Бараненков Г. С.

Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 50
ББК 22
Б24

Бараненков Г. С.
Б24 Задачи и упражнения по математическому анализу для ВТУЗов / Бараненков Г. С. – М.: Книга по Требованию, 2024. – 472 с.

ISBN 978-5-458-28618-3

В сборнике подобраны задачи и примеры по математическому анализу применительно к максимальной программе общего курса высшей математики высших технических учебных заведений. Сборник содержит свыше 3000 задач, систематически расположенных в главах (I-X), и охватывает все разделы втузовского курса высшей математики (за исключение аналитической геометрии). Особое внимание обращено на важнейшие разделы курса, требующие прочных навыков (нахождение пределов, техника дифференцирования, построение графиков функций, техника интегрирования, приложения определённых интегралов, ряды, решение дифференциальных уравнений).

ISBN 978-5-458-28618-3

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В сборнике подобраны задачи и примеры по математическому анализу применительно к максимальной программе общего курса высшей математики высших технических учебных заведений. Сборник содержит свыше 3000 задач, систематически расположенных в главах (I — X), и охватывает все разделы втузовского курса высшей математики (за исключением аналитической геометрии). Особое внимание обращено на важнейшие разделы курса, требующие прочных навыков (нахождение пределов, техника дифференцирования, построение графиков функций, техника интегрирования, приложения определенных интегралов, ряды, решение дифференциальных уравнений).

Учитывая наличие в некоторых втузах дополнительных глав курса математики, авторы включили задачи на теорию поля, метод Фурье и приближенные вычисления. Приведенное количество задач, как показывает практика преподавания, не только с избытком удовлетворяет потребности студентов по практическому закреплению соответствующих разделов курса, но и дает возможность преподавателю разнообразить выбор задач в пределах данного раздела и подбирать задачи для итоговых заданий и контрольных работ.

В основном задачник предназначен для студентов-заочников и студентов вечерних факультетов технических вузов машиностроительных специальностей, а также лиц, занимающихся самообразованием. В начале каждой главы дается краткое теоретическое введение и приводятся основные определения и формулы, относящиеся к соответствующему разделу курса. Здесь же показаны образцы решений особо важных типовых задач. Это обстоятельство, по нашему мнению, в значительной мере облегчит студенту-заочнику пользование задачником в самостоятельной работе. На все вычислительные задачи даны ответы; в задачах, отмеченных звездочкой (*) или двумя звездочками (**), в ответах приведены соответственно краткие указания к решениям или решения. Для наглядности часть задач иллюстрируется чертежами.

Сборник сложился в результате многолетнего преподавания авторами высшей математики в технических учебных заведениях

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Понятие функции

1°. Действительные числа. Числа рациональные и иррациональные носят название *действительных*, или *вещественных*, чисел. *Под абсолютной величиной* действительного числа a понимается неотрицательное число $|a|$, определяемое условиями: $|a|=a$, если $a \geqslant 0$, и $|a|=-a$, если $a<0$. Для любых вещественных чисел a и b справедливо неравенство

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

2°. Определение функции. Если каждому значению *) переменной величины x, принадлежащему некоторой совокупности (множеству) E, соответствует одно и только одно конечное значение величины y, то y называется *функцией* (однозначной) от x, или *зависимой переменной*, определенной на множестве E; x называется *аргументом*, или *независимой переменной*. То обстоятельство, что y есть функция от x, кратко выражают записью: $y=f(x)$ или $y=F(x)$ и т. п.

Если каждому значению x, принадлежащему некоторому множеству E, соответствует одно или несколько значений переменной величины y, то y называется *многозначной функцией* от x, определенной на множестве E. В дальнейшем под словом «функция» мы будем понимать только однозначные функции, если явно не оговорено противное.

3°. Область существования функции. Совокупность значений x, для которых данная функция определена, называется *областью существования*, или *областью определения* этой функции.

В простейших случаях область существования функции представляет собой: или *отрезок (сегмент)* $[a, b]$, т. е. множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$; или *промежуток (интервал)* (a, b), т. е. множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a<x<b$. Но возможна и более сложная структура области существования функции (см., например, задачу 21).

Пример 1. Определить область существования функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение. Функция определена, если

$$x^2-1>0,$$

---

*) В дальнейшем все рассматриваемые значения величин будут предполагаться вещественными, если явно не оговорено противное.

