

М. Тихомандрицкий

**О гипергеометрических
рядах**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
М11

М11 **М. Тихомандрицкий**
О гипергеометрических рядах / М. Тихомандрицкий – М.: Книга по Требова-
нию, 2020. – 230 с.

ISBN 978-5-458-57007-7

ISBN 978-5-458-57007-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2020

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2020

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Знаменитый Эйлеръ во второмъ томѣ своихъ „Institutionum Calculi integralis“, въ главахъ VIII и слѣдующихъ, для поясненія излагаемыхъ имъ методовъ, нѣсколько разъ беретъ въ примѣръ уравненіе:

$$x^2(a + bx^n)\frac{d^2y}{dx^2} + x(c + ex^n)\frac{dy}{dx} + (f + gx^n)y = 0, \dots (1)$$

въ которомъ, какъ частный случай, заключается гипергеометрическое дифференціальное уравненіе — именно, когда $n = 1$, $\frac{b}{a} = -1$, $\frac{c}{a} = \gamma$, $\frac{e}{a} = -(\alpha + \beta + 1)$, $f = 0$, $\frac{g}{a} = -\alpha\beta$. Тамъ онъ находитъ для его интеграловъ разложенія въ ряды такого вида:

$$y = x^\lambda(A + Bx^n + Cx^{2n} + \text{и т. д.}), \dots (2)$$

гдѣ λ корень уравненія:

$$\lambda(\lambda - 1)a + \lambda c + f = 0. \dots (a)$$

и

$$y = x^\lambda(A' + B'x^{-n} + C'x^{-2n} + \text{и т. д.}), \dots (3)$$

гдѣ λ корень уравненія:

$$\lambda(\lambda - 1)b + \lambda e + g = 0; \dots (b)$$

потомъ разсматриваетъ, когда ряды будутъ конечными; далѣе показываетъ, что въ случаѣ, когда одинъ изъ корней уравненія (a) или (b) будетъ безконеченъ или оба равны, общій интегралъ будетъ имѣть видъ:

$$y = u + av + v \log x, \dots (4)$$

гдѣ α произвольная постоянная, а v интегралъ вида (2) или (3), приче́мъ для λ должно взять или остающійся конечнымъ корень, или тотъ, съ кото́рымъ оба совпадаютъ въ случа́й равенства корней уравненія (а) или (б). Затѣмъ, переи́мъня функцію y на z съ помощью подстановки $y = e^{\int P dx} z$, гдѣ $P = \frac{\mu + vx^n}{x(\alpha + bx^n)}$, $\mu = a - c + ah$, $v = b - e + bk$, онъ находитъ, что уравненію (1) бу́детъ удовлетворять

$$(5) \dots\dots\dots f = x^{\frac{\alpha-c}{a} + h} (a + bx^n)^{\frac{bc - ae}{nab} - \frac{h-k}{n}} z,$$

если z есть интегралъ уравненія:

$$x^2(a + bx^n) \frac{d^2 z}{dx^2} + x(2\mu + c + (2v + e)x^n) \frac{dz}{dx} + (f + \mu h + (g + vk)x^n) z = 0,$$

гдѣ h и k произвольны. Наконецъ онъ интегрируетъ уравненіе (1) съ помощью опредѣленныхъ интеграловъ, а также показываетъ какимъ образомъ можно прежде найденные ряды обратить въ опредѣленные интегралы.

Гауссъ въ своемъ разсужденіи: „Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} x + \dots$ “, помѣщенномъ во II томѣ „Commentationum societatis regiae scientiarum Goettingensis“, излагаетъ линейныя соотношенія, которыя онъ нашелъ существующими между тремя гипергеометрическими рядами, которыхъ первые три элемента соответственно разнятся на цѣлыя числа, и выводитъ отсюда разложеніе частнаго двухъ гипергеометрическихъ рядовъ въ непрерывную дробь; затѣмъ, изслѣдовавъ условія сходимости гипергеометрическаго ряда при значеніи четвертаго элемента, по степенямъ котораго располагается рядъ, равномъ единицѣ, просуммировалъ его для этого случая съ помощью безконечныхъ произведеній, каковыми изслѣдованіями положилъ новыя начала теоріи Эйлеровыхъ интеграловъ. Въ другомъ мемуарѣ, появившемся въ III томѣ его „Werke“, онъ нашелъ переи́мъня четвертый элементъ на другой посредствомъ подстановокъ вида $x = \frac{ax + b}{cx + d}$, еще нѣсколько интеграловъ гипергеометрическаго дифференціального уравненія и нѣкоторыя соотношенія между ними, приче́мъ изслѣдовалъ также одинъ частный случай, когда общія формулы дѣлаются невозможными.

