И. Ньютон

Всеобщая арифметика

или книга об арифметических синтезе и анализе

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
И11

И. Ньютон
И11 Всеобщая арифметика: или книга об арифметических синтезе и анализе / И. Ньютон – М.: Книга по Требованию, 2012. – 445 с.

ISBN 978-5-458-32339-0

Вычисления производятся либо при помощи чисел, как в обыкновенной арифметике, либо при помощи видов, как в алгебре. Оба приема основаны на одинаковых принципах и ведут к одной цели, причем арифметика — путем определенным и частным, алгебра же — путем неопределенным и всеобщим. Поэтому почти все предложения, а особенно заключения, содержащиеся в алгебре, можно назвать теоремами. Особое превосходство алгебры заключается в том, что, тогда как в арифметике при решении вопросов переходят только от данных величин к искомым, в алгебре следуют обратному порядку, переходя от искомых величин, рассматриваемых как данные, к данным величинам, рассматриваемым как искомые, с тем чтобы как-либо удалось прийти к заключению или уравнению, из которого можно было бы найти искомую величину. Именно таким путем решаются очень трудные задачи, решение которых было бы тщетно искать при помощи одной арифметики. Однако все действия арифметики столь необходимы в алгебре, что они лишь совместно образуют полную науку вычислений, и поэтому я буду излагать их обе вместе.

ISBN 978-5-458-32339-0

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint


ВСЕОБЩАЯ АРИФМЕТИКА
ИСААК НЬЮТОН

ВСЕОБЩАЯ АРИФМЕТИКА ИЛИ КНИГА ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СИНТЕЗЕ И АНАЛИЗЕ[1]

Вычисления производятся либо при помощи чисел, как в обыкновенной арифметике, либо при помощи видов (species), как в алгебре.[2] Оба приема основаны на одинаковых принципах и ведут к одной цели, причем арифметика — путем определенным и частным, алгебра же — путем неопределенным и всеобщим. Поэтому почти все предложения, а особенно заключения, содержащиеся в алгебре, можно назвать теоремами. Особое превосходство алгебры заключается в том, что, тогда как в арифметике при решении вопросов переходят только от данных величин к искомым, в алгебре следуют обратному порядку, переходя от искомых величин, рассматриваемых как данные, к данным величинам, рассматриваемым как искомые, с тем чтобы как-либо удалось притти к заключению или уравнению, из которого можно было бы найти искомую величину. Именно таким путем решаются очень трудные задачи, решение которых было бы тщетно искать при помощи одной арифметики. Однако все действия арифметики столь необходимы в алгебре, что они лишь совместно образуют полную науку вычислений, и поэтому я буду излагать их обе вместе.

Приступающий к изучению науки вычисления должен сначала ознакомиться со значением употребляемых в ней терминов и знаков и изучить основные действия, как то: сложение, вычитание, умножение, деление, извлечение корней, приведение дробей и радикалов и методы приведения членов уравнений и исключения неизвестных (когда их несколько). Далее нужно приобрести сноровку во всех этих действиях, приводя задачи к уравнениям, и, наконец, изучить природу и решение уравнений.

О ЗНАЧЕНИИ НЕКОТОРЫХ ТЕРМИНОВ И ЗНАКОВ

Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлеченное отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное (surdus).[3] Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; иррациональное число несоизмеримо с единицей.

Каждому известны знаки целых чисел (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и значения этих знаков, собранных по нескольку вместе. Подобно тому как числа, стоящие на первом месте перед единицей, т. е. слева, означают десятки единиц, числа, стоящие на втором месте,— сотни, стоящие на третьем месте,— тысячи и т. д., подобно этому, числа, стоящие на первом месте после единицы, означают десятые доли этой единицы, числа, стоящие на втором месте справа, — сотые доли, стоящие на третьем месте, — тысячные доли и т. д. Такие числа мы называем десятичными дробями, ибо они всегда убывают в десятичном отношении. Чтобы отличать целые от десятичных дробей, мы ставим запятую, или же точку, или еще маленькую линию. Таким образом, 732|569 обозначает семьсот тридцать две единицы вместе с пятью десятыми, шестью сотыми и девятью тысячными долями единицы, что можно записать и так: 732,/569, или 732,569 или же 732 ⌊ 569. Так, далее, число 57104,2083 обозначает пятьдесят семь тысяч сто четыре единицы вместе с двумя десятыми восемью тысячными и тремя десятитысячными долями единицы. А число 0,064 обозначает шесть сотых и четыре тысячных доли.[4]

