Н. Бурбаки

Общая топология. Основные структуры

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б91

Бурбаки Н.
Б91 Общая топология. Основные структуры / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2012. – 272 с.

ISBN 978-5-458-31415-2

В этом новом издании сделано довольно большое число изменений в деталях; кроме того, переделан весь план гл. I и II с целью расположить материал в лучшем соответствии с общими представлениями о морфизмах структур и универсальных отображениях (Теория множеств, гл. IV, §§ 2 и 3).

ISBN 978-5-458-31415-2

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

В этом новом издании*) сделано довольно большое число изменений в деталях; кроме того, переделан весь план гл. I и II с целью расположить материал в лучшем соответствии с общими представлениями о морфизмах структур и универсальных отображениях (Теория множеств, гл. IV, §§ 2 и 3). Среди наиболее значительных добавлений отметим введение квазикомпактных пространств и проективных пределов, приложения которых к коммутативной алгебре и алгебраической геометрии становятся все более и более важными, а также большее развитие понятий открытого, замкнутого и совершенного отображений, которым посвящены два параграфа гл. I.

*) Перевод выполнен с третьего издания с учетом изменений, внесенных в четвертое.

ВВЕДЕНИЕ

Наряду с *алгебраическими* структурами (группами, кольцами, телами и т. д.), которые составляли предмет второй книги этого сочинения, во всех разделах анализа встречаются структуры другого рода: структуры, в которых придается математический смысл интуитивным понятиям *предела*, *непрерывности* и *окрестности*. Изучение этих структур и будет предметом настоящей книги.

Исторически понятия предела и непрерывности появились в математике весьма рано, а именно в геометрии, и с развитием анализа и его приложений к опытным наукам их роль неуклонно возрастала. И действительно, эти понятия тесно связаны с понятиями *опытного определения* и *приближения* величин. Но так как в большинстве случаев опытное определение величин сводится к *измерениям*, т. е. к нахождению одного или нескольких *чисел*, то вполне естественно, что в математике понятия предела и непрерывности появляются прежде всего в теории вещественных чисел с ее ответвлениями и различными областями применения (комплексные числа, вещественные или комплексные функции вещественных или комплексных переменных, евклидова геометрия и производные от нее геометрии).

В наше время стало ясно, что значение понятий, о которых идет речь, выходит далеко за пределы области вещественных и комплексных чисел классического анализа (см. Исторический очерк к гл. I). Путем углубленного исследования и разложения этих понятий удалось извлечь их суть и выковать орудие, действенность которого проявилась в многочисленных отраслях математики.

Уяснение того, в чем именно заключается главное содержание понятий предела, непрерывности и окрестности, мы начнем с анализа понятия *окрестности*, хотя исторически оно более позднего происхождения, чем оба остальные. Если исходить из физического понимания приближения, то естественно сказать, что часть A множества E является окрестностью своего элемента a, если при замене последнего его «приближением» этот новый элемент также будет принадлежать A всякий раз, когда допущенная «ошибка» достаточно мала; другими словами, если каждый элемент из E, «достаточно близкий» к элементу a, принадлежит A. Это определение получает точный смысл, как только вложен точный смысл в понятие достаточно малой ошибки или элемента, достаточно близкого к данному. Для достижения этого самым естественным будет предположить, что «отклонение» одного элемента от другого можно измерить вещественным (положительным) числом. Всякий раз, когда для любой пары элементов некоторого множества определено их «отклонение» или «расстояние», оказывается возможным определить «окрестности» элемента a этого множества; а именно, окрестностью элемента a будет любое подмножество, содержащее все элементы, расстояние которых от a меньше надлежащего положительного числа. Понятно, что для того чтобы, исходя из этого определения, можно было развить содержательную теорию, следует предположить, что «расстояние» удовлетворяет некоторым условиям или аксиомам (например, что и для нашего обобщенного расстояния должны выполняться неравенства, которые в евклидовой геометрии имеют место для расстояний между вершинами треугольника). Так получается широкое обобщение евклидовой геометрии; при этом удобно пользоваться геометрическим языком и называть элементы множества, в котором определено «расстояние», *точками*, а само множество — *пространством*. Такого рода пространства изучаются в гл. IX.

