные работы которого относятся к математической физике, аналитической механике и теории гиперкомплексных чисел. Вот краткое перечисление важнейших его результатов.

1. Геометрическая оптика (основное уравнение, расчеты систем лучей – распространение, отражение, преломление света в неоднородных и неизотропных средах, предсказание и открытие внешней и внутренней конической рефракции).

2. Физическая оптика (открытие различия между групповой и волновой скоростью света).

3. Оптико-механическая аналогия (принцип Ферма и принцип наименьшего действия).

4. Динамика (вариационный принцип Гамильтона, гамильтониан, канонические уравнения Гамильтона, уравнение Гамильтона–Якоби, вариационные методы интегрирования уравнений движения).

5. Теория кватернионов (гиперкомплексные числа, символические операторы, исчисление векторов, уравнение Гамильтона–Кэли, годограф, линейные преобразования и т.д.).

Общеизвестна роль так называемого гамильтонова формализма в квантовой механике, теории (квантованных) полей и т.п., роль его динамики в развитии теоретико-группового представления классической механики, значение теории кватернионов как источника векторного исчисления и т.д.

Для научного творчества Гамильтона характерно стремление к обобщению разработанных им математических методов на различные проблемы математики и физики, поиск "универсальной математики" Вселенной. Трудно указать область физики и механики, в которых не использовались бы методы Гамильтона; они находят применение и при решении многих физико-химических и биологических проблем.

Открытия Гамильтона давно стали и продолжают оставаться неотъемлемым элементом нашей картины мира; их эвристическое значение громадно и со временем все более возрастает.

Значение Гамильтона прекрасно и кратко охарактеризовал бывший президент Ирландской республики Е. де Валера: "Имя Гамильтона известно каждому математику или физику-теоретику. Ирландия – страна Гамильтона, страна великого математика".

На русский язык были переведены только работы Гамильтона по динамике в сборнике "Вариационные принципы механики" (ред., примеч. и послесловие Л.С. Полака. М.: Физматгиз, 1959; в ссылках сокращенно: ВПМ), давно ставшем библиографической редкостью.

Настоящая книга содержит основные работы Гамильтона по математической теории геометрической и физической оптики, оптико-механической аналогии, аналитической механике и исчислению кватернионов. Все переводы сделаны по английскому изданию: *The mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton*. Cambridge: Univ. press, 1931–1967. Vol. 1–3 (в ссылках сокращенно: Н. 1, 2, 3). В Приложениях помещены статьи о жизни и научном творчестве У.Р. Гамильтона, комментарии, библиография. В Дополнениях и Приложениях использованы материалы книг: *Graves R.P. Life of Sir William Rowan Hamilton*. Dublin: Univ. press, 1882–1889. Vol. 1–3 (сокращенно: Gr. 1, 2, 3) и *Полак Л.С. Вариационные принципы механики, их развитие и применения в физике*. М.: Наука, 1961 (сокращенно: ЛП).

Статья "Уильям Роуэн Гамильтон (1805—1865)" в Приложениях вместе с остальными материалами и переводами, предназначенными для книги "У. Гамильтон. Избранные труды", была написана еще в 1984 г. и в 1986 г. принята для опубликования Редакционной коллегией академической серии "Классики науки" и издательством "Наука", но не была до сих пор опубликована по независящим от авторов и переводчиков причинам. При издании настоящей книги в 1994 г. нами внесены в тексты и переводы только незначительные изменения и добавлено несколько ссылок на вышедшие в последнее время книги, содержащие гамильтонову тематику.

Ответственный редактор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность Ирландской академии наук за помощь в издании настоящей книги.

Л. Полак

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

ОБ ОДНОМ ВЗГЛЯДЕ НА МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ОПТИКУ*

В мемуарах о системах лучей, представленных мной Королевской ирландской академии и частично опубликованных в XV и XVI томах "Transactions" этой академии, изложен взгляд на математическую оптику, который представляется мне аналогичным взглядам Декарта на алгебраическую геометрию и, по-видимому, приведет тех, кто его воспримет, к аналогичным изменениям метода. Математический комитет Британской ассоциации поощрения науки выразил пожелание, чтобы краткое изложение этого взгляда на оптику было приведено в подготавливаемом к печати издании комитета. Именно такое, по возможности краткое, изложение я сейчас представляю, стремясь как можно точнее сформулировать самый взгляд и воздерживаясь от какого бы то ни было отчета о тех результатах, к которым он привел меня.