г. Москвы. В нем, кроме оригинальных задач и примеров, помещены многочисленные общеизвестные задачи, а также ряд задач и примеров из существующих руководств. В частности, был широко использован изданный на правах рукописи «Задачник по высшей математике» (Москва, изд. МВТУ, 1944 г.)—коллективный труд преподавателей кафедры высшей математики МВТУ, в числе которых, кроме некоторых авторов настоящего сборника, были также ныне скончавшиеся И. П. Ветчинкин и С. Ф. Шурлапов.

Хотя работа между авторами в основном была распределена по главам, каждый автор, как член авторского коллектива, несет полную ответственность за весь сборник в целом.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Четвертое издание сборника незначительно отличается от предыдущих. Исправлены замеченные опечатки в тексте и ответах. В некоторых местах несущественно изменены формулировки. Добавлено несколько новых задач, номера которых, с целью сохранения старой нумерации, оформлены с помощью дробной десятичной нумерации, например задачи, вставленные непосредственно после № 2016, имеют номера 2016.1, 2016.2 и т. п.

О всех замечаниях и пожеланиях по поводу сборника авторы просят сообщить по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Пятое издание сборника напечатано с матриц четвертого и отличается от него лишь некоторыми исправлениями опечаток в тексте и ответах.

Большая часть замеченных опечаток сообщена В. В. Третьяковым, которому авторы выражают свою благодарность.

Москва, 1965 г. *Авторы*

т. е. если $|x|>1$. Таким образом, область существования функции представляет собой совокупность двух интервалов: $-\infty<x<-1$ и $1<x<+\infty$.

4°. Обратные функции. Если уравнение $y=f(x)$ может быть однозначно разрешено относительно переменного x, т. е. существует функция $x=g(y)$ такая, что $y\equiv f[g(y)]$, то функция $x=g(y)$, или в стандартных обозначениях $y=g(x)$, называется *обратной* по отношению к $y=f(x)$. Очевидно, что $g[f(x)]\equiv x$, т. е. функции $f(x)$ и $g(x)$ являются *взаимно обратными*.

В общем случае уравнение $y=f(x)$ определяет многозначную обратную функцию $x=f^{-1}(y)$ такую, что $y\equiv f(f^{-1}(y))$ для всех y, являющихся значениями функции $f(x)$.

Пример 2. Для функции

$$y=1-2^{-x} \tag{1}$$

определить обратную.

Решение. Решив уравнение (1) относительно x, будем иметь:

$$2^{-x}=1-y$$

и

$$x=-\frac{\lg(1-y)}{\lg 2}\,^{*)}. \tag{2}$$

Область определения функции (2), очевидно, следующая: $-\infty<y<1$.

5°. Сложные и неявные функции. Функция y от x, заданная цепью равенств $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$ и т. п., называется *сложной*, или *функцией от функции*.

Функция, заданная уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной, называется *неявной*. Например, уравнение $x^3+y^3=1$ определяет y как неявную функцию от x.

6°. Графическое изображение функции. Множество точек (x, y) плоскости XOY, координаты которых связаны уравнением $y=f(x)$, называется *графиком* данной функции.

1.** Доказать, что если a и b — действительные числа, то

$$||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

2. Доказать следующие равенства:

а) $|ab|=|a|\cdot|b|$; в) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$;

б) $|a|^2=a^2$; г) $\sqrt{a^2}=|a|$.

3. Решить неравенства:

а) $|x-1|<3$; в) $|2x+1|<1$;

б) $|x+1|>2$; г) $|x-1|<|x+1|$.

4. Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, если $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$.

5. Найти $f(0)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, если $f(x)=\sqrt{1+x^2}$.

6. Пусть $f(x)=\arccos(\lg x)$. Найти $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$.

*) $\lg x=\log_{10}x$, как всегда, обозначает десятичный логарифм числа x.

7. Функция $f(x)$ — линейная. Найти эту функцию, если $f(-1)=2$ и $f(2)=-3$.

8. Найти целую рациональную функцию $f(x)$ второй степени, если $f(0)=1$, $f(1)=0$ и $f(3)=5$.

9. Известно, что $f(4)=-2$, $f(5)=6$. Найти приближенное значение $f(4,3)$, считая функцию $f(x)$ на участке $4 \leqslant x \leqslant 5$ линейной (*линейная интерполяция функции*).

10. Функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ x, & \text{если } x>0, \end{cases}$$

записать при помощи одной формулы, пользуясь знаком абсолютной величины.