Всѣ 24 характеристическихъ интеграла этого уравненія и соотношенія между ними въ случа́й, когда первые три элемента ряда не связаны между

собой никакими линейными соотношеніями, и многіе изъ интеграловъ въ случаяхъ, когда между ними существуетъ одно или два условныхъ уравненія, были найдены *Куммеромъ* (см. журналъ Бреля, т. XIV и XV), посредствомъ особаго, ему принадлежащаго, метода.

Тѣже интегралы для перваго случая были выведены *Якоби* изъ опредѣленныхъ интеграловъ, посредствомъ которыхъ онъ проинтегрировалъ гипергеометрическое дифференціальное уравненіе, причемъ онъ послѣднимъ далъ такую форму, что всѣ 6 найденныхъ имъ интеграла брались отъ одной и той же функции и различались только предѣлами, каковыми были величины 0, 1, $\frac{1}{x}$ и ∞ . Посредствомъ нѣкоторыхъ подстановокъ, которыя читатель найдетъ въ IV главѣ нашего разсужденія, изъ каждаго интеграла онъ вывелъ еще по три, и такимъ образомъ получилось правильное раздѣленіе всѣхъ 24 интеграловъ, найденныхъ *Куммеромъ*, на классы. Далѣе *Якоби* изслѣдовалъ тотъ случай, когда одинъ изъ первыхъ двухъ элементовъ гипергеометрическаго ряда равняется цѣлому отрицательному числу, и тѣмъ положилъ начало теоріи функций подобныхъ функциямъ Лежандра, на какой предметъ въ свою очередь обратилъ вниманіе ученыхъ и *Ак. Чебышевъ* въ замѣткѣ объ этихъ функцияхъ, помѣщенной въ XI т. Записокъ Академіи Наукъ. Въ виду того, что въ русской математической литературѣ этимъ функциямъ специально посвящены монографія г. *Поссе* и глава въ сочиненіи г. *Согомокаго* „Объ опредѣленныхъ интегралахъ и функцияхъ, употребляемыхъ при разложеніяхъ въ ряды“, мы сочли достаточнымъ коснуться въ настоящемъ разсужденіи лишь самыхъ общихъ свойствъ ихъ, причемъ оказалось возможнымъ распространить на нихъ выраженія чрезъ кратные интегралы и дифференціалы, которыя мы находимъ у Гейне въ его „Handbuch der Kugelfunctionen“ для собственно Лежандровыхъ функций. Съ помощью выраженія этихъ функций чрезъ кратный дифференціалъ и нѣкотораго преобразованія гипергеометрическаго дифференціального уравненія *Якоби* получилъ новой формы опредѣленные интегралы, которыми онъ дополнилъ необходимое для полнаго интегрированія гипергеометрическаго дифференціального уравненія количество интеграловъ въ случаяхъ, когда первые три элемента выходятъ за предѣлы, при которыхъ возможны интегралы прежняго вида, ограничиваясь при этомъ лишь вещественными значеніями независимой перемѣнной. Найденные *Якоби* интегралы получены были г. *Литниковымъ* посредствомъ междупредѣльнаго дифференцированія съ произвольнымъ указателемъ (см. его сочиненіе

объ этомъ предметѣ, изданное въ Москвѣ 1875 г.). Изслѣдованія Якоби о гипергеометрическомъ рядѣ подъ заглавіемъ: „Ueber Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe“, изданы Гейне въ 56 томѣ журнала Борхардта (см. также III томъ сочиненій Якоби).