Общая проблема, которую я поставил перед собой в оптике, состоит в *исследовании математических следствий из закона наименьшего действия* – общего закона геометрической оптики, в котором, как хорошо известно, заключены все частные случаи отражения и лучепреломления, обыкновенного и необыкновенного, в средах как с постепенно, так и с резко изменяющимся показателем преломления. *Основная идея*, из которой проистекает весь мой метод, есть *идея существования одного главного, или характеристического, соотношения для каждой оптической системы лучей*, т.е. для каждой комбинации прямолинейных или изогнутых, искривленных траекторий, по которым свет распространяется в соответствии с законом наименьшего действия. Это характеристическое соотношение различно для различных систем и обладает тем свойством, что все математические свойства системы выводятся из него подобно тому, как метод, изобретенный Декартом для алгебраического решения геометрических задач, целиком проистекает из основополагающей идеи существования одного главного соотношения для каждой кривой на плоскости или искривленной поверхности, форма которого заключает в себе все свойства кривой или поверхности. Основополагающее соотношение, рассматриваемое Декартом в соответствии с его взглядом на алгебраическую геометрию, устанавливало связь между координатами переменной точки, имеющей своим геометрическим местом данную кривую или поверхность, и числом координат, между которыми устанавливалась связь, равным двум или трем. Соотношение, рассмат-

* On a view of mathematical optics (June, 1832) // Brit. Assoc. Rep. 1831–1832. P. 545–547 [Н. 1. Р. 295–296]. Перевод Ю.А. Данилова.

риваемое мной в соответствии с моим взглядом на алгебраическую оптику, в общем случае устанавливает связь между восемью величинами, из которых шесть являются координатами двух переменных точек в пространстве, седьмая – показателем цвета, а восьмая, называемая мною *характеристической функцией* (поскольку я обнаружил, что в характере ее зависимости от семи предыдущих величин содержатся все свойства системы), – *действием* между двумя переменными точками (слово "действие" употреблено здесь в том же смысле, как и в упоминавшемся выше известном законе геометрической оптики). Я вывел основную формулу для изменения этой характеристической функции, соответствующего изменениям положений [переменных точек], от которых она зависит, и считаю, что *одна эта фундаментальная формула позволяет свести к изучению характеристической функции все задачи математической оптики*, касающиеся всех мыслимых комбинаций зеркал, линз, кристаллов и атмосфер. И хотя в мои намерения не входило включать в число указанных задач математической оптики исследования, относящиеся к явлениям интерференции, нетрудно понять, исходя из природы величины, названной мною характеристической функцией и являющейся согласно волновой гипотезе не чем иным, как *временем распространения света от одной переменной точки к другой*, что изучение этой функции не может не быть полезным и в подобных исследованиях. Однако мои собственные исследования до сих пор были направлены главным образом на изучение следствий из закона наименьшего действия и свойств оптических систем и вообще систем лучей. Изложив выше общий *взгляд*, которым я руководствовался в этих исследованиях, я должен отослать за *результатами* к уже упоминавшимся томам "Transactions" Королевской ирландской академии и к XVII, еще не вышедшему из печати тому, в котором по распоряжению академии будет опубликовано "Третье дополнение" к моему "Опыту теории систем лучей"¹.

ТРЕТЬЕ ДОПОЛНЕНИЕ К "ОПЫТУ ТЕОРИИ СИСТЕМ ЛУЧЕЙ"*

Введение

Настоящее дополнение содержит систему общих методов решения оптических задач и некоторые общие результаты, полученные из основной формулы и взгляда на оптику, изложенных в моих предыдущих мемуарах. Подробные содержательные заголовки, предпосланные определенным пунктам и приведенные в оглавлении, позволяют составить достаточное представление о плане настоящего сообщения. Мне остается лишь добавить несколько слов относительно некоторых наиболее важных результатов.

Из них особого внимания заслуживает, по-видимому, теория внешней и внутренней конической рефракции, выведенная с помощью моих общих методов из принципов Френеля. Уместно заметить, что эта теория была разработана и до-

¹ Hamilton W.R. Third supplement to an Essay on the theory of systems of rays // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17, pt. 1. P. 1–144 [Н. 1. P. 164–293]. Рус. пер. см. наст. изд.

