

А.А. Лямин

**Математические парадоксы и интересные
задачи для любителей математики**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-053.2
ББК 74.27
А11

А11 **А.А. Лямин**
Математические парадоксы и интересные задачи для любителей математики / А.А. Лямин – М.: Книга по Требованию, 2023. – 199 с.

ISBN 978-5-458-25517-2

Предлагаемый сборник является, кажется, первой попыткой в русской математической литературе собрать в одно целое лучшее из тех разнообразнейших интересных задач, которые частью разбросаны в многочисленных учебниках, задачниках и журналах, а частью даже просто передаются изустно. Подобного рода задачи, для решения которых требуется знание элементарной математики (в пределах курса средних учебных заведений), ярко разнятся от обыкновенно наполняющих различные русские задачки или странно-заданным условием, или некоторой красотой рассуждения и изяществом решения данной задачи, или непредвиденным ответом...

ISBN 978-5-458-25517-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Краткій очеркъ изъ исторіи математики.

Исторія науки вообще есть и исторія прогресса; несмотря на то, что въ исторіи умственнаго развитія мы встрѣчаемъ временами застои, все-таки при опредѣленной высотѣ культуры умственныя приобрѣтенія отличаются значительной прочностью.

При бѣгломъ взглядѣ на историческое развитіе математическихъ знаній видимъ, что иной разъ почти одновременно это развитіе идетъ то съ видимымъ преобладаніемъ индуктивнаго метода, то разрастается въ способность терпѣливаго наблюденія и собиранія фактовъ, съ преобладаніемъ дедукціи; поэтому нѣтъ ничего удивительнаго въ томъ, что понадобилось много вѣковъ на то, чтобы собрать въ одно цѣлое ту массу отрывочныхъ познаній, которыя постепенно приобрѣтала человѣческой разумъ.

Математическія науки такъ же, какъ и другія многія области знанія, обязаны своимъ происхожденіемъ различнымъ теченіямъ человѣческой мысли, при чемъ одной изъ самыхъ главныхъ причинъ возникновенія примитивныхъ представленій въ области математики считаютъ образовавшееся постепенно понятіе о числѣ и мѣрѣ, лежащее въ основѣ какъ древней, такъ и современной математики.

Колыбелью математическихъ наукъ и цивилизаціи вообще, не безъ основаній, считается Востокъ, но ни одинъ еще ученый не могъ прослѣдить первыхъ шаговъ прогресса въ области математики. Нѣкоторые считаютъ исходнымъ пунктомъ Египетъ, другіе— Китай, Индію или Халдею, а иные указываютъ на какой-то древній, теперь уже вымершій, народъ, достигшій въ свое время высокой степени культуры. Какъ бы то ни было, но самые древніе изъ дошедшихъ до насъ памятниковъ математическаго развитія

древнихъ народовъ, большею частью, принадлежать египтянамъ и халдеямъ.

Начало математики вообще имѣетъ тѣсную связь съ развитіемъ философіи; но на какихъ бы основахъ ни возникла математика, важно то, что съ теченіемъ времени, находя извѣстныя свойства для отдѣльныхъ частныхъ случаевъ и постепенно комбинируя ихъ, человѣчество могло вывести разнообразныя правила, придавъ имъ такимъ образомъ видъ нѣкоторой законности.

Подобнымъ образомъ, эмпирически, и возникла одна изъ самыхъ первыхъ и важныхъ отраслей математики — геометрія, которая была тѣсно связана какъ съ развитіемъ архитектуры, такъ и съ развитіемъ астрономіи и измѣреніемъ земель, при чемъ вопросъ, какимъ образомъ могла эта наука принять чисто умозрительную форму для насъ, вѣроятно, навсегда останется загадкой.

Зародыши геометрическихъ познаній относятъ въ Египетъ, откуда предполагаютъ ея переходъ къ грекамъ, гдѣ уже она и получила настоящее свое развитіе и приняла чисто научный характеръ, благодаря трудамъ философовъ Александрійской школы, каковы Архимедъ, Эвклидъ и другіе. Но прежде, чѣмъ перейти къ развитію математики въ Греціи, бросимъ бѣглый взглядъ на познанія болѣе древнихъ народовъ, каковы халдеи, египтяне; китайцы и т. п.