В этой концепции еще не устранены вещественные числа. Однако так определенные пространства обладают большим числом свойств, которые можно сформулировать независимо от лежащего в их основе понятия расстояния. Например, каждое подмножество, содержащее окрестность точки a, также есть окрестность точки a; пересечение двух окрестностей точки a является окрестностью точки a. Эти и некоторые другие свойства влекут массу следствий, которые выводятся из них совершенно независимо от понятия «расстояния», первоначально легшего в основу определения окрестностей. Так получаются предложения, в которых совсем нет речи о величине, расстоянии и т. п.

Это приводит в итоге к общей концепции топологического пространства, концепции, не зависящей от какой бы то ни было предваряющей ее теории вещественных чисел. Мы говорим, что множество E наделено *топологической структурой*, каждый раз, когда каждому его элементу тем или иным способом отнесено семейство подмножеств из E, называемых *окрестностями* этого элемента, если только, конечно, эти окрестности удовлетворяют некоторым условиям (*аксиомам* топологических структур). Выбор налагаемых на окрестности аксиом, очевидно, до некоторой степени произволен, и исторически он был предметом продолжительных поисков (см. Исторический очерк к гл. I). Система аксиом, на которой, в конце концов, остановились, вполне отвечает потребностям современного анализа, не впадая при этом в чрезмерную и беспредметную общность.

Множество, наделенное топологической структурой, называют *топологическим пространством*, а элементы этого множества — *точками*. Ветвь математики, изучающая топологические структуры, носит название *топологии* (этимологически — «наука о положении», название само по себе мало выразительное), которое в наши дни предпочитается названию Analysis Situs, являющемуся его синонимом.

Следует отметить, что для того, чтобы прийти к понятию окрестности, мы исходили из расплывчатого понятия элемента, «достаточно близкого» к другому. Теперь, наоборот, понятие топологической структуры позволяет придать выражению «такое-то свойство имеет место для всех точек, *достаточно близких к* a» точный смысл; это означает по определению, что множество точек, обладающих этим свойством, является окрестностью точки a в данной топологической структуре.

Из понятия окрестности проистекает ряд других понятий, изучение которых составляет содержание топологии: внутренность множества, замыкание множества, граница множества, открытое множество, замкнутое множество и т. д. (см. гл. I, § 1). Например, A является *открытым* множеством, если всякий раз, когда точка a принадлежит A, все точки, достаточно близкие к a, также принадлежат A; иначе говоря, если A является окрестностью любой своей точки. Аксиомы окрестностей позволяют установить различные свойства всех этих понятий: например, пересечение двух открытых множеств является открытым множеством (потому что предположено, что пересечение двух окрестностей точки a также является ее окрестностью). Обратно, примем за отправной пункт вместо понятия окрестности одно из этих производных понятий, например, предположим известными открытые множества и возведем в аксиомы свойства семейства открытых множеств (одно из которых только что было упомянуто в качестве примера). Легко установить, что тогда от открытых множеств можно заново прийти к окрестностям, причем выполнение аксиом окрестностей будет являться следствием новых аксиом, взятых в качестве отправной точки. Таким образом, мы видим, что топологическая структура может быть определена многими, однако, по существу, равносильными способами. В этой книге мы исходим из понятия *открытого множества* по соображениям удобства, поскольку соответствующие аксиомы носят наиболее простой характер.

Как только топологические структуры определены, понятию *непрерывности* легко уже придать точный смысл. Интуитивно функция непрерывна в некоторой точке, если ее значение сколь угодно мало изменяется, покуда аргумент остается достаточно близким к рассматриваемой точке. Мы видим, что понятие непрерывности будет иметь точный смысл каждый раз, когда пространство аргументов и пространство значений функции будут топологическими пространствами. Напрашивающееся тогда точное определение будет дано в § 2 гл. I.

Как и в понятии непрерывности, в понятии *предела* участвуют два множества, наделенных соответствующей структурой, и отображение одного из этих множеств в другое. Например, когда речь идет о пределе последовательности a_n вещественных чисел, то здесь, с одной стороны, участвуют множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел, с другой,— множество $\mathbf{R}$ вещественных чисел и, наконец, отображение первого множества во второе. При этом говорят, что вещественное число a является пределом последовательности a_n, если, какова бы ни была окрестность V точки a, эта окрестность содержит числа a_n для всех значений n, за исключением конечного числа; другими словами, если множество тех n, для которых a_n