* Third supplement to an Essay on the theory of systems of rays (Jan. 22 and Oct. 22, 1832) // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. vol. 17, pt. 1. P. 1–144 [Н. 1. P. 164–293]. Перевод Ю.А. Данилова.

ложена общему собранию Королевской ирландской академии в первую, а не во вторую из дат, указанных после заголовка настоящего "Дополнения". Сделав сообщение академии 22 октября 1832 г., я обратился к проф. Ллойд с просьбой исследовать затронутый мной вопрос экспериментально и попытаться выяснить, не удастся ли наблюдать в двухосных кристаллах явления, предсказываемые моей теорией конической рефракции. Эксперименты проф. Ллойда, подтвердившие мои предсказания, были опубликованы им в номерах "London and Edinburgh Philosophical Magazine" за февраль и март 1833 г. и в более подробном изложении помещены в этом томе ирландских "Transactions"¹.

Мне известно, что Джеймс Мак-Куллах, эсквайр, член колледжа Св. Троицы в Дублине, опубликовавший в предыдущем томе настоящих "Transactions" серию изящных геометрических иллюстраций теории Френеля, узнав об экспериментах проф. Ллойда, подтвердил своими геометрическими методами полученные мной результаты о существовании на волне Френеля конусовидных острий и окружностей касания, которые привели меня к предсказанию конической рефракции. Когда я сообщил м-ру Мак-Куллаху о том, что с помощью общей теории двойственных поверхностей, изложенной в моем докладе на общем собрании Королевской ирландской академии в прошлом году, мне удалось установить связь между остриями и окружностями на волне Френеля и такого же рода остриями и окружностями на другой поверхности, открытой месье Коши², м-р Мак-Куллах заявил, что пришел к аналогичным результатам независимо и вручил мне свое исследование по этому вопросу, которое я не успел изучить основательно. Надеюсь, что [м-р Мак-Куллах] вскоре представит свой труд академии и опубликует его в ирландских "Transactions"³.

Не могу не упомянуть и о том, что когда я в ноябре прошлого года направил проф. Эри письмо, в котором сообщил о предсказанных мной остриях и окружностях на волне Френеля, а также о предсказанной мною же, но тогда еще не подтвержденной экспериментально конической рефракции, проф. Эри ответил, что ему давно известно о существовании конических острий и он удивляется, почему Френель не обратил на них внимания. Однако проф. Эри не было известно о существовании окружностей касания, и ни конусовидные острия, ни окружности не навели его на мысль о теории конической рефракции.

Эта теория была выведена моими общими методами из гипотезы поперечных колебаний в световом эфире, впервые предложенной, по-видимому, д-ром Юнгом, но сформулированной независимо и доведенной до большего совершенства Френелем, а также из другого принципа Френеля, постулирующего существование в двухосной кристаллической среде трех взаимно перпендикулярных осей упругости. Таким образом, подтверждение теории конической рефракции в экспериментах проф. Ллойда надлежит рассматривать как новый важный аргумент в пользу взглядов Френеля, т.е. как новое поощрение к теоретическим построениям на основе этих взглядов, позволяющим сочетать и предсказывать явления.

¹ Lloyd H. // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17, pt. 1. P. 145–157.

² Cauchy A.L. Oeuvres complètes. Paris: Gauthier-Villars, 1911. Sér. 2. T. 12. P. 113 et seq.

³ MacCullagh J. // Trans. Roy. Irish Acad. 1837. Vol. 17, pt 1. P. 241–263; Collected works. Dublin, 1897. P. 20–54 (see also: P. 17–19).

И без того большой объем настоящего "Дополнения" вынуждает меня отложить до будущих сообщений многие другие результаты, полученные с помощью моих общих методов из принципа характеристической функции, в частности общую теорию фокальных расстояний и аберраций оптических приборов вращения [1].