Знаки иррациональных чисел и дробных чисел приведены далее.

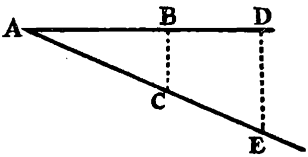
Когда величина какой-либо вещи не известна или рассматривается как неопределенная, так что мы не можем ее выразить с помощью чисел, мы обозначаем ее каким-либо видом (species) или какой-либо буквой. Когда мы рассматриваем как неопределенные известные величины, то обозначаем их для отличия начальными буквами алфавита a, b, c, d, а неизвестные — последними буквами z, y, x и т. д. Некоторые обозначают известные величины согласными или прописными буквами, а неизвестные — гласными или строчными буквами.[5]

Фиг. 1

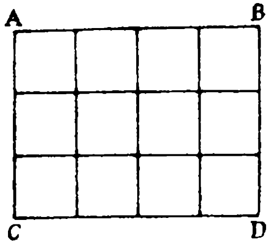
Величины бывают либо положительные, или же больше, чем ничто, либо отрицательные, или же меньше, чем ничто. Так, в общежитии имущество можно назвать положительным достоянием, а долг — отрицательным. Подобным же образом местное движение тела вперед можно назвать положительным, а движение назад — отрицательным, ибо первое движение увеличивает длину пути, а второе ее уменьшает. Аналогичным образом, если в геометрии линия, проведенная в какую-либо одну сторону, считается положительной, то отрицательной будет линия, проведенная в противоположную сторону. Если, например (фиг. 1), AB проведена направо, а BC налево и AB считается положительной, то BC будет отрицательной, ибо она, будучи проведенной, уменьшает AB, делая ее короче, как AC, или же ничем, если точка C совпадает с точкой A, или же меньше, чем ничто, если BC длиннее, чем AB, от которой ее нужно отнять. Отрицательная величина обозначается знаком $-$, а перед положительной ставится знак $+$. Запись $\mp$ обозначает неопределенный знак, а запись $\pm$ неопределенный знак, обратный первому.[6,7]

В собрании величин знак $+$ перед какой-нибудь из них выражает, что ее нужно прибавить, а знак $-$, что ее нужно вычесть. Эти знаки мы обыкновенно выражаем словами „плюс" и „минус". Так, $2+3$, или 2 плюс 3, означает сумму чисел 2 и 3, т. е. 5; а $5-3$, или 5 минус 3, означает разность, возникающую при вычитании 3 из 5, т. е. 2. Далее, $-5+3$ есть разность, возникающая при вычитании 5 из 3 и равная -2; $6-1+3$ дает 8. Точно так же $a+b$ есть сумма величин a и b; $a-b$ есть разность, которая возникает при вычитании b из a, и $a-b+c$ есть сумма этой разности и величины c. Если a есть 5, b есть 2 и c есть 8, то $a+b$ будет 7, $a-b$ будет 3 и $a-b+c$ будет 11. Далее, $2a+3a$ есть $5a$ и $3b-2a-b+3a$ есть $2b+a$, ибо $3b-b$ дает $2b$ и $-2a+3a$ дает a, а сумма их есть $2b+a$, и так далее. Значки $+$ и $-$ называются „знаками". Если величине не предшествует какой-либо знак, то перед ней подразумевается знак $+$.