Халдеи. Какъ показали новѣйшія изслѣдованія, математическія знанія халдеевъ достигли значительнаго развитія въ древней Вавилоніи и Ассиріи, но, по недостатку матеріала, все-таки точнаго отчета объ ихъ знаніяхъ дать довольно затруднительно; извѣстно лишь, что различнымъ числамъ халдеи приписывали различныя мистическія свойства и значенія, которыя находили примѣненіе въ ихъ религіозныхъ и философскихъ воззрѣніяхъ. Каждый изъ халдейскихъ боговъ обозначался однимъ изъ цѣлыхъ чиселъ между 1 и 60 (у нихъ была 60-ричная система счисленія) и занималъ опредѣленное мѣсто на небѣ. Ряду цѣлыхъ чиселъ соотвѣтствовалъ рядъ дробей, изъ которыхъ каждая дробь относилась къ извѣстному злему духу. Халдейскимъ астрономамъ были извѣстны ариѳметическая и геометрическая прогрессіи; кромѣ того, у нихъ существовали таблицы квадратовъ и кубовъ чиселъ.

О познаніяхъ халдеевъ въ алгебрѣ почти неизвѣстно; предполагаютъ все-таки, что имъ не безызвѣстно было рѣшеніе нѣкоторыхъ алгебраическихъ вопросовъ. Имъ, напр., было извѣстно рѣшеніе нѣкоторыхъ ур-ій первой степени съ однимъ и двумя неизвѣстными.

Геометрическія фигуры у нихъ имѣли значеніе гадательныхъ знаковъ; имъ были извѣстны параллельныя линіи, треугольникъ, квадратъ и т. п. Они умѣли дѣлить окружность на 6 равныхъ частей, знали приближенное отношеніе длины окружности къ діаметру ($\pi=3$) и т. д. Но главное вниманіе ихъ было обращено на астрономію; при наблюденіяхъ они пользовались приборами, похожими на астролябію; имъ былъ извѣстенъ гномонъ и т. п.

Вообще же математика народовъ древней Ассиріи и Вавилоніи, будучи связана съ различнаго рода мистическими воззрѣніями и толкованіями, не была приведена въ какую бы то ни было систему, вслѣдствіе чего она не могла достигнуть болѣе или менѣе значительнаго развитія.

Египтяне. О математическихъ познаніяхъ египтянъ мы знаемъ лишь по надписямъ на стѣнахъ египетскихъ храмовъ (въ Едфу) и по найденной древней рукописи, получившей названіе папируса Ринда. Изъ содержанія этого папируса видно, что египетскіе математики почти за 3000 лѣтъ до Р. Хр. достигли довольно значительныхъ результатовъ; они, напр., умѣли разлагать дроби на рядъ дробей съ числителями, равными единицѣ (ряды); имъ было извѣстно приведеніе дробей къ одному знаменателю; они умѣли рѣшать ур-ія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; имѣли понятіе и, весьма вѣроятно, знали свойства ариѳметическихъ и геометрическихъ прогрессій; умѣли находить приближенно площади равнобедреннаго треугольника и трапеціи; была даже сдѣлана попытка къ рѣшенію задачи на квадратуру круга; кромѣ того, мы видимъ у нихъ первые слѣды ученія о подобіи и пропорціональности, а также примѣненіе основныхъ двухъ тригонометрическихъ функцій, каковы косинусъ и тангенсъ.

Древніе египетскіе математики, подобно халдеямъ, не были чужды разнаго рода мистическихъ воззрѣній на различныя со-

отношенія между числами, и геометрическимъ фигурамъ придавали различныя мистическія толкованія.

Индусы. По словамъ одного арабскаго изслѣдователя, у индусовъ процвѣтали науки еще въ глубокой древности.

Изъ разсмотрѣнія ариѳметическихъ методовъ мы видимъ, что имъ были извѣстны четыре основныхъ дѣйствія надъ цѣлыми и дробными числами, извлеченіе квадратныхъ и кубическихъ корней, правила смѣшенія, товарищества, сплавовъ, процентовъ и тройное правило (конечно, вся система индусской математики, какъ и системы другихъ народовъ древности, сильно разнилась отъ современной, когда уже она приняла вполнѣ обоснованную форму).