Обсерватория, Дублин
Июнь 1833

Уильям Гамильтон

Основная формула математической оптики. План настоящего "Дополнения"

1. Будем считать, что свет распространяется по известному общему закону, известному под названием принципа наименьшего действия, или быстрее распространения, по любому искривленному или ломаному лучу, обыкновенному или необыкновенному, пробегая элемент луча $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ с молекулярной скоростью, или волновой медленностью v , по предположению зависящей в самом общем случае от природы среды, положения и направления элемента и цвета, присущего свету и принимающего лишь конечное число значений, если таковые заданы. Медленность v является, таким образом, функцией трех прямоугольных координат, или отметок положения, x, y, z , трех отношений дифференциалов, или направляющих косинусов,

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

и показателя, или меры, цвета χ . От вида χ , который характеризует среду, зависит функция v . Обозначим вариацию этой функции через⁴

$$\delta v = \frac{\delta v}{\delta x} \delta x + \frac{\delta v}{\delta y} \delta y + \frac{\delta v}{\delta z} \delta z + \frac{\delta v}{\delta \alpha} \delta \alpha + \frac{\delta v}{\delta \beta} \delta \beta + \frac{\delta v}{\delta \gamma} \delta \gamma + \frac{\delta v}{\delta \chi} \delta \chi$$

и с помощью соотношения $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ выберем $\delta v / \delta \alpha$, $\delta v / \delta \beta$, $\delta v / \delta \gamma$ так, чтобы выполнялось условие

$$\alpha \frac{\delta v}{\delta \alpha} + \beta \frac{\delta v}{\delta \beta} + \gamma \frac{\delta v}{\delta \gamma} = v,$$

т.е. так, чтобы медленность v была однородной функцией степени 1 по α, β, γ . Тогда, как было показано в моем первом "Дополнении" [2], вариации определенного интеграла $\int v ds$, рассматриваемого как функция, которую я назвал *характеристической функцией* координат начала и конца, т.е. *вариация действия, или времени, затрачиваемого светом любого одного цвета на распространение от одной переменной точки к другой*, определяется выражением

$$dV = (\delta \int v ds) = \frac{\delta v}{\delta \alpha} \delta x - \frac{\delta v'}{\delta \alpha'} \delta x' + \frac{\delta v}{\delta \beta} \delta y - \frac{\delta v'}{\delta \beta'} \delta y' + \frac{\delta v}{\delta \gamma} \delta z - \frac{\delta v'}{\delta \gamma'} \delta z', \quad (1.1)$$

где штрихами обозначены начальные величины. Общее уравнение (1.1), названное

⁴ В настоящем издании сохранен символ частного дифференцирования δ , принятый во времена Гамильтона, вместо современного ∂ . — Примеч. пер.

мною уравнением характеристической функции, приводит к самым различным и многочисленным следствиям и, как мне кажется, включает в себя всю математическую оптику. В настоящем "Дополнении" я намереваюсь изложить некоторые дополнительные замечания и методы, связанные с характеристической функцией V и с основной формулой (1.1), в частности указать новый взгляд на вспомогательную функцию W , введенную мною в предыдущих мемуарах, и предложить новую вспомогательную функцию T , использование которой во многих оптических исследованиях сопряжено с определенными преимуществами. Я приведу также некоторые другие общие преобразования и приложения общей формулы и рассмотрю связь между моим взглядом на оптику и волновой теорией света.

Основная задача математической оптики и решение ее с помощью основной формулы. Уравнения в частных производных для характеристической функции V , общие для всех оптических комбинаций. Вывод функций среды Ω , v из характеристической функции V . Замечания по поводу новых символов σ , τ , ν ,...

2. Основной задачей математической оптики, к которой сводятся все остальные, можно считать следующую: для любой заданной комбинации сред определить закон зависимости начального и конечного направлений искривленного или ломаного луча, обыкновенного или необыкновенного, от положений двух точек, конечной и начальной, связанных визуально этим лучом, и от цвета света. В наших обозначениях речь идет о том, чтобы определить закон зависимости конечных и начальных направляющих косинусов α , β , γ , α' , β' , γ' от координат x , y , z , x' , y' , z' конечной и начальной точек и от показателя цвета χ . Решение основной задачи дается формулой (1.1), или шестью уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\delta V}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta \alpha}, \quad \frac{\delta V}{\delta y} = \frac{\delta v}{\delta \beta}, \quad \frac{\delta V}{\delta z} = \frac{\delta v}{\delta \gamma}, \\ -\frac{\delta V}{\delta x'} = \frac{\delta v'}{\delta \alpha'}, \quad -\frac{\delta V}{\delta y'} = \frac{\delta v'}{\delta \beta'}, \quad -\frac{\delta V}{\delta z'} = \frac{\delta v'}{\delta \gamma'}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