Умножение в собственном смысле слова есть действие, производимое над целыми числами, с помощью которого находят новую величину, во столько раз бо̀льшую множимого, во сколько множитель больше единицы. Но за отсутствием более подходящего слова умножением называют также действие над дробными или иррациональными числами, с помощью которого ищут новую величину, находящуюся со множимым в том же отношении (каково бы оно ни было), какое множитель имеет к единице. Умножение производится не только над отвлеченными числами, но и над конкретными величинами, как линии, поверхности, движения, веса и т. д., поскольку эти величины, будучи отнесены как к единице к некоторой известной величине одинакового с ними рода, могут выражать и заменять отношения чисел. Если, например, требуется умножить величину A на линию в 12 футов, причем за единицу взята линия в 2 фута, то получится при умножении $6A$, или шесть раз A, так же как если бы A умножалось на отвлеченное число 6, ибо $6A$ находится в том же отношении к A, какое линия в 12 футов имеет к двухфутовой единице. Аналогичным образом, если требуется перемножить какие-либо две линии AC и AD (фиг. 2), то следует принять AB за единицу, провести BC и параллельно ей DE; при этом умножении произведением будет AE, ибо AE относится к AD, как AC к единице AB.[8] Более того, в силу обычая и образование или описание поверхности посредством движения под прямым углом одной линии вдоль другой также называется умножением этих двух линий. Это объясняется тем, что, хотя сколько бы ни умножать какую-либо линию,



Фиг. 2



Фиг. 3

она не станет поверхностью, и, значит, подобное образование поверхности с помощью линий весьма отлично от умножения, но между этими действиями имеется некоторое сходство. Именно, при умножении числа единиц в одной из линий на число единиц в другой линии в произведении получится отвлеченное число единиц, содержащихся в поверхности, образуемой этими линиями, если только единица поверхности определена по обыкновению как квадрат, стороны которого суть линейные единицы.

Если, например, прямая AB (фиг. 3) состоит из четырех единиц, а AC — из трех, то прямоугольник AD будет состоять из четырежды трех, или же двенадцати, квадратных единиц, как это видно из чертежа. Такая же аналогия имеется между телом и произведением трех величин. Поэтому-то слова: провести (ducere), размер, прямоугольник, квадрат, куб, измерение, сторона и другие, являющиеся геометрическими терминами, употребляются и в арифметических действиях. Дело в том, что под квадратом, или прямоугольником, или же величиной двух измерений, мы не всегда понимаем поверхность, но обычно разумеем величину иного рода, получающуюся при умножении двух других величин, и весьма часто при этом линию, получающуюся при умножении двух других линий. Аналогичным образом, под кубом, или параллелепипедом, или величиной трех измерений, мы понимаем результат двух последовательных умножений. Подобным же образом мы говорим „сторона“ вместо „корень“, „провести“ (ducere) вместо „умножить“ и т. д..[9]

Число, поставленное непосредственно перед буквой, показывает, сколько раз нужно прибавить эту букву к самой себе. Так, $2a$ означает два a, $3b$ — три b, $15x$ означает пятнадцать x.[10]

Записанные подряд две или больше буквы обозначают произведение или величину, возникающую при взаимном перемножении всех этих букв. Так, ab обозначает произведение a на b, abx — произведение a на b, умноженное на x. Если, например, a есть 2, b есть 3 и x есть 5, то ab будет 6 и abx будет 30.

Иногда для обозначения произведения между перемножаемыми величинами ставят знак $\times$, или слово „на“. Так, 3×5, или 3 на 5, означает 15. Впрочем, эти знаки употребляются главным образом при умножении составных величин. Так, если требуется умножить $y - 2b$ на $y + b$, то над каждой величиной проводится черта и затем пишут $\overline{y - 2b} \times \overline{y + b}$, или же $\overline{y - 2b}$ на $\overline{y + b}$.[11]