Самъ Гейне изслѣдовалъ рядъ, представляющій большую аналогію гипергеометрическаго ряда, который представляетъ предѣльный случай перваго; этотъ рядъ есть:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+m-1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})\dots(1-q^{\beta+m-1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^m)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})\dots(1-q^{\gamma+m-1})} x^m,$$

для $q = 1$ онъ превращается въ гипергеометрическій рядъ. Эти изслѣдованія находятся въ 34 томѣ журнала Креля. Въ мемуарѣ: „Ueber die Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen“ (Borchardt, 53 и 57 т.) онъ даетъ общія выраженія для числителей и знаменателей подходящихъ дробей къ непрерывной, въ которую разлагается его рядъ, и распространяетъ ихъ и на гипергеометрическій рядъ; однако это онъ дѣлаетъ не совсѣмъ строго, вслѣдствіе чего мы должны были дать другое доказательство этихъ формулъ. Но вопросъ о сходимости непрерывной дроби, въ которую Гауссъ разложилъ частное двухъ гипергеометрическихъ рядовъ, оставался открытымъ до Томэ, который доказалъ эту сходимость для случая, когда второй элементъ $\beta = 0$ въ 66 томѣ журнала Борхардта, и для какого угодно значенія этого элемента въ 68 томѣ. Въ 70 томѣ того же журнала онъ это сдѣлалъ и для Гейневскаго ряда, причемъ вновь вывелъ и самыя формулы Гейне для числителей и знаменателей подходящихъ дробей.

Въ VII томѣ „Abhandlungen Goettingenschen Gesellschaft der Wissenschaften“ Риманъ далъ опредѣленіе общаго интеграла гипергеометрическаго дифференціального уравненія для какихъ угодно комплексныхъ значеній элементовъ, и изъ этого опредѣленія вывелъ весьма просто всѣ главныя свойства его и само дифференціальное уравненіе, а также далъ и методъ для полученія Гауссовыхъ соотношеній; на этотъ мемуаръ Римана мы нѣсколько разъ ссылаемся въ нашемъ разсужденіи.

То, что Риманъ сдѣлалъ для ряда Гаусса, то Томэ сдѣлалъ для ряда Гейне въ своемъ вышеупомянутомъ мемуарѣ объ этомъ предметѣ, помѣщенномъ въ 70 томѣ журнала Борхардта.

Риманова функція, кромѣ ∞ , имѣетъ еще двѣ точки развѣтвленія 0 и 1; *Поххаммеръ* обобщилъ Риманову функцію, предположивъ, что кромѣ ∞ функція имѣетъ n точекъ, въ которыхъ она развѣтвляется на двѣ: одну синектическую вокругъ одной изъ такихъ точекъ, и другую, измѣняющуюся въ точкахъ, лежащихъ бесконечно-близко къ этой послѣдней, какъ x^λ , гдѣ λ какое угодно. Функція эта удовлетворяетъ дифференціальному уравненію n -аго порядка; она названа *Поххаммеромъ* гипергеометрическою n -аго порядка (*Борхардтъ*, т. 70 и 71).

Общая изысканія *Фукса* о линейныхъ уравненіяхъ съ переменными коэффициентами (т. 66 и слѣд. журн. *Борхардта*) проливаютъ нѣкоторый свѣтъ и на теорію гипергеометрическихъ рядовъ. Опираясь на эти изслѣдованія *Фукса*, *Шварцъ* (*Борхардтъ*, т. 75) отыскалъ тѣ случаи, въ которыхъ гипергеометрическое дифференціальное уравненіе имѣетъ алгебраическія рѣшенія. Изслѣдованіе случаевъ, когда общій интегралъ будетъ алгебраическій, сдѣлалъ онъ съ помощію оригинальнаго метода, приводя аналитическую задачу къ геометрической.