следующими непосредственно из (1.1) и выражающими тот самый закон зависимости, который требуется найти. Для того чтобы эти уравнения можно было применить к любой заданной комбинации [сред], необходимо знать не только вид характеристической функции V , т.е. закона зависимости действия, или времени от положения конечной и начальной точек и от цвета, но и вид функций v , v' , т.е. оптические свойства начальной и конечной среды. Но функции сред v , v' , начальная и конечная, сами могут быть выведены из одной лишь характеристической функции V с помощью следующего рассуждения.

Какова бы ни была природа конечной среды, т.е. каков бы ни был закон зависимости функции v от положения [конечной точки], направления и цвета, при выводе общей формулы (1.1) мы предполагаем, что выражение этой зависимости выбрано специальным образом и функция среды v – однородная функция степени 1 направляющих косинусов α , β , γ . Тогда частные производные $\delta v / \delta \alpha$, $\delta v / \delta \beta$, $\delta v / \delta \gamma$

этой однородной функции сами являются однородными функциями, но степени 0, т.е. являются функциями двух отношений α/γ , β/γ , зависящими, вообще говоря, от координат x , y , z и показателя цвета χ . Если считать, что два отношения α/γ , β/γ исключены из первых трех уравнений (2.1) и аналогичным образом что отношения α'/γ' , β'/γ' исключены из трех последних уравнений (2.1), то в результате такого исключения мы получили бы два уравнения в частных производных первого порядка, связывающие характеристическую функцию V , координаты и цвет:

$$\Omega\left(\frac{\delta V}{\delta x}, \frac{\delta V}{\delta y}, \frac{\delta V}{\delta z}, x, y, z, \chi\right) = 0, \quad (2.2)$$

$$\Omega'\left(-\frac{\delta V}{\delta x'}, -\frac{\delta V}{\delta y'}, -\frac{\delta V}{\delta z'}, x', y', z', \chi\right) = 0.$$

Оба эти уравнения приводят к следующему общему уравнению второго порядка степени 3, справедливому для всех оптических комбинаций [3]:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta x'} \frac{\delta^2 V}{\delta y \delta y'} \frac{\delta^2 V}{\delta z \delta z'} + \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y'} \frac{\delta^2 V}{\delta y \delta z'} \frac{\delta^2 V}{\delta z \delta x'} + \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z'} \frac{\delta^2 V}{\delta y \delta x'} \frac{\delta^2 V}{\delta z \delta y'} = \\ & = \frac{\delta^2 V}{\delta z \delta x'} \frac{\delta^2 V}{\delta y \delta y'} \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta z'} + \frac{\delta^2 V}{\delta z \delta y'} \frac{\delta^2 V}{\delta y \delta z'} \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta x'} + \frac{\delta^2 V}{\delta z \delta z'} \frac{\delta^2 V}{\delta y \delta x'} \frac{\delta^2 V}{\delta x \delta y'}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если положить для краткости

$$\sigma = \frac{\delta V}{\delta x}, \quad \tau = \frac{\delta V}{\delta y}, \quad v = \frac{\delta V}{\delta z}, \quad \sigma' = -\frac{\delta V}{\delta x'}, \quad \tau' = -\frac{\delta V}{\delta y'}, \quad v' = -\frac{\delta V}{\delta z'} \quad (2.4)$$

и исключить из первых трех уравнений (2.4) две из трех координат начальной точки x' , y' , z' , то, как нетрудно понять, исходя из уравнений (2.2) или (2.3), третья координата окажется исключенной при любой оптической комбинации. Аналогично из трех последних уравнений (2.4) мы можем исключить все три координаты конечной точки, исключив любые две из них. Такого рода исключения переменных приводят к уравнениям (2.2) вида

$$\Omega(\sigma, \tau, v, x, y, z, \chi) = 0, \quad \Omega'(\sigma', \tau', v', x', y', z', \chi) = 0, \quad (2.5)$$