Изъ геометріи индусамъ было извѣстно сравнительно довольно много; они, какъ и греки (что мы увидимъ далѣе), старались рѣшить задачу на трисекцію угла, квадратуру круга и кубатуру; они знали многое изъ планиметріи и стереометріи.

Познанія по алгебрѣ были также у нихъ обширны. Любимымъ вопросомъ былъ отдѣлъ о неопредѣленномъ анализѣ (неопредѣленныя ур-ія); они рѣшали ур-ія первой и второй степени; знали извлеченіе корней; рѣшали нѣкоторые частные случаи ур-ій третьей степени; знали прогрессіи, а также и теорію соединеній (довольно основательно); имѣли нѣкоторое представленіе даже о приложеніи алгебры къ геометріи.

Изъ тригонометріи имъ были извѣстны основныя формулы, дуги приведенія, синусы и косинусы суммы и разности двухъ дугъ и т. п.; при этомъ изъ тригонометрическихъ величинъ они пользовались преимущественно синусомъ, косинусомъ и синусомъ верзусомъ (*sn vers.*). Имъ даже, по нѣкоторымъ свѣдѣніямъ, была извѣстна сферическая тригонометрія (начатки). Индусамъ также приписываютъ изобрѣтеніе современной нумераціи, неправильно называемой арабской.

Китайцы. Свѣдѣнія о развитіи математики въ Китаѣ весьма скудны; одно лишь можно сказать болѣе ими менѣе увѣренно, это то, что въ своихъ познаніяхъ они довольно сильно отстали отъ другихъ народовъ, хотя въ Китаѣ получили свое начало многія замѣчательныя открытія.

Отдѣльныхъ сочиненій по математикѣ въ китайской литературѣ не существовало, а въ каждомъ изъ сочиненій говорилось вообще о всѣхъ наукахъ. У одного изъ китайскихъ геометровъ мы встрѣчаемъ арифметическій треугольникъ, нѣкоторыя свойства котораго были еще раньше извѣстны арабамъ (въ XI вѣкѣ), и который былъ найденъ впоследствии Паскалемъ. Наболѣе же блестящихъ результатовъ китайскіе математики достигли въ неопредѣленномъ анализѣ.

Греки. Одной изъ самыхъ древнѣйшихъ философскихъ школъ Греціи считаютъ іонійскую (представителемъ которой является Талесъ Милетскій), при чемъ полагаютъ, что въ ней математика, а въ особенности геометрія, совершенно не имѣла научнаго характера, но основывалась всецѣло на наглядномъ представленіи, замѣнявшемъ всѣ позднѣйшія доказательства.

Болѣе научно обосновалась геометрія въ пифагорейской школѣ, главная цѣль которой состояла въ изслѣдованіи различныхъ свойствъ чиселъ, которымъ приписывались мистическія значенія. Пифагоръ, основатель школы, различалъ четныя и нечетныя числа, квадратныя, треугольныя, пирамидальныя и т. п.; при этомъ въ его ученіи мы находимъ уже зародышъ теоріи прогрессій и рядовъ, а также начала ученія о пропорціяхъ, что впоследствии дало геометру Архиту рѣшить одну изъ основныхъ задачъ древнихъ грековъ, а именно—задачу на удвоеніе куба, которая была сведена къ отысканію средней пропорціональной.

Вообще же ко времени основанія школъ платоновской и аристотелевской геометрическая изобрѣтательность грековъ побѣдила трудность рѣшенія задачъ на квадратуру круга, трисекцію угла и кубатуру, которыя оказались возможными не съ помощью циркуля и линейки, а при помощи нѣкоторыхъ иныхъ кривыхъ, какъ, напр., открытой Диностратомъ квадратриксой и т. п.

Съ основаніемъ александрійской школы геометрія была возведена на высокую степень совершенства и получила ту законченность, которую она имѣетъ въ трактатѣ Эвклида «Начала».