Въ предлагаемомъ разсужденіи мы желали представить общую теорію Гауссовыхъ гипергеометрическихъ рядовъ въ современномъ ея состояніи, какого она достигла послѣ приведенныхъ сейчасъ изслѣдованій, ограничиваясь случаями, когда первые три элемента ряда не связаны никакими уравненіями, но давая затѣмъ имъ, равно какъ и четвертому элементу, какія угодно комплексныя мнимыя значенія. Послѣднее обстоятельство заставило насъ изслѣдовать подробнѣе, чѣмъ какъ это было сдѣлано доселѣ, тѣ частные случаи, въ которыхъ Куммеровскіе интегралы и соотношенія между ними дѣлаются невозможными въ общей формѣ и требуютъ посему замѣны другими. Что касается до общаго плана нашего разсужденія, то за исходную точку я принялъ теорему *Фукса* объ интегралахъ принадлежащихъ особеннымъ точкамъ, и затѣмъ съ помощію замѣнутой системы подстановокъ, изъ которыхъ основныя, одна— A обусловливаетъ переходъ отъ синектического интеграла къ несинектическому, другія же B и C переходъ отъ особенной точки $x = 0$ къ прочимъ особеннымъ точкамъ 1 и ∞ , я вывелъ изъ перваго всѣ Куммеровскіе интегралы (такъ впрочемъ сдѣлалъ и *Куммеръ*, выводя лишь нѣкоторые непосредственно съ помощію своего метода). Это составляетъ содержаніе первой главы. Во второй главѣ, показавъ какую роль играютъ линейныя соотношенія между интегралами первой главы при изслѣдованіи какого либо интеграла гипергеометрическаго дифферен-

ціальнаго уравненія, я вивожу по Риману формулы для коефіцієнтівъ этихъ линейныхъ соотношеній. Въ третьей главѣ по Риману же я вивожу Гауссовы линейныя соотношенія между смежными функціями, прибавивъ еще одинъ случай. Въ четвертой главѣ я интегрирую гипергеометрическое дифференціальное уравненіе по Якоби съ помощію определенныхъ интеграловъ, которые я однако даю другую форму — Поххамера; здѣсь я получаю линейныя соотношенія между интегралами чрезъ интегрированіе по контуру односвязной площади. Пятая глава посвящается тѣмъ случаямъ, когда Куммеровскія формулы дѣлаются невозможными; въ шестой разбираю тѣ случаи, когда одинъ изъ первыхъ двухъ элементовъ ряда получаетъ цѣлое отрицательное значеніе, и наконецъ седьмая глава посвящается разложенію въ непрерывную дробь.

Работу Шварца я не включилъ въ свое разсужденіе, ибо послѣднія изслѣдованія Фукса подають, какъ намъ кажется, надежду придти аналитическимъ путемъ къ его результатамъ.

М. Тихомандрицкій.

20 Іюня 1876 г.

О ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ РЯДАХЪ.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Гипергеометрическимъ рядомъ называется безконечный рядъ:

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

котораго общій членъ имѣеть такой видъ:

$$\frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+m-1) \beta(\beta+1) \dots (\beta+m-1)}{1 \cdot 2 \dots m \cdot \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+m-1)} x^m$$

Начиная съ Гаусса, этотъ рядъ сокращенно такъ обозначаютъ:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$

и называютъ α первымъ, β вторымъ, γ третьимъ элементомъ ряда; x Гауссъ называлъ четвертымъ элементомъ ряда; но мы находимъ удобнѣе называть его просто независимой переменной, въ отличіе отъ первыхъ трехъ элементовъ, которые въ нашихъ разсматриваніяхъ будутъ играть роль постоянныхъ. Здѣсь α , β и γ могутъ быть какія угодно вещественныя или мнимыя величины, исключая для послѣдней значенія цѣлыя отрицательныя и нуль. Этотъ рядъ будетъ сходящимся для всѣхъ значеній x внутри круга, описаннаго радіусомъ равнымъ единицѣ изъ точекъ, въ которой $x = 0$, и притомъ безусловно сходящимся. Какъ извѣстно, рядъ будетъ безусловно сходящимся, когда сходится рядъ модулей его членовъ. Въ ряду модулей членовъ гипергеометрическаго ряда отношеніе $m + 1$ -го члена къ предъ-