которые в силу сказанного могут быть получены путем дифференцирования и исключения переменных из одной лишь характеристической функции V и, как мы скоро убедимся, определяют вид функций v , v' , т.е. свойства конечной и начальной среды. Сравнивая дифференциалы соотношений с соотношениями

$$v = \alpha \frac{\delta v}{\delta \alpha} + \beta \frac{\delta v}{\delta \beta} + \gamma \frac{\delta v}{\delta \gamma} = \alpha \sigma + \beta \tau + \gamma v, \quad (2.6)$$

$$v' = \alpha' \frac{\delta v'}{\delta \alpha'} + \beta' \frac{\delta v'}{\delta \beta'} + \gamma' \frac{\delta v'}{\delta \gamma'} = \alpha' \sigma' + \beta' \tau' + \gamma' v',$$

т.е. с условиями однородности функций v и v' , выполняющимися вследствие опре-

делений (2.5) и соотношений (2.1), и с их дифференциалами

$$\begin{aligned}\alpha\delta\sigma + \beta\delta\tau + \gamma\delta\nu &= \frac{\delta\nu}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\nu}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\nu}{\delta z}\delta z + \frac{\delta\nu}{\delta\chi}\delta\chi, \\ \alpha'\delta\sigma' + \beta'\delta\tau' + \gamma'\delta\nu' &= \frac{\delta\nu'}{\delta x'}\delta x' + \frac{\delta\nu'}{\delta y'}\delta y' + \frac{\delta\nu'}{\delta z'}\delta z' + \frac{\delta\nu'}{\delta\chi'}\delta\chi',\end{aligned}\quad (2.7)$$

мы получаем уравнения [4]

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\nu} &= \frac{\delta\Omega}{\delta\sigma}, \quad \frac{\beta}{\nu} = \frac{\delta\Omega}{\delta\tau}, \quad \frac{\gamma}{\nu} = \frac{\delta\Omega}{\delta\nu}, \\ \frac{\alpha'}{\nu'} &= \frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'}, \quad \frac{\beta'}{\nu'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'}, \quad \frac{\gamma'}{\nu'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta\nu'},\end{aligned}\quad (2.8)$$

а также уравнения

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\nu}\frac{\delta\nu}{\delta x} &= \frac{\delta\Omega}{\delta x}, \quad -\frac{1}{\nu}\frac{\delta\nu}{\delta y} = \frac{\delta\Omega}{\delta y}, \quad -\frac{1}{\nu}\frac{\delta\nu}{\delta z} = \frac{\delta\Omega}{\delta z}, \quad -\frac{1}{\nu}\frac{\delta\nu}{\delta\chi} = \frac{\delta\Omega}{\delta\chi}, \\ -\frac{1}{\nu'}\frac{\delta\nu'}{\delta x'} &= \frac{\delta\Omega'}{\delta x'}, \quad -\frac{1}{\nu'}\frac{\delta\nu'}{\delta y'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta y'}, \quad -\frac{1}{\nu'}\frac{\delta\nu'}{\delta z'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta z'}, \quad -\frac{1}{\nu'}\frac{\delta\nu'}{\delta\chi'} = \frac{\delta\Omega'}{\delta\chi'},\end{aligned}\quad (2.9)$$

если левые части уравнений (2.5) выбраны так, чтобы выполнялись соотношения

$$\sigma\frac{\delta\Omega}{\delta\sigma} + \tau\frac{\delta\Omega}{\delta\tau} + \nu\frac{\delta\Omega}{\delta\nu} = 1, \quad \sigma'\frac{\delta\Omega'}{\delta\sigma'} + \tau'\frac{\delta\Omega'}{\delta\tau'} + \nu'\frac{\delta\Omega'}{\delta\nu'} = 1. \quad (2.10)$$

Соотношения (2.10) будут заведомо выполнены, например, если положить

$$\Omega \equiv (\sigma^2 + \tau^2 + \nu^2)^{1/2}\omega - 1 = 0, \quad \Omega' \equiv (\sigma'^2 + \tau'^2 + \nu'^2)^{1/2}\omega' - 1 = 0, \quad (2.11)$$