Такимъ образомъ первоначальное развитіе геометрія полу-

часть въ Малой Азіи у іонійцевъ, затѣмъ переходитъ въ южную Италію къ пиеагорейцамъ, далѣе въ самый центръ Греціи—Аѳины (платоновская школа) и, наконецъ, въ Александрію.

Съ паденіемъ этой школы возникаетъ аѳинская, а затѣмъ византійская, указывающая упадокъ математическихъ наукъ, а съ паденіемъ и этихъ школъ прекращается вообще развитіе математики въ Греціи.

Какъ мы уже говорили, вполне научный характеръ приобретаетъ геометріей со времени Эвклида, поставившаго математику въ ряды наукъ.

Эпоху процвѣтанія александрійской школы вообще можно считать золотымъ вѣкомъ въ развитіи греческой математики, такъ какъ съ ней связаны имена великихъ математиковъ, каковы: Архимедъ, Эвклидъ и Аполлоній Перигейскій.

Эвклидъ, главнымъ образомъ, сдѣлался извѣстнымъ благодаря упомянутому выше трактату по геометріи, въ связи съ изложеніемъ нѣкоторыхъ понятій изъ ариеметики, значительно способствовавшихъ ясности представленія; важнѣе же всего развитіе Эвклидомъ новыхъ методовъ, какъ, напр., ученіе о данныхъ величинахъ (рѣшеніе ур-ій), теорія чиселъ, несоизмѣримыя величины, правильныя тѣла и т. п.; при этомъ въ ученіи о данныхъ величинахъ не трудно усмотрѣть первые зародыши аналитической геометріи, въ послѣдствіи развитой Декартомъ. Въ этомъ же трактатѣ мы находимъ теорію пропорцій, отысканіе дѣлителей и кратныхъ данныхъ чиселъ, а также термины: плоское число, квадратное, кубическое, тѣлесное и т. п. Въ ученіи о несоизмѣримыхъ величинахъ мы встрѣчаемъ основанія теоріи исчерпываній, которая замѣняла древнимъ современную теорію бесконечно-малыхъ и послужила вмѣстѣ съ открытой въ XVI вѣкѣ задачей «о проведеніи касательныхъ къ кривымъ» основой развитія дифференціального исчисленія.

Другой представитель александрійской школы, жившій въ III вѣкѣ до Р. Хр., Архимедъ можетъ по заслугамъ назваться величайшимъ математикомъ древности. По свидѣтельству Плутарха, древніе изумлялись той ясности въ доказательствахъ Архимеда, съ которой онъ ближе всего подошелъ къ новѣй-

шимъ методамъ и теоріямъ. Главныя заслуги его состоятъ въ томъ, что онъ далъ впервые методъ, сходный съ методомъ предѣловъ, и съ его помощью открылъ множество теоремъ, а такъ же подробно изучилъ коническія сѣченія и другія кривыя въ связи съ получаемыми вслѣдствіе ихъ вращенія тѣлами, называвшимися коноидами и сфероидами и носящими въ современной математикѣ термины: параболоидъ вращенія, эллипсоидъ вращенія и т. п. Разсѣкая эти тѣла вращенія параллельными плоскостями и пользуясь теоріей предѣловъ, Архимедъ рѣшилъ вопросъ о кубатурѣ тѣлъ, послужившей основой теоріи опредѣленныхъ интеграловъ. Въ его сочиненіи «О числѣ песчинокъ» мы находимъ первую идею десятичной системы счисления. При многочисленныхъ вычисленіяхъ, встрѣчающихся въ этомъ сочиненіи, Архимедъ пользуется арифметической и геометрической прогрессіями. Сравненіе этихъ прогрессій впоследствии привело Непера къ открытію логарифмовъ. У Архимеда также мы находимъ методъ безконечно-малыхъ въ связи съ теоріей предѣловъ. Кромѣ того, ему приписываютъ много изобрѣтеній въ области механики.

Почти въ одно время съ Архимедомъ жилъ знаменитый геометръ Аполлоній Перигейскій, прославившійся главнымъ образомъ, трактатомъ «о коническихъ сѣченіяхъ», въ которомъ, между прочимъ встрѣчаемъ вопросъ о *maximum* и *minimum*.