шествующему, если мы положимъ $\alpha = \alpha' + \alpha''i$, $\beta = \beta' + \beta''i$, $\gamma = \gamma' + \gamma''i$,
 мод. $x = \rho$, будетъ:

$$\frac{\sqrt{(\alpha' + m)^2 + \alpha''^2} \sqrt{(\beta' + m)^2 + \beta''^2}}{(m + 1) \sqrt{(\gamma' + m)^2 + \gamma''^2}} \rho;$$

раздѣля числителя и знаменателя этого выраженія на m , легко увидѣть, что предѣломъ его для $m = \infty$ будетъ величина ρ ; такъ какъ ρ меньше единицы для всѣхъ точекъ, лежащихъ внутри круга, описаннаго радіусомъ равнымъ единицѣ изъ точки $x = 0$, то рядъ модулей членовъ гипергеометрическаго ряда будетъ сходящимся внутри этого круга; слѣд. гипергеометрическій рядъ есть рядъ безусловно сходящійся внутри того-же круга.

Безусловно сходящійся рядъ можно дифференцировать сколько угодно разъ, причемъ получаемые ряды, всѣ безусловно — и въ одинаковой степени сходящіеся, будутъ представлять производныя перваго ряда, порядковъ, соответствующихъ числу дифференцированій. Дифференцируя одинъ разъ, легко получить слѣдующую формулу:

$$(1) \dots \frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x);$$

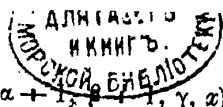
дифференцируя обѣ части этого равенства и исключая производную изъ второй части съ помощію той-же формулы, получимъ, повторяя это $n - 1$ разъ, слѣдующую формулу для производной n -го порядка:

$$(2) \frac{d^n F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx^n} = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, x).$$

Гипергеометрическій рядъ представляетъ функцію, удовлетворяющую линейному дифференціальному уравненію втораго порядка безъ послѣдняго члена. Для вывода этого уравненія вычтемъ $F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x)$ изъ $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$; означая чрезъ M коэффициентъ общаго члена послѣдняго, будемъ имѣть:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, x) - F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x) &= \sum_{m=0}^{\infty} M \left(1 - \frac{\gamma + m - 1}{\gamma - 1}\right) x^m = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} M \frac{m}{1 - \gamma} x^m = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot x}{\gamma(1 - \gamma)} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x). \end{aligned}$$

Увеличивая здѣсь всѣ элементы на единицу и перенося всё въ первую часть, будемъ имѣть:



$$\frac{(\alpha+1)(\beta+1)x}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, x) - F(\alpha+1, \beta+1, \gamma, x) + F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) = 0.$$

Умножая на $\alpha\beta(1-x)$, мы получимъ:

$$x(1-x) \frac{d^2 F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx^2} - \alpha\beta(1-x) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma, x) + \alpha\beta(1-x) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} (1-x) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma, x) &= \\ &= \frac{1}{\alpha\beta} \sum_{m=0}^{\infty} Mx^m [(\alpha+m)(\beta+m) - m(\gamma+m-1)] = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} Mx^m \left(1 + \frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{\alpha\beta} m\right) = \\ &= F(\alpha, \beta, \gamma, x) + (\alpha+\beta-\gamma+1) \frac{x}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x). \end{aligned}$$

Подставляя это въ предыдущее уравненіе, получимъ послѣ легкихъ преобразованій, положивъ $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, искомое уравненіе:

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)y' - \alpha\beta y = 0 \dots \dots (3)$$