где ω и ω' , т.е. $(\sigma^2 + \tau^2 + \nu^2)^{-1/2}$ и $(\sigma'^2 + \tau'^2 + \nu'^2)^{-1/2}$, представить в виде функций переменных $\sigma(\sigma^2 + \tau^2 + \nu^2)^{-1/2}$, $\tau(\sigma^2 + \tau^2 + \nu^2)^{-1/2}$, $\nu(\sigma^2 + \tau^2 + \nu^2)^{-1/2}$, x , y , z , χ и соответственно $\sigma'(\sigma'^2 + \tau'^2 + \nu'^2)^{-1/2}$, $\tau'(\sigma'^2 + \tau'^2 + \nu'^2)^{-1/2}$, $\nu'(\sigma'^2 + \tau'^2 + \nu'^2)^{-1/2}$, x' , y' , z' , χ' . После такой предварительной подготовки частные производные $\delta\Omega/\delta\sigma$, $\delta\Omega/\delta\tau$, $\delta\Omega/\delta\nu$ будут однородными функциями степени 0 по переменным σ , τ , ν , а $\delta\Omega'/\delta\sigma'$, $\delta\Omega'/\delta\tau'$, $\delta\Omega'/\delta\nu'$ – однородными функциями степени 0 относительно σ' , τ' , ν' . Следовательно, если из трех первых уравнений (2.8) мы исключим любые две из трех конечных переменных σ , τ , ν , то тем самым будет исключена и третья переменная. Аналогично из трех последних уравнений (2.8) все три начальные величины σ' , τ' , ν' могут быть исключены одновременно. После исключения конечных и начальных величин мы приходим к двум уравнениям вида

$$\Psi\left(\frac{\alpha}{\nu}, \frac{\beta}{\nu}, \frac{\gamma}{\nu}, x, y, z, \chi\right) = 0, \quad \Psi'\left(\frac{\alpha'}{\nu'}, \frac{\beta'}{\nu'}, \frac{\gamma'}{\nu'}, x', y', z', \chi'\right) = 0, \quad (2.12)$$

определяющим функции конечной и начальной среды ν и ν' . Таким образом, обе эти функции могут быть выведены из характеристической функции V . Тем самым

общая задача математической оптики, которая уже упоминалась, сводится к изучению лишь одной функции V .

Частные производные характеристической функции V по координатам x, y, z постоянно встречаются в оптических методах настоящего и предыдущего меуаров. Именно поэтому я счел полезным обозначить их в этом "Дополнении" специальными символами σ, τ, υ . В одном из последующих разделов я покажу, какой смысл они имеют в волновой теории, а именно что в этой теории они соответствуют компонентам нормальной медленности распространения волны.

Связь характеристической функции V с выводом и интегрированием общих уравнений искривленного луча, обыкновенного или необыкновенного

3. Как частный случай сформулированной выше общей задачи можно рассматривать следующую задачу: определить общий вид дифференциальных уравнений искривленного луча, обыкновенного или необыкновенного, т.е. установить связь между общими изменениями направления и общими изменениями положения при прохождении света через неоднородную среду. В первом "Дополнении"⁵ с помощью вариационного исчисления из принципа наименьшего действия были выведены следующие уравнения:

$$d \frac{\delta v}{\delta \alpha} = \frac{\delta v}{\delta x} ds, \quad (3.1)$$

$$d \frac{\delta v}{\delta \beta} = \frac{\delta v}{\delta y} ds, \quad d \frac{\delta v}{\delta \gamma} = \frac{\delta v}{\delta z} ds.$$

(Эти дифференциальные уравнения – второго порядка, так как $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ определяются уравнениями

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

$$\alpha' = \frac{dx'}{ds'}, \quad \beta' = \frac{dy'}{ds'}, \quad \gamma' = \frac{dz'}{ds'}, \quad (3.2)$$

где символ d здесь и далее на протяжении всего третьего "Дополнения" относится к движению по лучу, δ – к произвольному бесконечно малому изменению положения, направления и цвета, ds' – начальный элемент луча.) Те же уравнения (3.1), эквивалентные лишь двум различным уравнениям, по свойствам характеристической функции могут быть выведены из основной формулы (1.1). Действительно, если продифференцировать первое из уравнений (2.2) (напомним, что в него входят производные функции V и оно выведено из общей формулы (1.1)) по каждой из трех координат x, y, z , рассматриваемых как независимые переменные, и по показателю

⁵ Supplement to an Essay on the theory of systems of rays // Trans. Roy. Irish Acad. 1830. Vol. 16, pt 1. P. 1–61.