Во второмъ вѣкѣ до Р. Хр. великій астрономъ Гиппархъ положилъ начало математической астрономіи; для астрономическихъ вычисленій онъ пользовался прямолинейной и сферической тригонометріей, основы которой имъ были изложены въ сочиненіи «О восхожденіи и захожденіи свѣтилъ». Кромѣ того, ему приписываютъ нахожденіе стереографической проекціи и также приложеніе геометріи къ астрономіи.

Въ серединѣ II вѣка по Р. Хр. въ Греціи славится астрономъ и геометръ Птоломей, извѣстный своей системой движенія небесныхъ тѣлъ и нѣкоторой разработкой теоріи координатныхъ осей.

Далѣе мы встрѣчаемъ самаго виднаго представителя второй александрійской школы Діофанта, не безъ основанія считаемаго творцомъ алгебры.

Въ исторіи алгебры различаютъ три періода: 1) алгебру риторическую — самую низкую ея ступень, когда еще всѣ дѣйствія и величины выражались словами и не существовало никакихъ символовъ; 2) алгебру синкопическую — вторую ступень ея развитія; въ этотъ періодъ начинаютъ сокращать слова, и появляются нѣкоторые знаки, и 3) алгебру символическую — послѣднюю ступень ея развитія, гдѣ всѣ дѣйствія безъ исключенія изображаются посредствомъ символовъ.

Діофантъ былъ первый, рѣшившій ур-іе второй степени алгебраическимъ путемъ, такъ какъ ранѣе эти ур-ія рѣшались чисто геометрическимъ построениемъ. Съ Діофантомъ математика грековъ слѣдуетъ новому направленію, при которомъ главную роль играетъ алгебра, а геометріи отводится уже второе мѣсто. Такое измѣненіе направленія въ теченіе развитія математики повторяется довольно часто; такъ, Пифагоръ однимъ изъ первыхъ изслѣдуетъ свойства чиселъ; свою теорему о квадратѣ, построенномъ на гипотенузѣ, онъ прилагаетъ къ числамъ и вводитъ такимъ образомъ нѣкоторую связь между геометріей и ариѳметикой, которая раздѣлялась на двѣ части, составлявшихъ двѣ совершенно различныя науки. Ариѳметикой вообще называлась наука о числахъ, т.-е. объ изслѣдованіи свойствъ чиселъ и раздѣленіи ихъ на классы. Греческая же ариѳметика — наука чисто теоретическая; въ такомъ духѣ и написаны были у грековъ всѣ ариѳметики, изъ которыхъ самой обстоятельной является ариѳметика Никомаха. Другая часть ариѳметики носила названіе практической или логистики.

Начиная съ Эвклида, ариѳметика принимаетъ чисто научный характеръ, хотя и чисто геометрической, такъ какъ всѣ свойства чиселъ объясняются на линіяхъ, площадяхъ и т. п. Такой характеръ ариѳметика сохраняетъ до Никомаха, который излагаетъ ее безъ посредства геометріи, такъ что у него она является вполне наукой о числахъ.

Со времени Никомаха вся математическая литература принимаетъ ариѳметическій характеръ вплоть до начала XIII столѣтія, когда Фибоначчи знакомитъ европейцевъ съ алгеброй арабовъ; съ этого момента математика принимаетъ алгебраическое направленіе, которому слѣдуетъ до XVI вѣка, когда начинаютъ инте-

ресоваться трудами Діофанта, изученіе которыхъ даетъ толчекъ къ усовершенствованію методовъ неопредѣленнаго анализа, но съ появленіемъ метода дифференціаловъ неопредѣленный анализъ снова забрасывается до тѣхъ поръ, пока Эйлеръ не обращаетъ на него главное вниманіе, чѣмъ и полагаетъ начало окончательному его изслѣдованію, благодаря трудамъ математиковъ XIX вѣка, каковы Лагранжъ, Гауссъ, Якоби и др.

Блестящее развитіе наукъ у ученыхъ александрійской школы во время упадка Римской имперіи, гдѣ математическія познанія были значительно слабѣе греческихъ, такъ какъ у римлянъ она существовала лишь для практическихъ примѣненій, останавливается въ VI столѣтіи по Р. Хр.