Гипергеометрическій рядъ, какъ и всякій расположенный по восходящимъ степенямъ x , опредѣляетъ нѣкоторую функцію внутри своего круга сходимости; чтобы распространить её за предѣлы этого круга, нужно дать ей новое опредѣленіе: всего естественнѣе теперь опредѣлить её способностью удовлетворять на всей неограниченной плоскости дифференціальному уравненію, только что выведенному, которому она удовлетворяетъ во всѣхъ точкахъ, лежащихъ внутри круга сходимости представляющаго её гипергеометрическаго ряда. По этому опредѣленію гипергеометрическій рядъ представляетъ одинъ изъ интеграловъ дифференціального уравненія (3). Мы поставляемъ теперь себѣ задачу отыскать прочіе интегралы этого уравненія и изслѣдовать ихъ на всей неограниченной плоскости; это приведетъ насъ къ другимъ гипергеометрическимъ рядамъ, открытымъ частью Эйлерамъ и Гауссомъ, и вполне Куммеромъ и Якоби, который ихъ впервые раздѣлилъ правильнымъ образомъ на классы.

Приступая къ изслѣдованію уравненія (3), мы ограничимся сперва областью круга, описаннаго изъ точки $x=0$ радіусомъ R , большимъ единицы. Представивъ уравненіе (3) въ такомъ видѣ:

$$y'' = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(x-1)} y' - \frac{\alpha\beta}{x(x-1)} y, \dots \dots \dots (3')$$

мы замѣчаемъ въ разсматриваемой области только двѣ точки, въ которыхъ его коэффициенты дѣлаются безконечными: это $x=0$ и $x=1$; за исключеніемъ этихъ *особенныхъ* точекъ, коэффициенты будутъ конечныя, непрерывныя и однозначныя функціи x . Взявъ теперь какую нибудь неособенную точку x_0 , опишемъ воегугъ нея какъ центра кругъ радіусомъ равнымъ единицѣ, когда разстоянія ея отъ обѣихъ особенныхъ точекъ не меньше единицы, и радіусомъ равнымъ разстоянію ея до ближайшей изъ особенныхъ точекъ, когда хотя одно изъ этихъ разстояній меньше единицы: этотъ кругъ для краткости мы будемъ называть *окрестностью* точки x_0 . Теперь имѣемъ слѣдующую теорему:

„Въ окрестности точки x_0 уравненіе (3) имѣетъ синектической интеграль такого свойства, что самъ интеграль и его первая производная въ точкѣ x_0 имѣютъ данныя значенія, произвольно выбранныя“.

Для доказательства замѣтимъ сперва, что чрезъ послѣдовательное дифференцирование уравненія (3') и исключеніе изъ ряда получаемыхъ такимъ образомъ уравненій, можно вывести выраженія всѣхъ производныхъ y выше перваго порядка чрезъ y и $\frac{dy}{dx}$. Эти выраженія будутъ линейными однородными относительно y и $\frac{dy}{dx}$, коэффициенты которыхъ будутъ составлены изъ

коэффициентовъ уравненія (3) и его производныхъ съ помощью дѣйствій сложенія и умноженія. Поэтому, когда мы подставимъ въ эти выраженія вмѣсто коэффициентовъ уравненія (3) и ихъ производныхъ положительныя величины большія тѣхъ значеній, которыя имѣютъ ихъ модули при $x=x_0$, то получимъ положительныя величины большія а fortiori тѣхъ значеній, которыя въ точкѣ $x=x_0$ имѣютъ модули производныхъ y порядковъ выше перваго. Если M_1 и M_2 представляютъ положительныя величины не меньшія наибольшихъ значеній модулей коэффициентовъ уравненія (3'), которые мы означимъ для краткости чрезъ p_1 и p_2 , въ окрестности x_0 ; то, какъ извѣстно будетъ:

$$(4) \dots\dots\dots \text{mod} \left(\frac{d^k p_i}{dx^k} \right) < k! \frac{M_i}{r^k} \quad (i = 1, 2)$$

(гдѣ r есть радіусъ круга, названнаго нами окрестностью точки x_0) для всѣхъ значеній k отъ 0 до ∞ . Теперь возьмемъ уравненіе:

$$(5) \dots\dots\dots \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{M_1}{1 - \frac{x-x_0}{r}} \frac{du}{dx} + \frac{M_2}{1 - \frac{x-x_0}{r}} u.$$

Производныя высшаго порядка функціи u будутъ выражаться чрезъ u