Деление в собственном смысле слова есть производимое над целыми числами действие, при помощи которого находят новую величину, во столько раз меньшую, чем делимое, во сколько раз единица меньше делителя. Но по аналогии принято называть делением также всякое действие, при помощи которого ищут новую величину, находящуюся в том же отношении к делимому, какое единица имеет к делителю, каков бы ни был делитель — дробное или иррациональное число или же иная величина любого рода. Поэтому, чтобы разделить линию AE на линию AC при единице AB (фиг. 2), следует провести ED параллельно CB, и линия AD будет частным. Более того, в силу некоторого сходства говорят о делении и в том случае, когда прямоугольник прилагают к некоторой данной линии как основанию, чтобы узнать тем самым его высоту. [12]

Запись одной из двух величин под другой, ниже которой между ними проведена черта, обозначает частное или же величину, возникающую при делении верхней величины на нижнюю. Так, $\frac{6}{2}$ означает величину, возникающую при делении 6 на 2, т. е. 3, а $\frac{5}{8}$ — величину, возникающую при делении 5 на 8, т. е. восьмую долю числа 5. Далее, $\frac{a}{b}$ есть величина, возникающая при делении a на b. Если, например, a есть 15 и b есть 3, то $\frac{a}{b}$ будет 5. Точно так же $\frac{ab - bb}{a + x}$ означает величину, получающуюся при делении $ab - bb$ на $a + x$ и т. д. Величины такого рода называются дробями, верхняя величина — знаменателем, а нижняя — числителем.

Иногда делитель пишут впереди делимого, отделяя от него дугой. Так, чтобы обозначить величину, возникающую при делении $\frac{axx}{a+b}$ на $a - b$, можно написать $\overline{a - b)}\,\frac{axx}{a+b}$. [13]

Хотя обычно запись величин непосредственно друг за другом обозначает умножение, но запись целого числа впереди дроби означает их сумму. Так, $3\frac{1}{2}$ значит три с половиной.

При умножении величины на самое себя принято, ради краткости, надписывать повыше ее число сомножителей. Вместо aaa пишут таким образом a^3, вместо $aaaa$ пишут a^4, вместо $aaaaa$ пишут a^5, вместо $aaabb$ пишут a^3bb, или a^3b^2.

Если a есть 5 и b есть 2, то a^3 будет $5\times5\times5$, или 125; a^4 будет $5\times5\times5\times5$, или 625; a^3b^2 будет $5\times5\times5\times2\times2$, или 500. Заметьте, что число, написанное между двумя соседними буквами, относится всегда к первой из них; например, в записи a^3bb 3 означает, что a следует дважды умножить на самое себя, а не то, что нужно взять три раза bb. Заметьте также, что говорят, что эти величины имеют столько же измерений (dimensio) или такую же степень (potestas vel dignitas), сколько в них содержится перемножающихся сомножителей или величин; при этом число, надписываемое над буквой, называется показателем (index) ее степени или измерений. Например, aa — двух измерений, или второй степени, a^3 — трех измерений, на что указывает приписанное повыше число 3. Величина aa называется также квадратом, a^3 — кубом, a^4 — биквадратом или квадрато-квадратом, a^5 — квадрато-кубом, a^6 — кубо-кубом, a^7 — квадрато-квадрато-кубом и т. д. Величина a, последовательные умножения которой на самое себя образуют эти различные степени, называется корнем этих степеней. Именно, a есть квадратный корень квадрата aa, кубический корень куба a^3 и т. д.[14]

Так как корень, умноженный на самого себя, образует квадрат, этот квадрат, вновь умноженный на корень, образует куб и т. д., то (согласно определению умножения) единица относится к корню, как корень к квадрату, квадрат к кубу и т. д. Поэтому квадратный корень из какой-нибудь величины является средней пропорциональной между единицей и этой величиной; кубический корень является первой из двух средних пропорциональных между единицей и этой величиной; корень четвертой степени — первой из трех средних пропорциональных и т. д. Поэтому корни распознаются по двум их свойствам или признакам: во-первых, они при умножении на самих себя образуют высшие степени, а во-вторых, они представляют собой средние пропорциональные между этими степенями и единицей. То обстоятельство, например, что квадратный корень из 64 есть 8, а кубический