Съ введеніемъ христіанской религіи быстро прекращается развитіе математики. Христіане, благодаря своему копоссальному невѣжеству и фанатизму, безъ разбора истребляютъ всѣ сочиненія язычниковъ, стремясь распространить повсемѣстно евангеліе. Въ эту эпоху погибаютъ замѣчательнѣйшіе памятники древней культуры, и только 800 лѣтъ спустя начинается развитіе наукъ въ Европѣ.

Арабы. Въ это время появляются арабы; основанная ими столица Багдадъ дѣлается центромъ цивилизаціи, и въ промежутокъ времени между IX и XIII вѣками создается обширная математическая литература, основы которой были, большею частью, заимствованы у грековъ.

Сравнивая оставшіеся послѣ арабовъ памятники по математикѣ и астрономіи, мы видимъ, что ихъ ученые превзошли во многомъ греческихъ. Главныя заслуги арабовъ состоятъ въ томъ, что они поставили тригонометрію въ ряды математическихъ наукъ. Греческая тригонометрія носитъ чисто геометрической характеръ, а у арабовъ характеръ тригонометріи — чисто алгебраической. Арабы первые ввели тангенсъ, какъ самостоятельную величину, а также котангенсъ, секансъ и косекансъ, о которыхъ до нихъ нигдѣ не упоминается; кромѣ того, ими были построены тригонометрическія таблицы для тангенсовъ и котангенсовъ.

Изъ числа самостоятельныхъ трудовъ арабовъ упомянемъ введеніе ими трехъ или четырехъ основныхъ предложеній, которыя лежатъ въ основѣ тригонометріи; введеніе синусовъ дугъ вмѣсто

двойныхъ хордъ; научное обоснованіе приложенія алгебры къ геометріи; рѣшеніе нѣкоторыхъ ур-ій 3-й степени и т.п.

Средніе и новые вѣка. Съ IV вѣка, какъ мы уже говорили, прекращается самостоятельное развитіе геометріи; Діофантъ полагаетъ новое направленіе въ развитіи математическихъ наукъ; на сцену является алгебра, первые слѣды которой мы видимъ у египтянъ, ассиро-вавилонянъ, индусовъ, китайцевъ и арабовъ.

Сначала развитіе алгебры идетъ медленно и слабо, и только съ XVI столѣтія она начинаетъ дѣлать неимовѣрные успѣхи, при чемъ центръ развитія ея переходитъ въ Италію, гдѣ она уже и достигаетъ той высоты, на которой стоитъ въ настоящее время.

Въ XVI вѣкѣ начинаютъ прилагать алгебру къ геометріи, которая вслѣдствіе этого получаетъ совершенно иной характеръ и необыкновенную общность; изъ науки конкретной она дѣлается наукой отвлеченной, глазъ перестаетъ участвовать въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ, чертежъ перестаетъ имѣть значеніе, а всѣ теоремы выражаются отвлеченной комбинаціей символовъ, которые продолжаютъ существовать и въ то время, когда теорема исчезаетъ для глаза при извѣстномъ положеніи данныхъ протяженій. Тамъ, гдѣ древніе геометры, руководимые глазомъ, теряли теорему и должны были доказывать ее отдѣльно для различныхъ случаевъ, алгебра даетъ ее всегда въ одной и той же комбинаціи символовъ.

Каждую геометрическую теорему или задачу старались выразить съ помощью алгебраическихъ комбинацій и обратно, каждую алгебраическую комбинацію символовъ старались выразить, по возможности, конкретнымъ геометрическимъ представленіемъ. Отсюда вытекла аналитическая геометрія и построеніе алгебраическихъ выраженій, а также и начертательная геометрія, истиннымъ основателемъ которой былъ Гаспаръ Монжъ.

Математики среднихъ вѣковъ смотрятъ на алгебру, какъ на чисто теоретическую науку. Съ постепеннымъ ея развитіемъ и попытками приложить къ геометріи, математика дѣлаетъ большіе успѣхи особенно въ эпоху возрожденія наукъ на западѣ. Самыхъ блестящихъ результатовъ достигаютъ математики Италіи,