Определить области существования функций:

11. а) $y=\sqrt{x+1}$; б) $y=\sqrt[3]{x+1}$.

12. $y=\dfrac{1}{4-x^2}$.

13. а) $y=\sqrt{x^2-2}$; б) $y=x\sqrt{x^2-2}$.

14.** $y=\sqrt{2+x-x^2}$.

15. $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$.

16. $y=\sqrt{x-x^3}$.

17. $y=\lg\dfrac{2+x}{2-x}$.

18. $y=\lg\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$.

19. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x}$.

20. $y=\arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

21. $y=\sqrt{\sin 2x}$.

22. Пусть $f(x)=2x^4-3x^3-5x^2+6x-10$. Найти

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \text{ и } \psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)].$$

23. Функция $f(x)$, определенная в симметричной области $-l<x<l$, называется *четной*, если $f(-x)=f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x)=-f(x)$.

Выяснить, какие из данных функций являются четными и какие нечетными:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2}(a^x+a^{-x})$;

б) $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

в) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$;

г) $f(x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$;

д) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

24*. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в интервале $-l<x<l$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

25. Доказать, что произведение двух четных функций или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

26. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T (*период функции*) такое, что $f(x+T)\equiv f(x)$ для всех значений x, принадлежащих области существования функции $f(x)$.

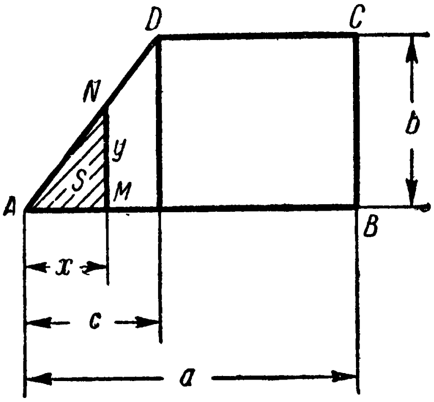

Рис. 1.

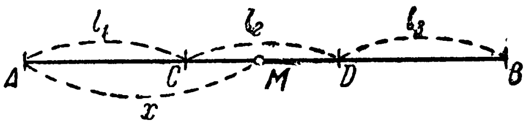

Рис. 2.

Определить, какие из перечисленных ниже функций являются периодическими, и для периодических функций найти наименьший период их T:

а) $f(x)=10\sin 3x$;

б) $f(x)=a\sin\lambda x+b\cos\lambda x$;

в) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

г) $f(x)=\sin^2 x$;

д) $f(x)=\sin(\sqrt{x})$.

27. Выразить длину отрезка $y=MN$ и площадь S фигуры AMN как функции от $x=AM$ (рис. 1). Построить графики этих функций.

28. Линейная плотность (т. е. масса единицы длины) стержня $AB=l$ (рис. 2) на участках $AC=l_1$, $CD=l_2$ и $DB=l_3$ $(l_1+l_2+l_3=l)$ равна соответственно q_1, q_2 и q_3. Выразить массу m переменного отрезка $AM=x$ этого стержня как функцию от x. Построить график этой функции.

29. Найти $\varphi[\psi(x)]$ и $\psi[\varphi(x)]$, если $\varphi(x)=x^2$ и $\psi(x)=2^x$.

30. Найти $f\{f[f(x)]\}$, если $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

31. Найти $f(x+1)$, если $f(x-1)=x^2$.

32. Пусть $f(n)$ есть сумма n членов арифметической прогрессии. Показать, что

$$f(n+3)-3f(n+2)+3f(n+1)-f(n)=0.$$

33. Показать, что если

$$f(x)=kx+b$$

и числа x_1, x_2, x_3 образуют арифметическую прогрессию, то числа $f(x_1)$, $f(x_2)$ и $f(x_3)$ также образуют арифметическую прогрессию.

34. Доказать, что если $f(x)$ есть показательная функция, т. е. $f(x)=a^x\ (a>0)$, и числа x_1, x_2, x_3 образуют арифметическую прогрессию, то числа $f(x_1)$, $f(x_2)$ и $f(x_3)$ образуют геометрическую прогрессию.

35. Пусть

$$f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}.$$

Показать, что

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

36. Пусть $\varphi(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ и $\psi(x)=\frac{1}{2}(a^x-a^{-x})$. Показать, что

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)\varphi(y)+\psi(x)\psi(y)$$

и

$$\psi(x+y)=\varphi(x)\psi(y)+\varphi(y)\psi(x).$$

37. Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, если

$$f(x)=\begin{cases}\arcsin x & \text{при } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ \operatorname{arctg} x & \text{при } 0<x<+\infty.\end{cases}$$

38. Определить корни (нули), области положительности и области отрицательности функции y, если:

а) $y=1+x$;

б) $y=2+x-x^2$;

в) $y=1-x+x^2$;

г) $y=x^3-3x$;

д) $y=\lg\frac{2x}{1+x}$.

39. Для функции y найти обратную, если:

а) $y=2x+3$;

б) $y=x^2-1$;

в) $y=\sqrt[3]{1-x^3}$;

г) $y=\lg\frac{x}{2}$;

д) $y=\operatorname{arctg} 3x$.

В каких областях будут определены эти обратные функции?

40. Для функции

$$y=\begin{cases}x, & \text{если } x\leqslant 0,\\ x^2, & \text{если } x>0,\end{cases}$$

найти обратную.

41. Данные функции записать в виде цепи равенств, каждое звено которой содержит простейшую элементарную функцию (степенную, показательную, тригонометрическую и т. п.):

а) $y=(2x-5)^{10}$;

б) $y=2^{\cos x}$;

в) $y=\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

г) $y=\arcsin(3^{-x^2})$.

42. Сложные функции, заданные цепью равенств, записать в виде одного равенства:

а) $y = u^2, \quad u = \sin x$;

б) $y = \operatorname{arctg} u, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = \lg x$;

в) $y = \begin{cases} 2u, & \text{если } u \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } u > 0; \end{cases}$

$u = x^2 - 1$.

43. Записать в явном виде функции y, заданные уравнениями:

а) $x^2 - \arccos y = \pi$;

б) $10^x + 10^y = 10$;

в) $x + |y| = 2y$.

Найти области определения данных неявных функций.

§ 2. Графики элементарных функций

Построение графиков функций $y = f(x)$ в основном производится путем наметки достаточно густой сети точек $M_i(x_i, y_i)$, где $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, и соединения последних некоторой линией, характер которой учитывает положение промежуточных точек. Для вычислений рекомендуется пользоваться логарифмической линейкой.

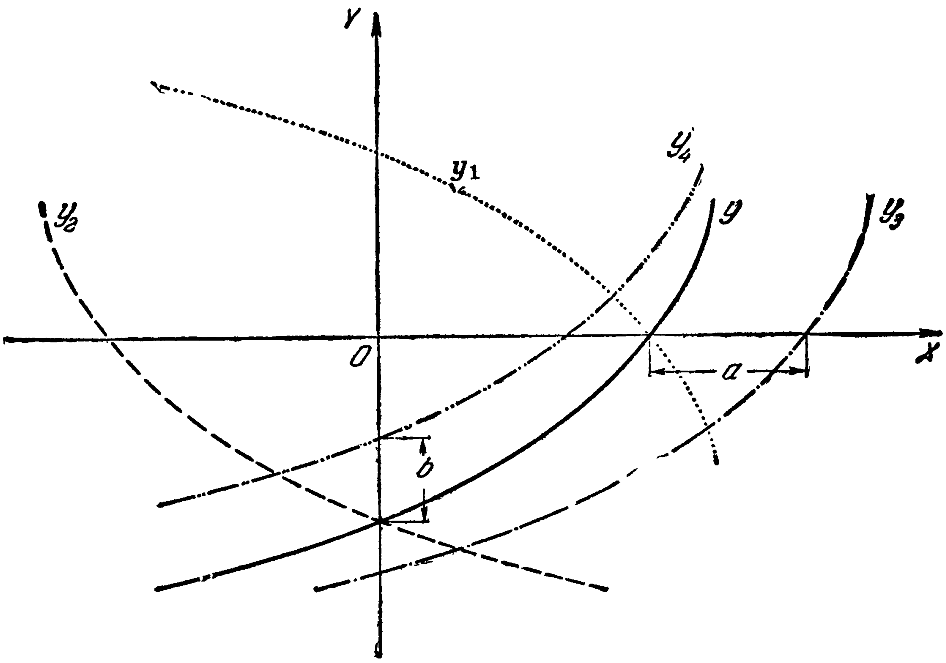

Рис. 3.

Построение графиков облегчает знакомство с графиками основных элементарных функций (см. приложение VI). Исходя из графика

$$y = f(x), \tag{Г}$$